藤原博士講演録

藤原博士講演錄

(一) 海弗沙氏記號算

(二) 東 洋 數 學

藤原松三郎講

錢端仁譯

國立北京大學理學院

二十九年十一月

藤原博士第一次講演

二十九年十一月九日

海弗沙氏記號算

Heaviside's Operational Calculus.

我站在中國各位的面前來講演，是極其光榮的；尤其是當現在舉世正感覺不安的時候，能有這樣和平的學術集會，實在是莫大的幸福。

我承理學院院長文先生相約，要舉行兩次講演。其一是關於現代數學的問題，其二是關於過去數學的問題，可是兩者之間，並沒有什麼直接的關聯。今天所講的是第一個問題，就是關於海弗沙氏（Heaviside）『記號算』(Operational calculus)的問題。

各位都知道 Heaviside 是英國的物理學者，而和 Cambridge, Oxford 派的正統派學者們不同，是一位極別致的學者。他在講電學，尤其是在講電流理論的時候，因有解微分方程式的必要，導入一種記號式的機械解法。此外在他的著作中還有一種奇特的議論，說是：「數學乃一種實驗的科學」。他對於傳統的數學者，抨反抗的態度；對於現時數學者所最重視的嚴密性，亦極其輕視；以故迄今僅有一部分物理學者和電工學者循從其理論，而純粹數學者，差不多都置之不問。

我先簡括的講一講"記號算"究竟是怎樣一回事。關於微分上一種

記號$\frac{dy}{dx}$，是對於 y 施行$\frac{d}{dx}$這樣一種演算，茲以符號 p 表示$\frac{d}{dx}$，以 p^2表示$\frac{d^2}{dx^2}$，以p^3表示$\frac{d^3}{dx^3}$，餘類推。又微分的逆演算——積分，則以 p^{-1} 表示，二重積分則以 p^{-2} 表示，但 Heaviside 特別規定積分的下限爲零，即

$$p^{-1}=\int_0^x(\quad)\,dx,$$

$$p^{-2}=\int_0^x dx\int_0^x(\quad)\,dx,$$

....

他以（$y=o\quad x=o$）爲初定條件來解微分方程式

$$\frac{dy}{dx}-\alpha y=1,$$

此方程式可寫作

$$py-\alpha y=1,$$

即 $$(p-\alpha)y=1,$$

$\therefore$ $$y=\frac{1}{p-\alpha}1,$$

展開$\frac{1}{p-\alpha}$爲$\frac{1}{p}+\frac{\alpha}{p^2}+\frac{\alpha^2}{p^3}+\cdots\cdots$，

將此演算施行於 1，

$$\frac{1}{p}1=\int_0^x 1\,dx=x,$$

$$\frac{1}{p^2}\,1=\int_0^x x\,dx=\frac{x^2}{2\,!},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

故 $$y=\frac{1}{p-\alpha}\,1=x+\frac{\alpha x^2}{2\,!}+\frac{\alpha^2x^3}{3\,!}+\cdots\cdots+\frac{\alpha^{n-1}x^n}{n\,!}+\cdots$$

$$=\frac{e^{\alpha x}-1}{\alpha}.$$

這結果確是 $x=o$ 時 $y=o$，而且確是所給微分方程式的解。

他還曾毫不躊躇的使用下列的算式，

$$e^{\alpha p}f(x)=\left(1+\alpha p+\frac{\alpha^2p^2}{2\,!}+\cdots\cdots\right)f(x)$$

$$=f(x)+\alpha f'(x)+\frac{\alpha^2}{2\,!}f''(x)+\cdots\cdots$$

$$=f(x+\alpha).$$

又解一般微分方程式

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=1$$

時，設定

$$p^n+a_1p^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}p+a_n=H(p),$$

以其爲 p 的整式，故

$$H(p)=(p-\alpha_1)(p-\alpha_2)\cdots\cdots(p-\alpha_n),$$

因而所給的微分方程式即成

$$y=\frac{1}{H(p)}\,1,$$

其中之$\dfrac{1}{H(p)}$可分解成部分分數的形式

$$\frac{1}{H(p)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{p-\alpha_k},$$

故得 $$y=\sum A_k\frac{1}{p-\alpha_k}1=\sum A_k\frac{e^{\alpha_k x}-1}{\alpha_k},$$

這便是合於初定條件 $x=o$ 時 $y=o$，$y'=o$，$y''=o$，……，$y^{(n-1)}=o$ 之解。

初定條件更隨意的時候，用這樣方法，計算上非常簡便。

上述方法，並非 Heaviside 首先發見，英國的學者早就運用過。例如 Boole 的微分方程式書中，就大體述及，惟 Heaviside 常命其初定條件為 $y=o$，乃不同的一點，並且他却未知其本國文獻，而係獨自發見的。

他更進一步利用 $p^{\frac{1}{2}}$ 這樣的演算，稱為二分之一次的微分。驟然聽來，似乎很奇怪。然認為這樣演算連續施行兩次，就得和微分一次同一的結果，也並不是什麼奇異的事。又 $p^{-\frac{1}{2}}$ 稱為二分之一次的積分，即是連續施行兩次便得和積分一次同樣的結果。其實這樣任意次微分積分的思想，Leibniz, Fuler 已有之。由微分積分學方面，都已經知道 p^{-n} 可寫作 $$\int_0^x dx\int_0^x dx\cdots\cdots\cdots\int_0^x y(x)dx$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x y(t)(x-t)^{n-1}dt.$$

今以$\frac{1}{2}$代n,則 $p^{-n}y$ 成為 $p^{-\frac{1}{2}}y$；又x=n時，$\Gamma(x)$ (gamma function)等於(n−1)！故

$$p^{-\frac{1}{2}}y=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^x y(t)(x-t)^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x\frac{y(t)}{\sqrt{x-t}}dt\cdot$$

又 $p^{\frac{1}{2}}$ 之定義爲 $p.p^{-\frac{1}{2}}$，故

$$p^{\frac{1}{2}}y=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x\frac{y(t)}{\sqrt{x-t}}dt\right)\cdot$$

例如 $$p^{-\frac{1}{2}}1=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x\frac{1}{\sqrt{x-t}}dt=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}},$$

$$p^{\frac{1}{2}}1=\frac{d}{dx}\left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi x}},$$

$$p^{\frac{3}{2}}1=\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{-1}{2x^{\frac{3}{2}}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$p^{n+\frac{1}{2}}1=\frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots\overline{2n+1}}{2^n\cdot x^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Heaviside 遇到必須將含有 $p^{\frac{1}{2}}$ 之

$$(a_0+a_1p+a_2p^2+\cdots\cdots\cdots\cdots)\ p^{\frac{1}{2}}=F(p)p^{\frac{1}{2}}$$

施用於 1 時，就利用上述結果求得其解爲

$$F(p)\,p^{\frac{1}{2}}\cdot1=(a_0+a_1p+a_2p^2+\cdots\cdots\cdots\cdots)\ p^{\frac{1}{2}}\cdot1$$

$$=\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}}a_n\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdots\cdots\overline{2n+1}}{2^n\,x^{n+\frac{1}{2}}}.$$

以前常規定 x＝o 時 y＝o 的條件，現在却置之不顧了。爲便利

起見，暫名此級數為 Heaviside 級數，簡書為ㄎ(x)。

這樣演算實在是大胆的辦法，幸而他所得的結果，和用普通方法經過複雜的手續所得的結果都一致，因此他的實驗是成功而可信了。又以他的方法很簡單，所以亦為人所重視。

然而由數學家的眼光看來，其理論缺少充分的證明，殊屬武斷。

首當論者，即 Heavisidé 的級數不一定是收斂的。

可是各位已經知道，發散級數之中，有所謂漸近級數 (Asymptotic series) 者，經 Poincare 研究以後，在實際計算上，極其有用，幸而 Heaviside 的級數就是這種漸近級數，所以第一個難關總算得了救星。

然而又遇見第二個難關。美國人 Carson 想為 Heaviside 的理論求一個嚴密的基礎，此人亦非數學家，乃一電工學家，供職於某電氣公司的研究所，曾於 1926 年出版一書曰 Electric circuit theory and operational calculus. 在此書中，將

$$H(p)y=1 \qquad \text{即} \qquad y=\frac{1}{H(p)}\cdot 1$$

定義為

$$\int_0^\infty e^{-pt}y(t)dt=\frac{1}{pH(p)},$$

左邊之積分稱為 Laplace 的變換。如此則 Heaviside 所得諸結果，大都得有嚴密的證明。但 Carson 由此見地，想在

$$\frac{1}{H(p)}=F(p)p^{\frac{1}{2}}=(a_0+a_1p+a_2p^2+\cdots\cdots)\,p^{\frac{1}{2}}$$

的時候，也要給 Heaviside 的結果求一個嚴密的證明，惟因其理論中有幾點不完全的地方，所以沒有得到完全的成功。

然而却得到了副產物，他發見 Heaviside 的結果之中如

$$F(p)=\frac{1}{p^2+\omega^2}$$

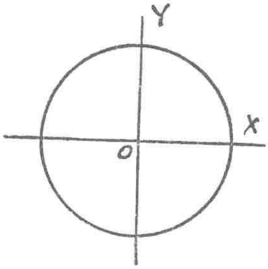
的時候就不對。 如此說來， Carson 的理論既不錯，我們對於 Heaviside 的結果究竟應該如何處理呢？ Carson 並未指摘出什麼地方是錯誤的，只說有時候是錯誤的，豈不是使我們對 Heaviside 的結果完全捨棄之外，別無他法了麼？

因此，我想給 Heaviside 的結果，另作一次救星，就是要確定 Heaviside的結果，在怎樣條件之下纔對。 先說我的結果吧：『Heaviside的級數中，要加上某一項，便永遠是對的。』 他所錯者，僅僅就是缺了那一項的緣故。

我的講演側重之處，就在這一點，現在極其概要的說一說。

設 c 表以原點爲中心，半徑爲 γ 之圓， H (z) 爲此圓內之單值解析函數，則積分

$$y=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{e^{xz}}{H(z)z}dz,$$

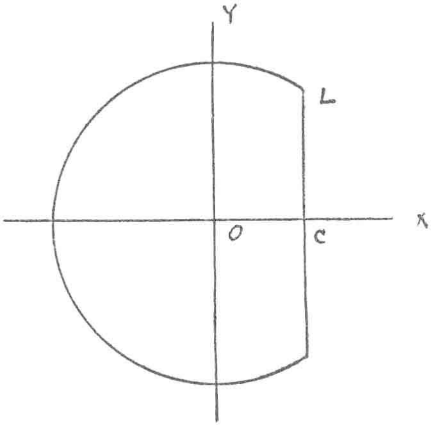


便成爲

$$H(p)y=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{e^{xz}}{z}dz=1,$$

而一方 y 爲 c 內 H (z) 之零點及 z=o 時 $\frac{e^{xz}}{ZH(z)}$之留數 (residum) 之和。 H (z) 爲 n 次之整式時，便成前述 Heaviside 的級數。

設在平行於 y 軸之直線 L (x=c>o) 上及其右側並無 H (z) 之零點，則積分路線可變成如下圖之所示者。



再對H(z)加以某種限制，則半圓部之積分，在半徑$r\to\infty$時成爲零，故滿足 $H(p)\,y=1$ 之 y 便成爲

$$y=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{xt}}{tH(t)}dt \qquad (1)$$

的形式。 反過來，又能變形爲

$$\int_0^{\infty}e^{-xt}\,y\,(t)\,dt=\frac{1}{xH(x)} \qquad (2)$$

當然 H(z) 所受的限制，是已知道的，茲從略。 這個關係式即是 Carson 以爲出發點的算式。

由 (1) 式到 (2) 式及由 (2) 式到 (1) 式，我曾導出之，載在東北數學雜誌第 17 卷 (1920)。 法國的 Levy 和美國的 March 都不知道，各於 1926 年， 1927 年獨自發表過，但對於 H (z) 的限制却未論及。

我們再回看

$$\frac{1}{H(p)}=F(p)p^{\frac{1}{2}},$$

若不由 (2) 式出發而由和 (2) 式同等的 (1) 式出發，

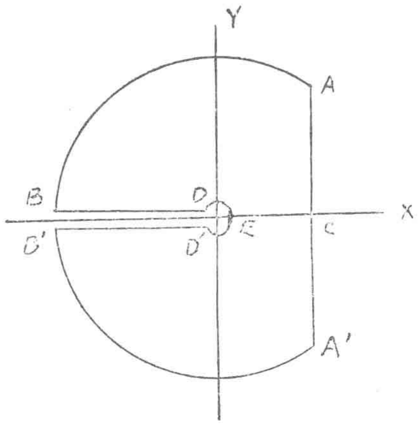
則
$$y=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{xz}F(z)}{Z^{\frac{1}{2}}}dz,$$

這回便發生了含有 $Z^{\frac{1}{2}}$ 的項，故 $Z=o$ 並非普通的特異點 (singular point) 而是分岐點 (branch point)，這是應當注意的地方。

如下圖所示的路徑圍成一領域，在此領域內，$\frac{e^{xz}F(t)}{Z^{\frac{1}{2}}}$ 為單值解析函數，故

AA' 上之積分 + $\overset{\frown}{AB}$ 上之積分
+ $\overset{\frown}{A'B'}$ 上之積分 + BD 上之積分
+ $B'D'$ 上之積分 + DED' 上之積分
$=\frac{e^{xz}F(z)}{Z^{\frac{1}{2}}}$ 之留數和。

然 AB, $A'B'$ 上之積分，在半徑 $r\to\infty$ 時為 o, DED' 上之積分在半徑近於零時為零。 $A'A$ 上之積分為 y。 BD 和 $D'B'$ 上之積分將符號改變而整理之，則為



$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{e^{-x\rho}F(-\rho)}{\sqrt{\rho}}d\rho,$$

將 $F(-\rho)$ 之級數加入計算，恰等於 Heaviside 的級數，故

$y=$ Heaviside 的級數 $+\frac{e^{xz}F(z)}{Z^{\frac{1}{2}}}$ 之留數和。 只要沒有此最後的留數，Heaviside 的結果便是正確的。

我的講演的第一部已經完了。 有擾各位清聽，特此致謝。

藤原博士第二次講演

二十九年十一月十六日

東洋數學

我到此地來，是因爲受了東亞文化協議會的委托調查東洋數學的，今天所講，也就是東洋的數學，不過所說的東洋，却是除去了印度，波斯，阿拉伯等，而專談中國，日本及朝鮮。在各位的面前談中國的數學，簡直是日本俗語所說，在佛前說法，實在是笑話，但是講說的順序應該如此，不得不請各位耐煩的聽一聽。中國的數學，在過去有很光榮的歷史，而且又最古，要在一二小時內來講上下三千年的歷史，各位一定承認這是不可能的事，我不過略述其大綱而已。

中國最古的數學書遺留到現在的，是「周髀算經」和「九章算術」兩種，其中九章算術尤爲中國數學的源泉，影響所及，既久且大，後漢書中已見其名，然究竟什麼時代的書，尙不能確實知道，現在所存者，是否本來面目，亦不可知。劉徽（景元四年西曆紀元二六三）曾將這後漢時代所存之書，加以整理注釋。再漢書藝文志並未著錄此書，其著錄之杜忠算術，許商算術等，反早經亡佚。

九章算術，正如其名所示，分爲九章，其內容大體即今日所謂算術和求積問題，勾股問題。所謂勾股問題，便是畢達哥拉斯定理之應用等。由此定理和相似三角形的定理，進而論到簡單的測量問題。在方程章中，論及聯立一次方程式，亦涉及正負之思想，這是

值得注意的事情，然而在希臘數學中却沒有負數的概念。又分數問題及求兩數之最大公約數，即所謂歐几理德的法式，亦各見於第一章中。

是書勾股章中，有所謂方邑問題者，係論四面開門的正方城問題。舉其中一例言之，出北門 a 步，有樹一株，如觀察者出南門 b 步，再折向西 c 步，方能望見此樹，問此方城一邊之長為若干？像這一類的問題有須解二次方程式者，可見在九章算術中，已知解二次方程式，實是大可注意的事。此後唐朝王孝通的緝古算經中，有須解三次方程式的問題，元初李治的測圓海鏡中，易方城為圓城，更導入高次方程式，是皆起源於九章算術。中國以外論及三次方程式者，只有阿拉伯，但已在第九世紀之後了。

九章算術中在求某數平方根的時候，如遇開方不盡，便定為$\sqrt{a^2+b}=a+\frac{b}{a}$，這並不正確。在九章算術以後的孫子算經中，改良為$\sqrt{a^2+b}=a+\frac{b}{2a}$；在張丘建算經中，$\sqrt{a^2+b}=a+\frac{b}{2a+1}$。前者見於巴比倫，後者見於希臘末期，也曾見於阿拉伯的數學書中，至於東西的關係，却不得而知。

圓和球的問題，在數學發展的初期，是最困難問題中之一。在九章算術中以π為 3，而劉徽所註曾加以改良，用很巧妙的方法，算得π為$\frac{157}{50}$，其後宋祖沖之所著綴術中，則以π為$\frac{355}{113}$。考綴術一書之名，見於隋書經籍志，不幸其書早經亡佚，誠不得不引以為憾。祖沖之所得之值，為其後數學者所忘却，證以元明之書，所舉祖沖之之密率為$\frac{22}{7}$，而非$\frac{355}{113}$，從可知也。

球的體積，在九章算術中，並未求得正確之結果，劉徽亦未成

功○ 然而祖沖之之子祖暅之却完全求得，但亦爲後世數學家所忘却，明代數學書中即無一載此正確結果者○

以上略述九章算術及與其有關係之事○次述九章以後，隋唐以前之數學○

隋書以後之經籍志或藝文志所載數學書，計有

九章算術　周髀算經　海島算經　孫子算經　五曹算經

張丘建算經　夏侯陽算經　五經算術　數術記遺　緝古算經

及　綴術　三等數

等十二書，最後二書已亡佚，僅前十書傳至現在，稱爲算經十書○在唐代十二書尚俱存，當時採用爲大學教科書；至宋而綴術，三等數兩書亡，元豐七年(1084)輯此外之所謂算經十書，印行於世；至元明時代又逐漸散逸；淸代復各方蒐集以至今日，書籍命運，亦極有興味之事○

九章之外，略述孫子算經一書，此書卷首列擧大數小數，度量衡之單位等，元明時代之數學書，全採用此種方式；其中又有「物不知總」問題，題爲「今有物不知數，三三數之賸二，五五數之賸三，七七數之賸二，問物幾何？」以今日之語言述之，即解問題

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod 3 \\ x &\equiv 3 \pmod 5 \\ x &\equiv 2 \pmod 7 \end{aligned}\right\},$$

解之得

$$x \equiv 23 \pmod{3\times5\times7=105}.$$

這是一個孤立的問題○ 將此問題擴張爲普遍情形者，爲宋末秦九韶數書九章所載大衍求一術，是書論及

$$\left.\begin{array}{r} a_1 x \equiv b_1 \pmod{m_1} \\ a_2 x \equiv b_2 \pmod{m_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n x \equiv b_n \pmod{m_n} \end{array}\right\},$$

之解法，此爲宋元數學中最光輝的一點。如 m_1，m_2，………m_n 互無公約數時，較爲簡單，否則極其複雜，今日整數論書籍中尙未見及，宋楊輝之楊輝算法中，稱此問題爲翦管術。

次述張丘建算經，其中有百雞問題，題爲「今有雞翁一值錢五，鷄母一値錢三，鷄雛三值錢一，凡百錢買鷄百隻，問鷄翁母雛各幾何」，這是現在所謂不定方程式的問題，在本質上，即是大衍求一術的問題，而在中國却分別論之。和此問題相似的，在九世紀之後，阿剌伯，印度的數學書中有之，究其發源於什麼地方，尙未能確定，亦極有興味的一問題。

以上爲隋唐以前，中國數學之重要事項，今大體講過之後，再講一講中國和日本及朝鮮之交涉。

唐代文化之傳入日本和朝鮮，是周知的事實，唐代的大學制度亦傳入日本，在日本採用爲大學教科書者和唐朝不同，

周髀，　九章，　海島，　孫子，　五曹，　綴術

六書雖同，而棄其餘六書，加以

六章，　三開重差，　九司

三書，然而並不是說其餘六書就沒有傳入日本，蓋九世紀之末(唐末)所輯的日本國見在書目中是全有的，而新加入的三種，完全不見於中國的文獻。

我在今年夏天調查朝鮮數學的時候，想不到發見了其中的兩種，即六章和三開，新羅時代的大學曾採用爲教科書，現存最古的朝鮮史書中，有三國史記者，載有大學以

九章，　　綴術，　　三開，　　六章

四書爲教科書，因此解決了一向所懷疑的一部分，但關於九司一書，尙一無所得。

我們再回來講中國的數學：以隋唐以前爲中國數學隆盛第一期，以宋末元初之數學爲第二期，在唐代則天文學大興，而數學方面不甚發達。　宋元之際，所出之重要人物和書籍，計有

宋	秦九韶	數書九章	
宋	楊　輝	楊輝算法	
元	李　治	測圓海鏡	益古演段
元	郭守敬	授時曆	
元	朱世傑	算學啟蒙	四元玉鑑

首當述者，秦九韶除發展大衍求一術爲其功績外，又發展數字係數之高次方程式的近似解法，此解法在原則上，和今日所謂 W. G. Horner的方法相同，這並非秦九韶的發見，乃係本諸他以前之劉益，賈憲等所立方法逐步進展而完成之者，惟劉賈二人之書，早經亡佚，現存書籍中記載此二人之方法者，以數書九章爲最古。

其次，在此期間最出色的發見爲立天元術，即今日所謂的代數，現存的書中，記述此術之最古者，爲李治的兩種書，這亦並非李治的發見，亦有其先進者，其法名未知數爲天元一，以之列成方程式而解之，這是利用一種記號的方法。　中國在發明珠算以前，專用算籌，

依其形式，有一種記數字的方法，用此方法，能記方程式，然而係數只限於數字，有這樣一個條件，所以不能說和代數一樣。

朱世傑的算學啟蒙，其最後一章爲論天元術之入門書，又於四元玉鑑擴張一個未知數爲四個，而論含有四個未知數之方程式，是則四元玉鑑一書，稱之爲中國數學的最高峰，亦未始不可。

天元術到了明代，便沒有一位數學者能了解了，顧應祥，唐順之等的著書中謂之爲不可解。至明末清初，西洋數學傳入中國，以與代數相較，方知其爲代數，這在梅瑴成之赤水遺珍中講得很明白，當時稱西洋傳來之代數爲借根方，又曰東來法，若說天元術就是借根方，多少有點輕率，因代數所用之記號爲文字，而在天元術中，係數必須是數字，蓋以記號所關，是非常重要的。

還有，四元玉鑑中有垛積術。楊輝算法中有巴斯加爾三角形，而較早於西洋；又有擴張洛書之魔方陣。郭守敬之授時曆，在曆法方面是値得注意的，其中有定差法的萌芽，後來名之曰招差法。

以上爲宋元之數學，誠富於創見，而非常的躍進，與隋唐以前第一期的數學，有一脈相通，亦很明顯的事實；至於與阿剌伯數學或印度數學的影響如何，尙無確實的證明，只好等待他日的硏究了。這樣進步的數學到了明代，傳之無人，萬曆年間，利瑪竇輸入西洋的數學，因而中國數學的本來面目就此消滅，這又不得不引以爲憾事。

明代數學書之代表作，當推程大位之算法統宗，其影響所及頗廣，最顯著者爲明末傳入日本，成爲日本數學的發足點，稍後又有朱世傑的算學啟蒙，天元術即由此書而傳入。

明代數學與宋元相較，幼稚到不堪比擬，而敎授算盤之用法，則