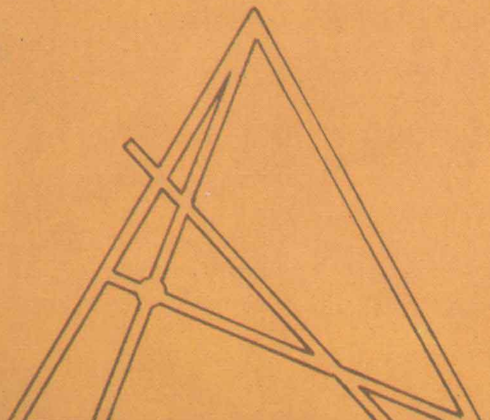
梅涅劳斯定理
Menelaus
与塞瓦定理
Ceva

◉刘 毅 编著



长春出版社

梅涅劳斯定理和塞瓦定理

刘 毅 编著

长 春 出 版 社

(吉)新登字10号

书　　名｜梅涅劳斯定理和塞瓦定理
作　　者｜刘　毅　编著
责任编辑｜赵雨鹤
封面设计｜思　冬
出　　版｜长春出版社(长春市建设街43号)
发　　行｜长春出版社
印　　刷｜长春市人民印刷材料厂
开　　本｜787×1092　　1/32
印　　张｜6.625
字　　数｜140 000
印　　数｜1—1 000册
版　　次｜1997年10月第1版
印　　次｜1997年10月第1次印刷
书　　号｜ISBN 7—80604—341—1/O·2
定　　价｜9.00元

前　　言

梅涅劳斯定理和塞瓦定理是初等数学著名定理中应用极其广泛而又颇具数学魅力的两个定理．本书阐述这两个定理的内容、应用及推广，并努力使它们所蕴含的对称、统一、简单等数学美得以展现．

目前，这两个定理列居我国高中数学竞赛大纲平面几何重要定理的前两位．1996 年全国初中数学联赛、全国高中数学联赛、中国数学奥林匹克集训队选拔赛中各有一道平面几何试题，用这两个定理都可给出较简捷的证明．梅涅劳斯定理和塞瓦定理丰富和优化了竞赛几何试题的解法．本书通过对近年来大量国内外竞赛试题的分析，着重介绍应用这两个定理解题的方法、特点和技巧，会对各级数学竞赛选手有所裨益．

应用这两个定理可以证明初等几何中的许多著名定理，本书特别用它们证明了射影几何中大多数重要而有名的定理．此外，还应用正三角形中的塞瓦点和梅涅劳斯线构作了射影几何中的配极变换．这些尝试意在引起比较熟悉初等几何的中学数学教师的兴趣．

本书还介绍了这两个定理在诸如空间多边形、四面体、三面角，以及以面积比形式、交比形式等多方面的推广，其

中大多是近年来我国初等数学关于这两个定理研究的新成果．借助它们来说明在学习数学定理时，还应该通过类比、联想、猜测、检验等去发现和探索新结论，作出有意义的推广，以期激发读者的创新意识和创新精神．

本书各章节之间没有绝对的依赖关系，不同的读者可根据自己的需要选读有关部分．数学竞赛选手、数学爱好者、师范院校数学专业学生和中学数学教师都可以从中找到自己感兴趣的内容．

我要特别感谢我的挚友刘士君，在本书的编写和出版过程中对我的鼓励和帮助．

限于水平，书中难免出现缺点和错误，敬请批评指正．

作　者

1997 年 8 月

目　　录

第一章　梅涅劳斯定理和塞瓦定理

本章叙述梅涅劳斯定理和塞瓦定理、它们的逆定理及其角元形式的内容、证明，并且从对称性，统一性等方面说明这两个定理的数学美的含义.

§1.1　给人以对称美感的两个定理

下面两个定理是平面几何中的两个著名定理.

梅涅劳斯定理　设 A′，B′，C′分别是 △ABC 的三边 BC，CA，AB 或其延长线上的点，若 A′，B′，C′三点共线，则

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=-1.$$

塞瓦定理　设 A′，B′，C′分别是 △ABC 的三边 BC，CA，AB 或其延长线上的点，若 AA′，BB′，CC′三线共点，则

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1.$$

从叙述上看，这两个定理与一般平面几何定理相比的独特之处，首先是它们都不得不使用有向线段，即 △ABC 的三边 BC，CA，AB 看成是顺次首尾相接的三条有向线段，它们分别被分点 A′，B′，C′分成分比$\frac{BA'}{A'C}$，$\frac{CB'}{B'A}$，$\frac{AC'}{C'B}$（这里，

有向线段 BA′，A′C，CB′，B′A，AC′，C′B 顺次首尾相接恰好环绕 ΔABC 一周)；其次是定理的结论不是通常的线段相等，或线段比相等，而是这三个分比的连乘积

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=-1 与 \frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1.$$

其中所蕴含着的字母 A，B，C 的对称性，以及这两个结论之间在形式上的对称耐人寻味，给人以美感.

这两个定理都可以简单地加以证明.

梅涅劳斯定理的证明

如图 1.1，作直线 AX//C′A′，交 BC 延长线于 X，则有

$$\frac{CB'}{B'A}=\frac{CA'}{A'X},\quad \frac{AC'}{C'B}=\frac{XA'}{A'B},$$ 所以 $$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CA'}{A'X}\cdot\frac{XA'}{A'B}=-1.$$

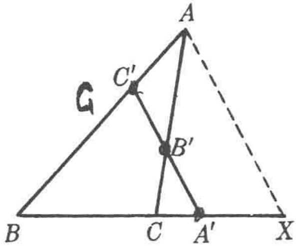


图 1.1

塞瓦定理的证明 如图 1.2，过 A 作 BC 的平行线，分别交 BB′，CC′延长线于点 D，E，则 $\frac{CB'}{B'A}=\frac{BC}{AD}$，$\frac{AC'}{C'B}=\frac{EA}{BC}$，

又因为 $\frac{BA'}{AD}=\frac{A'O}{OA}=\frac{A'C}{EA}$，所以 $\frac{BA'}{A'C}=\frac{AD}{EA}$. 从而

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=\frac{AD}{EA}\cdot\frac{BC}{AD}\cdot\frac{EA}{BC}=1.$$

在本书中，梅涅劳斯定理中的 ΔABC 称为**梅涅劳斯三角形**，点 A′，B′，C′分别称为 BC，CA，AB 边上的**梅涅劳斯**

点，经过三个梅涅劳斯点的直线称为**梅涅劳斯线**或**截线**，结论等式称为**梅涅劳斯等式**；类似地，塞瓦定理中的 $\triangle ABC$ 称为**塞瓦三角形**，直线 AA'，BB'，CC'分别称为通过顶点 A，B，C 的**塞瓦线**，三条塞瓦线的公共点称为**塞瓦点**，结论等式称为**塞瓦等式**.

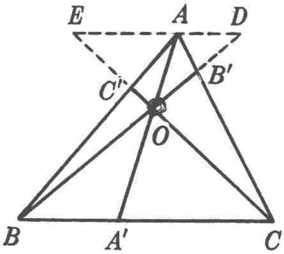


图 1.2

梅涅劳斯定理的逆定理也成立，即

设 A'，B'，C'分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC，CA，AB 或其延长线上的点，若

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=-1,$$

则 A'，B'，C'三点共线.

证 设直线 $A'B'$交 AB 于 C_1，则由梅涅劳斯定理得 $\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=-1$.

由已知 $\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=-1$.

由两式得 $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC'}{C'B}$.

由比例性质得 $\frac{AC_1}{AB}=\frac{AC'}{AB}$，所以 $AC_1=AC'$.

故知 C_1 与 C'重合，即 A'，B'，C'三点共线.

下面定理称为**塞瓦定理的逆定理**：

设 A′，B′，C′分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC，CA，AB 或其延长线上的点，若

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1,$$

则 AA′，BB′，CC′三线共点或三线平行.

证 若 AA′与 BB′交于点 O，设 CO 与 AB 的交点为 C_1，则用类似于梅涅劳斯逆定理的证明方法可以证明，AA′，BB′，CC′三线共点.

若 AA′∥BB′（如图 1.3），则

$$\frac{CB'}{B'A}=\frac{CB}{BA'}.$$

代入已知条件得

$$\frac{AC'}{C'B}=\frac{A'C}{CB}.$$

表明 CC′∥AA′∥BB′.

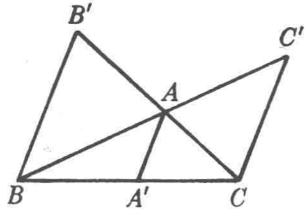


图 1.3

一些书刊中也把梅涅劳斯定理及其逆定理统称为梅涅劳斯定理，并将其叙述为“设 A′，B′，C′分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC，CA，AB 或其延长线上的点，则 A′，B′，C′三点共线的充要条件是$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=-1$”. 类似地也把塞瓦定理及其逆定理统称为塞瓦定理，并将其叙述为“设 A′，B′，C′分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC，CA，AB 或其延长线上的点，则 AA′，BB′，CC′三线共点的充要条件是$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1$”

梅涅劳斯定理和塞瓦定理还可以用如下的角元形式加以叙述.

角元形式的梅涅劳斯定理 设 A′，B′，C′分别是 $\triangle ABC$

的三边 BC，CA，AB 所在直线上的点，则 A′，B′，C′共线的充要条件是

$$\frac{\sin BAA'}{\sin A'AC}\cdot\frac{\sin CBB'}{\sin B'BA}\cdot\frac{\sin ACC'}{\sin C'CB}=-1.$$

其中，角为有向角（规定∠POQ 的方向是从始边 OP 转向终边 OQ 的，并且将 sin∠POQ 简记为 sinPOQ）.

证 设 ΔABC 的边 BC，CA，AB 的长分别为 a，b，c，则

$$\frac{BA'}{A'C}=\frac{S_{\Delta ABA'}}{S_{\Delta AA'C}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}c\cdot AA'\cdot \sin BAA'}{\frac{1}{2}\cdot AA'\cdot b\cdot \sin A'AC}$$

$$=\frac{c}{b}\cdot\frac{\sin BAA'}{\sin A'AC}.$$

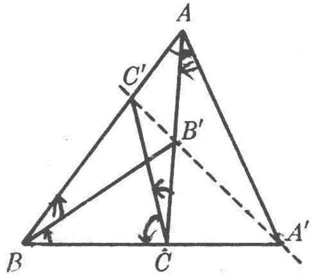


图 1.4

这里，我们保持有向线段 BA′，A′C 的同向与否，和有向角∠BAA′，∠A′AC 的同向与否（图 1.4 中均为反向）的一致，从而保持$\frac{BA'}{A'C}$与$\frac{\sin BAA'}{\sin A'AC}$的符号的一致.

同理$\frac{CB'}{B'A}=\frac{a}{c}\cdot\frac{\sin CBB'}{\sin B'BA}$，$\frac{AC'}{C'B}=\frac{b}{a}\cdot\frac{\sin ACC'}{\sin C'CB}$.

三式相乘化简得

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=\frac{\sin BAA'}{\sin A'AC}\cdot\frac{\sin CBB'}{\sin B'BA}\cdot\frac{\sin ACC'}{\sin C'CB}.$$

由梅涅劳斯定理及其逆定理知，定理成立.

类似可证

角元形式的塞瓦定理 设 A′，B′，C′分别是 ΔABC 的三边 BC，CA，AB 所在直线上的点，则三直线 AA′，BB′，CC′共点的充要条件是

$$\frac{\sin BAA'}{\sin A'AC}\cdot\frac{\sin CBB'}{\sin B'BA}\cdot\frac{\sin ACC'}{\sin C'CB}=1.$$

在应用上，为了找角的方便，也将上述角元形式的梅涅劳斯等式与塞瓦等式写成

$$\frac{\sin BAA'}{\sin A'AC}\cdot\frac{\sin ACC'}{\sin C'CB}\cdot\frac{\sin CBB'}{\sin B'BA}=-1$$

与
$$\frac{\sin BAA'}{\sin A'AC}\cdot\frac{\sin ACC'}{\sin C'CB}\cdot\frac{\sin CBB'}{\sin B'BA}=1.$$

§1.2 被爱因斯坦所称赞的优雅的证明

伟大的物理学家爱因斯坦在与友人沃特莫（著名的心理学家）的通信中，曾讨论过数学教育中的一个重要问题：怎样的数学证明才是好的证明．在爱因斯坦的第一封信中，他以梅涅劳斯定理的两种证明方法为例，说明什么样的数学证明是好的证明．

证法 1，即在§1.1 中给出的证明．

证法 2 利用有一个角相等或互补的两个三角形面积之比等于该角两边的乘积之比，考察截线截出的三角形：$\Delta AB'C'$，$\Delta BC'A'$，$\Delta CA'B'$（如图 1.5），可得

$$\frac{S_{\Delta AB'C'}}{S_{\Delta BC'A'}}=\frac{B'C'\cdot C'A}{BC'\cdot C'A'}.$$

将这等式字母轮换，得到另两等式，然后将三个等式相乘，即得定理结论．

说明：这里表示面积比的线段实际上代表线段的长，因此所证得的是：三个分比的乘积的绝对值等于1．而定理结论中的负号可认为是由图形直接确定的．

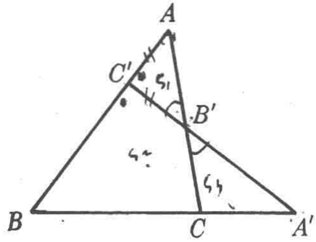


图 1.5

爱因斯坦把证法1叫做“丑陋的证明”，认为该证明“虽然简单”却有两个明显的缺点：“使用了一条辅助线……与要证命题并无关系”，“无理由地偏爱顶点A，而命题却是关于A，B，C对称的”．他把证法2称为“优雅的证明”，因为“证明是对称的，并且可直接从图形上看出”．他在第三封信中还谈到“即使那个较好的证明，也依然有些东西不太自然……，我相信每一个证明的背后总会留下某些不自然之处．”

爱因斯坦称赞证法2为优雅的证明，表现了他对数学中对称美的追求：命题是对称的，如果证明也是对称的，才能触及问题的实质，才更给人以美感！或许正是这种追求，使他利用几何上的对称简化思维，利用变量符号或脚标的对称性简化计算，才导致他的“相对论”的产生．

爱因斯坦对梅涅劳斯定理两种证法的评价实际提出了评价数学证明的原则：证明具有对称性的命题以对称性的方法为好；证明思路越自然、越直观越好；证明越简单越好．

爱因斯坦评价梅涅劳斯定理两种证法优劣时，主要用的是对称性原则，当然正如人们所指出的那样，爱因斯坦对证法1的评价有些偏颇，其实证法1也许并不象初看时那样

"丑陋". 事实上证法 1 中过 A 作 AX∥A′C′有它自己的对称性背景：它可以看作是将 △ABC 的各顶点 A，B，C 分别沿截线方向向直线 BC 作平行射影. 在这个平行射影下，点 A 经平行线 AX 变为直线 BC 上的点 X，而点 B，C 仍变为其自身（图 1.6），从而把 △ABC 各边（环绕三角形一周的三条有向线段）的分比转化为在直线 BC 上的退化三角形 XBC 的各边 BC，CX，XB（沿线段 BX 往返一个来回的三条有向线段）的分比，这个证明过程是对称的，并且保持了分比的符号，其间没有对顶点 A 偏爱，而且思路也较自然、直观.

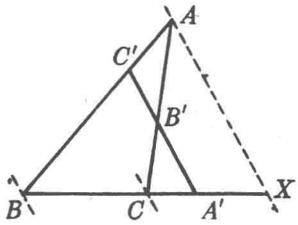


图 1.6

对于塞瓦定理，我们也容易利用面积给出一个对称性的证明：

如图 1.7，由 △OAB 和 △OCA 有公共底边 OA，而这两个三角形 OA 上的高之比为 BA′：A′C，

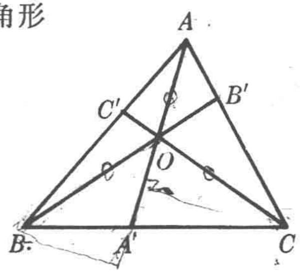


图 1.7

所以$\dfrac{BA'}{A'C}=\dfrac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle OCA}}$.

同理$\dfrac{CB'}{B'A}=\dfrac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle OAB}}$,

$\dfrac{AC'}{C'B}=\dfrac{S_{\triangle OCA}}{S_{\triangle OBC}}$.

三式相乘，化简得

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1.$$

§1.3 保持定理的统一性

在前两节里，我们谈到了两个定理不仅在表述上是对称的，而且还都可以给出简单的对称性的证明，这一节里我们将谈及如何保持定理的统一性.

我们来指出在§1.1中这两个定理在叙述上的不足. 塞瓦定理逆定理的结论“三线共点或三线平行”与塞瓦定理的条件“三线共点”是不一致的，这种不一致也给定理的应用带来了不便. 另一方面，从直观上看三线平行是三线共点的极端情形，两者是否可以得到统一？另外，梅涅劳斯定理中的截线不包含平行于边的截线在内，所以定理中的截线不是普遍的. 梅涅劳斯定理中的截线是斜截线，而平行截线定理“平行于三角形一边的直线截三角形其它两边所得的对应线段成比例”中的截线是斜截线的极端情形，它们是否可以得到统一？

为了消除上述的不足，以保持定理的统一性，我们作出如下的约定：

约定1 每条直线上还有唯一的无穷远点，一组平行线相交于同一的无穷远点.

约定2 不同组的平行直线相交于不同的无穷远点，并且平面内所有的无穷远点构成一条无穷远直线.

这里的两个约定与射影几何中为使平面内两直线间的中心射影成为一一对应而作出的约定是完全一样的.

约定 1 表明：当直线上的动点沿直线无限远离时存在唯一的极限位置——该直线上的无穷远点．与此同时，通过直线外一点与直线上动点的连线也存在唯一的极限位置——该点与该直线上无穷远点的连线，亦即过该点而与该直线平行的直线．

无穷远点可记为 P_{∞}，平面内原有的点称为有穷远点．直线上的有穷远点与其上的无穷远点之间的关系很象实数与在实数的极限理论中所引入的无穷大 ∞ 之间的关系．借助于极限理论，不难得出无穷远点的如下的性质：

设 M，N 是同一直线 l（或分别在平行直线 l 与 l′）上的两个有穷远点，L_{∞} 是 l 上的（或 l 与 l′上的）无穷远点，则有

$$\frac{ML_{\infty}}{NL_{\infty}}=1.$$

在上述约定下，塞瓦定理逆定理结论中的“三线平行”可以看作是有公共的无穷远点的三条直线，即三直线共无穷远点，于是塞瓦定理的结论可以统一叙述为“三线共点”；同时塞瓦定理的条件“三线共点”也可包含三线共同一的无穷远点，即三线平行的情形，这不仅使定理的叙述变得十分简明，而且也保持了这两个互逆定理在条件和结论上的和谐与统一．

平行截线定理原可叙述为“在 $\triangle ABC$ 中，$C'B' /\!/ BC$ 且 $C'B'$ 与 AB，AC 分别交于点 C'，B'，则有 $\dfrac{AC'}{C'B}=\dfrac{AB'}{B'C}$”．如今，一方面由约定 1，定理的条件 $C'B' /\!/ BC$ 表明 $C'B'$ 与 BC 相交于同一个无穷远点 A'_{∞}（图 1.8）；另一方面由无穷远点的性