重点讲练丛书

高考数学重点讲练

主编：白云

中華書局

高考重点讲练·数学

主　编　白　云

作　者　（以写作顺序排名）
史树德　李有毅　袁京生
李彭龄　明知白　严　立
丁延才　尹建堂　孙德林
吴　卫

中　华　书　局

图书在版编目(CIP)数据

高考重点讲练·数学/白云主编.—北京:中华书局,2003

ISBN 7-101-03217-6

Ⅰ.高…　Ⅱ.白…　Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第002034号

责任编辑:马　燕

高考重点讲练·数学

主编　白　云

*

中华书局出版发行

(北京市丰台区太平桥西里38号　100073)

北京冠中印刷厂印刷

*

787×1092毫米 1/16·18 1/4印张·386千字

2003年1月第1版　2003年1月北京第1次印刷

印数1—5000册　定价:25.00元

ISBN 7—101—03217—6/G·449

前　　言

高考改革已进入新的阶段,全国全面实施了 $3+x$ 改革方案,数学作为一门主科,其地位十分重要。

数学学科的高考,既要全面考查,又要突出重点,正如《考试说明》指出的,对数学基础知识的考查,要求全面又突出重点,注重学科的内在联系和知识的综合。重点知识是支撑学科知识体系的主要内容,考查时要保持较高的比例,并达到必要的深度,构成数学试题的主体。为此,我们根据各地复习的成功经验,就高中数学中的重点内容精选 12 个专题,作为本书的主体内容。它们既是高考中的重点问题,也是高考中的热点问题,值得我们重视。

本书作者中既有三位著名的特级教师,又有多位在重点中学把关的高级教师,他们把在总复习中的成熟经验写成专题,贡献给全国广大师生,必将起到很好的作用。

白　云

2002 年 11 月

目　　录

第一部分　专题讲座

第一讲　函数的概念与性质 …… 1
第二讲　二次函数、指数函数和对数函数 …… 20
第三讲　三角函数的图象和性质 …… 48
第四讲　不等式的解法与应用 …… 63
第五讲　函数与不等式综合问题 …… 84
第六讲　等式与不等式的证明 …… 105
第七讲　函数的最大值与最小值 …… 129
第八讲　数列中的几个典型问题 …… 153
第九讲　空间中的线面平行与垂直 …… 174
第十讲　空间中的角、距离与体积的计算 …… 195
第十一讲　直线与圆锥曲线 …… 215
第十二讲　解析几何高考热点问题的解题策略 …… 241

第二部分　综合训练题

试题(一) …… 267
试题(二) …… 273
试题(三) …… 278

第一部分 专题讲座

第一讲 函数的概念与性质

一、集合是函数概念的基础

集合、子集、交集、并集、补集的含义,集合的术语和符号,是学习映射与函数必备的工具性知识,函数的定义域和值域用集合表示具有深刻、简明等优点.应重视集合在函数概念中的作用,集合与函数融为一体的综合型问题的解答.

1. 熟悉集合运算中的参数求值的通法

例 1 设 x 的函数 $y=|x-a|(y\geqslant 1)$ 的定义域为 P,使二次函数 $y=x^2-(a+3)x+3a$ 的图象恒在 x 轴上方的 x 取值集合为 Q,且 $\bar{P}\cup Q=R$,求实数 a 的取值范围.

解:集合 $\bar{P}=\{x\,|\,|x-a|<1\}=\{x\,|\,a-1<x<a+1\}$.

集合 $Q=\{x\,|\,x^2-(a+3)x+3a>0\}=\{x\,|\,x<\dfrac{a+3-|a-3|}{2}$,或 $x>\dfrac{a+3+|a-3|}{2}\}$.

由 $\bar{P}\cup Q=R$ 和图 1—1,得

图 1—1

$$\begin{cases}a+3-|a-3|>2(a-1),\\ a+3+|a-3|<2(a+1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|a-3|<5-a,\\ |a-3|<a-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a<4,\\ a>2\end{cases}\Leftrightarrow 2<a<4.$$

$\therefore a$ 的取值范围是$(2,4)$.

说明:遇到实数集合之间的运算时,可借助数轴,形象地表示给出集合与它们的并集,如图 1—1,进而发现解题思路,列出不等式组.满足 $\bar{P}\subseteq Q$ 的 a 的值是否存在呢,请在解后回答.

例 2 设集合 $A=\{(x,y)\,|\,2\lg y=\lg(x+3)\}$,$B=\{(x,y)\,|\,y=x+k\}(k\in R)$.

(1) 若 $A\cap B=\varnothing$,求 k 的取值范围;

(2) 是否存在 k,使 $A\cap B$ 只含 1 个元素,并说明理由.

解：由集合 A，得 $y^2=x+3(x>-3,y>0)$，它的图象为抛物线 $y^2=x+3$ 在 x 轴上方的部分．由 B，得 $y=x+k$，它的图象为斜率是 1 的平行直线系，如图 1—2．

由 $y^2=x+3$ 与 $y=x+k$ 组成的方程组、消 x，整理得

$$y^2-y+k-3=0,$$

$\triangle=(-1)^2-4(k-3)=13-4k$．

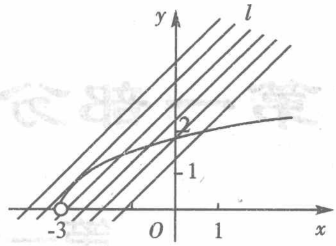

图 1—2

(1) 由题意，$\triangle<0$，$13-4k<0$，解得 $k>\frac{13}{4}$ 时，$A\cap B=\varnothing$．

(2) 由 $\triangle=13-4k=0$，得 $k=\frac{13}{4}$；结合图 1—2，直线 l 及其右边的平行线与抛物线 $y^2=x+3$ 只有一个交点，则纵截距 $k\leqslant 3$．因此，$k=\frac{13}{4}$ 或 $k\leqslant 3$ 时，$A\cap B$ 只含 1 个元素．

说明：因为集合 A,B 中的元素是点，所以采用数形结合的思想和方法分析题意，寻找解题思路．为全面研讨直线 $y=x+k$ 与抛物线 $y^2=x+3(x>-3,y>0)$ 的位置关系，还可求 $A\cap B$ 含有两个元素时，k 的取值范围是 $k\in\left(3,\frac{13}{4}\right)$．

2．注意集合与函数概念的交叉渗透

例 3　设函数 $f(x)=x^2+ax+b(a,b,x\in R)$，集合 $D=\{x\mid x=f(x)\}$，$E=\{x\mid x=f[f(x)]\}$．

(1) 判别 $D\subseteq E$ 是否正确，并说明理由；

(2) 当 $D=\{-1,3\}$ 时，用列举法表示 E．

解：(1)设 t 是集合 D 中任意一个元素，即 $t\in D$，则 $f(t)=t$．

而 $f[f(t)]=f(t)=t$，则 $t\in E$．

故 $D\subseteq E$ 正确．

(2)由条件，得 $x=x^2+ax+b$，即

$$x^2+(a-1)x+b=0.\qquad ①$$

又 $D=\{-1,3\}$，即 $-1,3$ 是方程①的两根，

$$\therefore\begin{cases}1-(a-1)+b=0,\\9+3(a-1)+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=2,\\3a+b=-6.\end{cases}$$

解之，得 $a=-1,b=-3$．　于是 $f(x)=x^2-x-3$．

由 $x=f[f(x)]$，　得 $x=(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3$，

即 $(x^2-x-3)^2-x^2=0$，$(x^2-3)(x^2-2x-3)=0$，

解得 $x=\pm\sqrt{3}$，或 $x=-1$，或 $x=3$．故集合 $B=\{-\sqrt{3},-1,1,\sqrt{3}\}$．

说明：本例揭示出集合与函数知识的内在联系与综合运用．解题的关键是准确理解题设的数学语言（包括文字语言、符号语言、图形语言等），将其转化成更简明的数量关

系的表达式．解特殊的高次方程 $x=f[f(x)]$，应合理应用因式分解的方法．

二、深刻理解函数的有关概念

深刻理解函数概念，首先要明确函数的三要素在函数定义中的地位和作用；其次应明白函数有三种表示法，理解分段函数的意义与表示方法，熟悉反函数的含义与应用；另外应会画较简函数的图象，并能识图、用图；还应在实际应用题中，能建立函数模型，分析和解决问题．

1．从函数三要素着眼理解函数概念

函数的三要素即函数的定义域、值域、对应法则．要掌握求函数定义域的基本类型和方法，理解抽象的函数记号的意义，会求某些函数的解析式，懂得求函数值域的原则和思路．

例 4　求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{(\sqrt{x^2}-3)^0}{\log_{(2x+1)}(32-4^x)}+\sqrt{\sin\dfrac{3x}{2}}$；

(2) $y=\log_{0.5}\dfrac{x^2-2x+2}{1+2ax}$.

解：(1)要使函数有意义，必须且只需：

$$\begin{cases}\sqrt{x^2}-3\neq0,\\2x+1>0,\\2x+1\neq1,\\32-4^x>0,\\32-4^x\neq1,\\\sin\dfrac{3x}{2}\geqslant0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\pm\sqrt{3},\\x>-\dfrac{1}{2},\\x\neq0,\\x<\dfrac{5}{2},\\x\neq\log_2\sqrt{31},\\\dfrac{4k\pi}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{4k\pi}{3}+\dfrac{2\pi}{3}(k\in Z).\end{cases}$$

解得 $0<x\leqslant\dfrac{2\pi}{3}$ 且 $x\neq\sqrt{3}$.

$\therefore$ 函数定义域为 $(0,\sqrt{3})\cup\left(\sqrt{3},\dfrac{2\pi}{3}\right]$.

(2)由 $x^2-2x+2=(x+1)^2+1>0$，得

$1+2ax>0$.

$\therefore a=0$时，函数定义域为$(-\infty,+\infty)$；$a>0$时，函数定义域为$\left(-\dfrac{1}{2a},+\infty\right)$；$a<0$时，函数定义域为$(-\infty,-\dfrac{1}{2a})$.

说明：(1)题从局部到整体，先列出几个常见函数自变量取值范围的不等式组，再取交集求函数的定义域.(2)题的常数 a 的值待探索，需分类讨论求函数的定义域，各具特色.

例5 在▱$ABCD$中，$AB=a$，$AD=b$，$\angle A=\alpha(0°<\alpha<90°,a>b>0)$，如图1—3.又$BE=BF=DG=DH=x$，▱$EFGH$的面积为$S$，求函数$S=f(x)$及其定义域与值域.

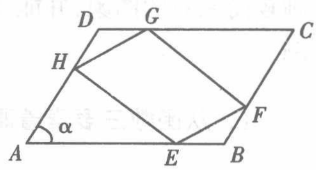

图1—3

解：$S=S_{▱ABCD}-2S_{\triangle BEF}-2S_{\triangle AHE}$

$=ab\sin\alpha-x^2\sin\alpha-(a-x)(b-x)\sin\alpha$

$=[-2x^2+(a+b)x]\sin\alpha$，

$\therefore S=f(x)=[-2x^2+(a+b)x]\sin\alpha$.

由 $a>b>0$，且点 H 趋近于点 A，又可与点 D 重合，得函数的定义域为$(0,b]$.又

$S=f(x)=\left[-2\left(x-\dfrac{a+b}{4}\right)^2+\dfrac{(a+b)^2}{8}\right]\sin\alpha$，

$\because 0<\dfrac{a+b}{4}\leqslant b\Leftrightarrow 0<a\leqslant 3b$，且$\sin\alpha>0$，$\dfrac{a+b}{4}>\dfrac{b}{2}$，

$\therefore x=\dfrac{a+b}{4}$时，$S_{\max}=\dfrac{(a+b)^2}{8}\sin\alpha$，即$0<a\leqslant 3b$时，$S$的值域为$\left(0,\dfrac{(a+b)^2}{8}\right]$.

又$a>3b>0$，$x=b$时，$S_{\max}=[-2b^2+(a+b)b]\sin\alpha=(ab-b^2)\sin\alpha$，即$a>3b>0$时，$S$的值域为$(0,(ab-b^2)\sin\alpha]$.

说明：根据题意及图1—3确定$S=f(x)$的定义域$(0,b]$后，应注意分两类$0<\dfrac{a+b}{4}\leqslant b$或$\dfrac{a+b}{4}>b$讨论，分别求$S=f(x)$的值域.

例6 (1) 设函数$f(x-3)=\log_a\dfrac{x}{6-x}(a>0,a\neq 1)$，求函数$f(x)$及其定义域；

(2) 设$a,b,c\in R$，抛物线$f(x)=ax^2+bx+c$过点$(-1,0)$.若不等式$x\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{2}(1+x^2)$对$x\in R$都成立，求函数$f(x)$及其值域.

解：(1)由题意$\dfrac{x}{6-x}>0\Leftrightarrow 0<x<6\Leftrightarrow -3<x-3<3$.

设$t=x-3$，$x=t+3$，则

$f(t)=\log_a\dfrac{t+3}{3-t}(-3<t<3)$.即

$f(x)=\log_a \dfrac{x+3}{3-x}$,其定义域为$(-3,3)$.

(2)由抛物线 $f(x)$ 过点$(-1,0)$,得

$$a-b+c=0. \qquad ①$$

又 $x\leqslant f(x)\leqslant \dfrac{1}{2}(1+x^2)$对 $x\in R$ 都成立,取 $x=1$,得 $1\leqslant f(1)\leqslant 1$,则

$$f(1)=1,\text{即 } a+b+c=1. \qquad ②$$

由①,②解得 $b=\dfrac{1}{2}$,$c=\dfrac{1}{2}-a$.

而 $f(1)=1$,$x\leqslant f(x)$对 $x\in R$ 都成立,则抛物线 $y=f(x)$与直线 $y=x$ 相切,即

$$ax^2+\frac{x}{2}+\left(\frac{1}{2}-a\right)=x,\quad ax^2-\frac{x}{2}+\left(\frac{1}{2}-a\right)=0.$$

由$\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2-4a\left(\dfrac{1}{2}-a\right)=0$,解得 $a=\dfrac{1}{4}$,从而 $c=\dfrac{1}{2}-a=\dfrac{1}{4}$.

$\therefore f(x)=\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}(x+1)^2$.

函数 $f(x)$的值域为$[0,+\infty)$.

说明:(1)题根据函数的对应法则,采用变量代换法求解析式,应注意变量 t 的取值范围是决定函数的定义域的要素.

(2)题采用待定系数法求 a,b,c,得函数的解析式.①式易求,关键是发挥 $x\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{2}(1+x^2)$的作用导出②式.还可将其转化成非负的两个不等式组,利用 $mx^2+nx+p\geqslant 0$ 的充要条件 $n^2-4mp\leqslant 0$ 且 $m>0$ 求 $f(x)$及其值域.

例 7　设函数 $f(x)=\dfrac{2x^2+bx+c}{x^2+1}$的值域为$[1,3]$,其中 $b<0$.

(1) 求 $f(x)$的解析式;

(2) 判定 $f(x)$在$[-1,1]$上的单调性,并求 $f\left(\left|t-\dfrac{1}{6}\right|-\left|t+\dfrac{1}{6}\right|\right)$的取值范围.

解:(1)设 $y=f(x)=\dfrac{2x^2+bx+c}{x^2+1}$,整理得

$$(2-y)x^2+bx+c-y=0. \qquad *$$

当 $y\neq 2$ 时,由 * 式,$\triangle\geqslant 0$,得

$$b^2-4(2-y)(c-y)\geqslant 0\Leftrightarrow 4y^2-4(2+c)y+8c-b^2\leqslant 0.$$

又 $y\in[1,3]$,即 1,3 是方程 $4y^2-4(2+c)y+8c-b^2=0$ 的根,则

$$2+c=1+3,\ c=2;\text{且}$$

$$\frac{8c-b^2}{4}=1\times 3,\ b=-2(b=2\text{ 舍去}).$$

当 $y=2$ 时,由 * 式,$-2\cdot x+2-2=0$, $b=-2$, $c=2$ 也符合题意.

$\therefore f(x)=\dfrac{2x^2-2x+2}{x^2+1}=2-\dfrac{2x}{x^2+1}$.

(2)易证 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是减函数(请自己写出证明过程).

$\because \left|\left|t-\dfrac{1}{6}\right|-\left|t+\dfrac{1}{6}\right|\right|\leqslant\left|(t-\dfrac{1}{6})-(t+\dfrac{1}{6})\right|=\dfrac{1}{3}$,

$\therefore -\dfrac{1}{3}\leqslant\left|t-\dfrac{1}{6}\right|-\left|t+\dfrac{1}{6}\right|\leqslant\dfrac{1}{3}$,

由 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是减函数,得

$$f\left(\frac{1}{3}\right)\leqslant f\left(\left|t-\frac{1}{6}\right|-\left|t+\frac{1}{6}\right|\right)\leqslant f\left(-\frac{1}{3}\right),\text{且} f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{5}, f\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{13}{5},$$

$\therefore f\left(\left|t-\dfrac{1}{6}\right|-\left|t+\dfrac{1}{6}\right|\right)\in\left[\dfrac{7}{5},\dfrac{13}{5}\right]$.

说明:给出例 7 型函数 $f(x)$ 的值域,逆向探求 $f(x)$ 的解析式的基本思路是:视 y 为已知,先转化成 x 的一元二次方程;再由其 $\triangle\geqslant 0$,得 y 的一元二次不等式;后用 y 的值域的端点值,根与系数关系得解.

(2)题实质是利用函数的单调性来证明不等式.将 $f(x)$ 化成 $2-\dfrac{2x}{x^2+1}$,利于单调性的推证,还可证 $f(x)$ 单调递增区间分别是 $(-\infty,-1]$, $[1,+\infty)$.

2. 妙用函数与其反函数关系解题

函数 $y=f(x)$(定义域为 A,值域为 B)与其反函数 $y=f^{-1}(x)$(定义域为 B,值域为 A)的定义域、值域互反,且对应法则互反,$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称等,为我们分析函数与其反函数关系相关问题的解题思路,提供了有利的条件,奠定了等价转化的基础.

例 8　(1)设函数 $f(x)=\lg(1+x)+\lg(1-x)\left(-\dfrac{1}{2}<x<0\right)$,求 $f^{-1}\left(\lg\dfrac{4}{5}\right)$ 的值;

(2)设函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{4}+x-1(x\geqslant -2)$,求方程 $f(x)=f^{-1}(x)$ 的解集.

分析:(1) 由函数与其反函数的对应法则,得

$\lg(1+x)+\lg(1-x)=\lg\dfrac{4}{5}$,则

$$\begin{cases}1+x>0,\\1-x>0,\\1-x^2=\dfrac{4}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<1,\\x^2=\dfrac{1}{5}\end{cases}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

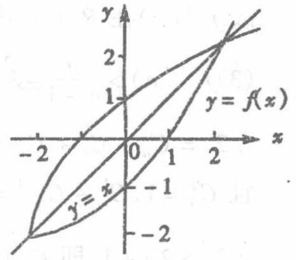

图 1—4

由 $-\frac{1}{2}<x<0$,得 $x=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.即 $f^{-1}\left(\lg\frac{4}{5}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(2) 先画 $y=f(x)=\frac{1}{4}(x+2)^2-2(x\geqslant-2)$的图象,再画 $y=f(x)$关于直线 $y=x$ 的图象,得 $y=f^{-1}(x)$的图象(如图 1—4).由图知,它们的图象有两个交点、且在直线 $y=x$ 上.易求两交点的横坐标为 $-2,2$,

$\therefore f(x)=f^{-1}(x)$的解集为$\{-2,2\}$.

说明:(1)题避开求反函数的运算,等价转成 $\lg\frac{4}{5}=f(x)$直求 x,简捷和谐.当然也可求 $f^{-1}(x)=-\sqrt{1-10^x}$,再求 $f^{-1}\left(\lg\frac{4}{5}\right)$的值.不妨比较解法的优劣.

(2)题根据 $f(x)$的图象易画,再画 $f^{-1}(x)$的图象,数形结合求交点的横坐标.若先求 $f^{-1}(x)=2\sqrt{x+2}-2(x\geqslant2)$,由 $f(x)=f^{-1}(x)$平方,将面临解 x 的四次方程的困难局面.

例 9　设 $f(x)=\log_2\frac{1+x}{1-x}$,$F(x)=\frac{1}{2-x}+f(x)$.

(1) 若 $F(x)$的反函数为 $F^{-1}(x)$,证明方程 $F^{-1}(x)=0$ 有唯一解;

(2) 根据函数单调性定义证明 $f^{-1}(x)$的单调性;

(3) 对任意不小于 3 的自然数 n,证明 $f^{-1}(n)>\frac{n}{n+1}$.

证明:(1)由 $F(0)=\frac{1}{2}$,得 $F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=0$,即 $x=\frac{1}{2}$是方程 $F^{-1}(x)=0$ 的一个根.

假设 $F^{-1}(x)=0$ 还有一个根 $x_0\neq\frac{1}{2}$,则 $F^{-1}(x_0)=0$,根据函数的定义,$F(0)=x_0\neq\frac{1}{2}$是不可能的,故 $F^{-1}(x)=0$ 有唯一解.

(2)由$y=f(x)=\log_2\frac{1+x}{1-x}$的定义域为$(-1,1)$,值域为 R,得

$2^y=\frac{1+x}{1-x}$,$x=\frac{2^y-1}{2^y+1}$,于是

$f^{-1}(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}=1-\frac{2}{2^x+1}(x\in R)$.

设 $x_1,x_2\in R$,且 $x_1<x_2$,则

$f^{-1}(x_2)-f^{-1}(x_1)=\frac{2(2^{x_2}-2^{x_1})}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}$.

$\because 2^{x_1}+1>0,2^{x_2}+1>0,2^{x_2}-2^{x_1}>0$,

$\therefore f^{-1}(x_2)-f^{-1}(x_1)>0,f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2)$,

故 $f^{-1}(x)$在 R 上是增函数.

(3)$f^{-1}(n)>\frac{n}{n+1}\Leftrightarrow\frac{2^n-1}{2^n+1}>\frac{n}{n+1}\Leftrightarrow 2^n>2n+1(n\in N$ 且 $n\geqslant 3)$.

$\because 2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n$.

且 $C_n^0=1,C_n^1+C_n^{n-1}=2n$,则 $n\geqslant 3$ 时,$C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^{n-2}+C_n^n>0$.

$\therefore 2^n>2n+1$,即 $f^{-1}(n)>\frac{n}{n+1}$.

说明:(1)题观察发现 $F(0)$,转化成 $F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=0$ 是解题的关键,反证法是论证 $F^{-1}(x)=0$ 有唯一解的通法.(2)题也可证明 $F(x)$在$(-1,1)$上是增函数.(3)题利用 $2^n=(1+1)^2=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n$ 与放缩法证明 $2^n>2n+1$,流畅简明;还可用数学归纳法论证,从略.

三、函数性质应用的综合性与灵活性

函数性质应用的综合性是指函数的单调性、奇偶性与周期性的有机结合、交错出现,试题呈现上述两种或三种性质的水乳交融的多层次地运用,体现在相关学科和实际应用问题的考查之中.应用的灵活性,一是从性质的形成过程中减弱某个条件,或局部,或逆向提出问题;二是发现并论证某些抽象函数的性质,或应用于抽象函数的性质、求值和证明;三是渗透函数的思想方法,将某些方程、不等式、数列问题,或将解析几何的曲线位置关系、立体几何的面积和体积问题,转化成函数性质的应用问题等,突出问题的发展与变化的情境,构思新的解题途径,提高思维的灵活性.

例 10 (1) 给出函数 $f(x)$和下面四个命题:

①在$(-\infty,0]$上 $f(x)$是减函数;

②在$(0,+\infty)$上 $f(x)$是增函数;

③$f(0)$不是函数的最小值;

④对于 $x\in R$,都有 $f(x)=f(2-x)$.

若其中三个命题正确,请写出一个这样的函数是__________.

(2) 设 $y=f(x)$是定义在 R 上,最小正周期是 5 的函数;又 $f(x)$在$[-1,1]$上是奇函数,在$[0,1]$上是一次函数,在$[1,4]$上是二次函数,且 $x=2$ 时 $f(x)$的最小值是 -5.则 $f(1)+f(4)=$__________,$x\in[1,4]$时,$f(x)=$__________,$x\in[-1,1]$时,$f(x)=$__________.

分析:(1) 命题④即 $f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称.如函数 $f(x)=(x-1)^2$ 在$(-\infty$,

0]上是减函数，$f(0)$不是$f(x)$的最小值（$x=1$时，$f(x)$最小值为0），$x=1$是$f(x)$图象的对称轴.

(2) 由$f(x)$的最小正周期，得$f(4)=f(4-5)=f(-1)$.

又$f(x)$在$[-1,1]$上是奇函数，$f(-1)=-f(1)$，则$f(4)=-f(1)$，$f(1)+f(4)=0$.

由题意，$x\in[1,4]$时，设$f(x)=a(x-2)^2-5(a\neq0)$，则由$f(1)+f(4)=0$得

$a(1-2)^2-5+a(4-2)^2-5=0$.　　解得　$a=2$.

于是，$x\in[1,4]$时，$f(x)=2(x-2)^2-5=2x^2-8x+3$.

易求$f(0)=0$，设$x\in[0,1]$时，$f(x)=kx$. 由$f(1)=2\times1^2-8\times1+3=-3$，可求$k=-3$即$0\leqslant x\leqslant1$时$f(x)=-3x$. $x\in[-1,1]$时，$f(x)$是奇函数，则$f(x)=-3x$.

说明：(1)题是想象满足命题①，③，④的函数图象，得$f(x)$. 一般地，$f(x)=a(x-1)^2+b(a>0,b\in R)$都符合要求.

(2)题利用函数的周期性、奇偶性论证$f(1)+f(4)=0$，后根据待定系数法，分别求$[1,4]$，$[-1,1]$上$f(x)$的解析式，属于推理计算型问题.

例11　设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的奇函数，$f(x+2)=-f(x)$，当$0\leqslant x\leqslant1$时，$f(x)=x$. (1) 求$f(\pi)$的值；

(2) 当$-4\leqslant x\leqslant4$时，求$f(x)$的图象与x轴所围成图形的面积；

(3) 写出$(-\infty,+\infty)$内函数$f(x)$的单调增（或减）区间，$f(x)$的解析式（不必写推导过程）.

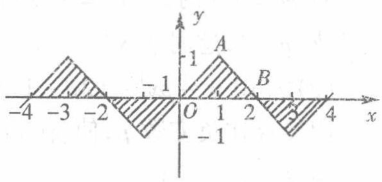

图 1—5

解：(1)由$f(x+2)=-f(x)$，得

$f(x+4)=f[(x+2)+2]=-f(x+2)=f(x)$,

$\therefore f(x)$是以4为周期的周期函数. 于是

$f(\pi)=f(-1\times4+\pi)=f(\pi-4)$

$\quad=-f(4-\pi)=-(4-\pi)=\pi-4$.

(2)由$f(x)$是奇函数与$f(x+2)=-f(x)$，

得$f[(x-1)+2]=-f(x-1)=f[-(x-1)]$，即$f(1+x)=f(1-x)$.

$\therefore$直线$x=1$是函数$y=f(x)$图象的对称轴.

又$0\leqslant x\leqslant1$时，$f(x)=x$，且$f(x)$的图象关于原点中心对称，则$f(x)$的图象如图1—5所示.

设$x\in[-4,4]$时$f(x)$图象与x轴围成图形面积为S，则

$$S=4S_{\triangle OAB}=4\left(\frac{1}{2}\times2\times1\right)=4.$$

(3)函数$f(x)$的单调递增区间为$[4k-1,4k+1](k\in Z)$，单调递减区间为$[4k+1,4k+3](k\in Z)$.

$f(x)=\begin{cases}x-4k(4k-1<x\leqslant 4k+1),\\2+4k-x[4k+1<x\leqslant 4k+3]\end{cases}=1-|x-(4k+1)|(4k-1\leqslant x\leqslant 4k+3,k\in Z)$.

说明：阅读并理解函数符号、概念、性质是解答的前提，(1)题由 $f(x+2)=-f(x)$ 代换判定 $f(x)$ 是周期为 4 的函数，结合条件得解.(2)题推证 $x=1$ 是 $f(x)$ 图象的对称轴，利用(1)的结论和图象可解.(3)题由(1)、(2)由特殊到一般归纳概括解决.

例 12 设幂函数 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}m^2+m+\frac{3}{2}}(m\in Z)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，且在其定义域上是偶函数.

(1) 求 m 的值与相应的 $f(x)$ 的解析式；

(2) 设函数 $g(x)=-pf[f(x)]+(2p-1)f(x)+1$（$f(x)$ 为(1)中函数），是否存在负实数 p，使得 $g(x)$ 在 $(-\infty,-4]$ 上是减函数，且在 $[-4,0)$ 上是增函数.若存在，求出 p 值；若不存在，请说明理由.

解：(1)由 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，得 $-m^2+2m+3>0$，解得 $-1<m<3$.

又 $m\in Z$，则 $m=0,1,2$.

而 $m=0,2$ 时，$f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ 不是偶函数，

故 $m=1$，这时 $f(x)=x^2$.

(2) $g(x)=-px^4+(2p-1)x^2+1$.

假设存在负实数 p，使 $g(x)$ 满足题设条件，设 $x_1<x_2$，则

$g(x_1)-g(x_2)$

$=-px_1^4+(2p-1)x_1^2+1+px_2{}^4-(2p-1)x_2^2-1$

$=(x_2+x_1)(x_2-x_1)[p(x_2{}^2+x_1{}^2)-(2p-1)]$.

若 $-\infty<x_1<x_2\leqslant -4$，则 $x_2+x_1<0$，$x_2-x_1>0$，要使 $g(x)$ 在 $(-\infty,-4]$ 上是减函数，充要条件是 $p(x_2{}^2+x_1{}^2)-(2p-1)<0$ 恒成立. ①

由 $x_1<-4$，$x_2\leqslant -4$，得 $x_2^2+x_1^2>32$.又 $p<0$，$p(x_2^2+x_1^2)<32p$.

根据①，得 $32p\leqslant 2p-1$，$p\leqslant -\frac{1}{30}$. ②

若 $-4<x_1<x_2<0$，同理，要使 $g(x)$ 在 $(-4,0)$ 上是增函数，充要条件是 $32p\geqslant 2p-1$，即 $p\geqslant -\frac{1}{30}$. ③

综合②③，得存在实数 $p=-\frac{1}{30}$，使函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,-4]$ 是减函数，在 $(-4,0)$ 上是增函数.

说明：(1)题是在逐条讨论，寻求 m 的取值范围，最后判定 $m=1$，$f(x)=x^2$.(2)题中，由 $p(x_1{}^2+x_2{}^2)<32p$，$p(x_2{}^2+x_1{}^2)<2p-1$ 推出 $32p\leqslant 2p-1$ 的原理应当理解，再用“夹逼法”求得 p.另外，利用复合函数解(2)题更加简练明快，设 $u=x^2$，则 $u=x^2$ 在

$(-\infty,-4]$，$(-4,0)$上都是减函数；且 $g(u)=-pu^2+(2p-1)u+1$ 在$(0,16)$上递增，在$[16,+\infty)$上递减，可得$\frac{2p-1}{2p}=16$，故 $p=-\frac{1}{30}$.

2. 强化函数性质形成过程的探究

函数性质的形成过程是指函数的单调性、奇偶性、周期性的有关定义的引入、归纳、辨析的实践，既要逐词逐句理解，熟悉其判定和应用的功能，更要掌握论证函数具有某个性质的常用方法，还要体现探索精神，设问更具有开放性.

例 13　设实数 α,β 满足等式$\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha=1$，$\beta^3-3\beta^2+5\beta=5$.

试求 $\alpha+\beta$ 的值.

分析：由 α,β 满足的等式特征，设

$f(x)=x^3-3x^2+5x=(x-1)^3+2(x-1)+3(x\in R)$，则 $f(\alpha)=1$，$f(\beta)=5$.

为利用奇函数性质，设 $g(u)=u^3+2u(u=x-1,u\in R)$，则 $g(x-1)=f(x)-3$，且

$g(\alpha-1)=f(\alpha)-3=1-3=-2$，

$g(\beta-1)=f(\beta)-3=5-3=2$.

易证 $g(u)$是 R 上的奇函数，再证 $g(u)$是 R 上的增函数：

设 $-\infty<u_1<u_2<+\infty$，则

$$\begin{aligned}g(u_1)-g(u_2)&=({u_1}^3+2u_1)-({u_2}^3+2u_2)=({u_1}^3-{u_2}^3)+2(u_1-u_2)\\&=(u_1-u_2)\cdot({u_1}^2+{u_2}^2+u_1u_2+2).\end{aligned}$$

由 $u_1-u_2<0$，$u_1^2+u_2^2+u_1u_2+2=(u_1+\frac{u_2}{2})^2+\frac{3}{4}{u_2}^2+2>0$，得 $g(u_1)<g(u_2)$，$g(u)$是 R 上的增函数.

$\because g(\alpha-1)=-g(\beta-1)=g(1-\beta)=-2$.

$\therefore$根据函数对应法则与 $g(u)$的单调性知 $\alpha-1=1-\beta$，

$\alpha+\beta=2$.

说明：观察和分析某些含有未知数的等式的结构特征，具有函数的奇偶性和单调性的形成过程的潜在要素，要想直接求这些未知数的值又有困难时，可以构造新函数利用其性质灵活求值.

3. 关注抽象函数的性质及其应用

抽象函数是指那些没有给出解析式的函数，这类函数的定义域与题设条件往往蕴含着解题思路，既可进行变量的等价代换，又可采用特殊值或变量分化法，创造条件，使问题得解，是训练与提高逻辑思维及代数推理能力的素材.

例 14 设函数 $f(x)$ 的定义域 M 关于原点对称，对任意 $x\in M$，存在 $x_1,x_2\in M$，使 $x=x_1-x_2$，且满足：① $f(x_1-x_2)=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{1+f(x_1)f(x_2)}$；②当 $0<x<2a$ 时，$f(x)>0$；③ $f(a)=1$（正常数 $a\in M$）.

(1) 判定 $f(x)$ 在 M 上的奇偶性并予证明；

(2) 判定 $f(x)$ 在 $(0,2a)$ 上单调性并予证明；

(3) 若 $x\in M$ 时，$f(x+ka)=f(x)$ 恒成立，试确定最小自然数 k 的值.

解：(1) $\because f(x)=f(x_1-x_2)=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{1+f(x_1)f(x_2)}$

$$=-\frac{f(x_2)-f(x_1)}{1+f(x_1)f(x_2)}=-f(x_2-x_1)=-f(-x),$$

$\therefore f(x)$ 是奇函数.

(2)设 $0<x_1<x_2<2a$，则 $0<x_2-x_1<2a$.

由条件②，$f(x_1)>0,f(x_2)>0,f(x_2-x_1)>0$. 据(1)，得 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1)\cdot[1+f(x_1)f(x_2)]>0$，$f(x_1)<f(x_2)$，故 $f(x)$ 在 $(0,2a)$ 上是增函数.

(3)由 $f(x+a)=f[x-(-a)]$

$$=\frac{f(x)-f(-a)}{1+f(x)f(-a)}=\frac{f(x)+f(a)}{1-f(x)f(a)}=\frac{1+f(x)}{1-f(x)},$$

$$f(x+2a)=f[(x+a)+a]=\frac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)}$$

$$=\frac{1+\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}=-\frac{1}{f(x)},\quad \text{即 } f(x)=-\frac{1}{f(x+2a)}.$$

$$\therefore f(x+4a)=f[(x+2a)+2a]=-\frac{1}{f(x+2a)}=f(x),$$

故所求最小自然数 $k=4$.

说明：(1)，(2)题都是依据函数的奇偶性，单调性定义，对条件①的等式等价变形，凑向求证的目标，转换得证.

(3)题逆向思考，$f(x+4a)$ 以 $f(x+2a)$ 为基础，$f(x+2a)$ 又以 $f(x+a)$ 为基础，充分利用 $f(a)=1$，$f(x)$ 是奇函数等成为变换的重点知识.

例 15 定义在 $(-1,1)$ 内的函数 $f(x)$ 满足：

①对任意 $x_1,x_2\in(-1,1)$，都有 $f(x_1)+f(x_2)=f\left(\dfrac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right)$；

②当 $x\in(-1,0)$ 时，$f(x)>0$.

(1) 判定 $f(x)$ 的奇偶性，单调性，并予以证明；