全面突破考研数学

2014 人大考研

2014年

考研数学辅导讲义精编

主编/李恒沛　郝志峰　高文森

- 考研命题人亲编，完全符合考试大纲
- 全书分为三部分，每章分“内容提要”（含考试内容、考试重点及考试题型）和“例题选析”（着重于基本概念、基本理论的理解，基本方法的掌握以及综合应用）
- 三位编者都曾多年参加考研命题，参与《考试大纲》的制订，熟知考研数学重点与难点

中国人民大学出版社

2014年考研数学

辅导讲义精编

主　编（按姓氏笔画）

李恒沛　郝志峰　高文森

中国人民大学出版社

·北京·

图书在版编目（CIP）数据

2014年考研数学辅导讲义精编/李恒沛，郝志峰，高文森主编. —2版.—北京：中国人民大学出版社，2013.7

ISBN 978-7-300-17792-2

Ⅰ.①2… Ⅱ.①李… ②郝… ③高… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第155607号

2014年考研数学辅导讲义精编

主编 李恒沛 郝志峰 高文森

2014 Nian Kaoyan Shuxue Fudao Jiangyi Jingbian

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.1kao.com.cn（中国1考网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京七色印务有限公司	**版　　次**	2012年7月第1版
规　　格	185 mm×260 mm　16开本		2013年7月第2版
印　　张	23.5	**印　　次**	2013年7月第1次印刷
字　　数	535 000	**定　　价**	45.00元

前　　言

本书是由北京航空航天大学李恒沛教授、吉林大学高文森教授、广东工业大学郝志峰教授分别在“报考硕士研究生辅导班”上的讲稿经加工整理而成的。

全书包括“高等数学”、“线性代数”、“概率论与数理统计”三部分内容，其中每部分内容的编排顺序和现行《考试大纲》（教育部考试中心颁发）完全一致。每章又分“内容提要”（含考试内容、考试重点及考试题型）和“例题选析”（例题着重于基本概念、基本理论的理解，基本方法的掌握以及综合应用。）

本书三位编者都曾为教育部考试中心考研数学命题组成员，参与《考试大纲》的制订，并参加多年的命题工作，熟知考研数学的命题要求，深谙考研数学内容的重点与难点，在考研辅导与阅卷的过程中积累了丰富的经验，这些必将在本书编写中有所体现。编者愿本书的出版对考研学子大有裨益。

本书在编辑、出版过程中，得到有关编辑的大力支持和帮助，在此表示感谢。

愿考生们乘着考研的航船，一路通畅，驶向欲达的彼岸。

编者

2013.5

读考研书　找人大社

一、2014 人大社考研英语类图书

书　　　名	作者	开本	定/估价	计划出版时间
研究生入学考试复试英语口试全书	任林静	16K	39.00	2012.12
考研英语新教程	张锦芯	16K	59.00	2013.1
考研英语模拟考场	张锦芯	16K	39.00	2013.9
历年考研英语真题名家详解	张锦芯	16K	46.00	2013.3
考研英语阅读理解技巧进阶	白洁	16K	39.00	2013.3
考研英语历年真题全新解读	白洁	16K	45.00	2013.2
考研英语模拟考场（英语二）	白洁	16K	22.00	2013.8
考研英语词汇活学活用巧链记	白洁	32K	26.00	2013.1
考研英语阅读理解高分强化训练 100 篇	白洁	16K	49.00	2013.3
考研英语阅读 200 篇	郭庆民	16K	69.00	2013.1
考研英语阅读 100 篇（英语二）	郭庆民	16K	49.00	2013.1
考研英语词汇复习指南	谢振元	16K	56.00	2012.12
考研英语高分词汇精记速记	谢振元	32K	48.00	2012.12
考研英语阅读完形翻译全突破	赵小冬　袁秉政	16K	49.00	2012.12
考研英语短文写作及英汉翻译	刘鸿飞　孙艺之	16K	46.00	2012.12
考研英语大纲词汇分类精读笔记	蒋军虎	16K	49.00	2012.12
考研英语大纲核心词汇必备	王建华	16K	26.00	2013.1
2004—2013 十年考研英语真题详解	王建华	16K	26.00	2013.1
考研英语经典专项阅读 120 篇	王建华	16K	56.00	2013.1
考研英语写作经典范文 100 篇	王建华	16K	28.00	2013.6

二、2014 人大社考研政治类图书

书　　　名	作者	开本	定/估价	计划出版时间
考研政治理论复习导本	李淮春	16K	66.00	2012.12
最新考研政治真题命题研究与高分策略	余学本　郭务本　肖秀荣	16K	42.00	2013.4
硕士研究生入学考试思想政治理论课复习指导	余学本等	16K	52.00	2013.1
考研政治 1000 客观题突破 200 核心考点	阳光考研命题研究中心	16K	29.00	2012.12
考研政治真题解析与预测考点背诵	阳光考研命题研究中心	16K	59.00	2013.2
考研政治高分练习题库	阳光考研命题研究中心	16K	52.00	2012.12
考研政治核心考点解析	阳光考研命题研究中心	16K	42.00	2013.2
考研政治 2000 精准金题	阳光考研命题研究中心	16K	46.00	2012.12
考研政治精选实用教程	李海洋	16K	59.00	2013.1
考研政治历年真题精析	李海洋	16K	46.00	2013.2
考研政治考点同步 1600 题	李海洋	16K	48.00	2013.3
考研政治冲刺考点精华	李海洋	16K	19.00	2013.9
考研政治形势与政策解读及命题热点	李海洋	16K	12.00	2013.9
考研政治全真模拟 4 套卷	李海洋	16K	12.00	2013.9

书　　　名	作者	开本	定/估价	计划出版时间
考研政治大纲要点 5 天速记	李海洋	16K	12.00	2013.9
考研政治百天辅导教程	芦欣	16K	56.00	2013.1
考研政治多项选择题强化特训 800 题	芦欣	32K	36.00	2013.7
考研政治十年真题专项超精解	芦欣	16K	22.00	2013.2
考研政治分析题黄金模板 23 例	芦欣	32K	12.00	2013.9
考研政治冲刺必背 36 计	芦欣	32K	12.00	2013.9
考研政治冲刺必备六韬三略——六大密押专题与终极预测 3 套卷	芦欣	32K	20.00	2013.9
考研政治形势与政策核心预测 50 点	芦欣	32K	20.00	2013.9
考研政治精准预测 900 题	蔡桂娟	16K	22.00	2013.4
考研政治高分解题技巧	蔡桂娟	16K	28.00	2013.3
考研政治速背 15 天	蔡桂娟	32K	12.00	2013.9
考研政英数三科终极 20 题	蔡桂娟 张培 姜晓千	16K	12.00	2013.11
考研政治专题经典教程	蔡桂娟	16K	42.00	2013.3
考研政治 20 年真题大讲评	蔡桂娟	16K	45.00	2013.3
考研政治形势与政策聚焦及热点剖析	蔡桂娟	32K	12.00	2013.11

三、2014 人大社考研数学类图书

书　　　名	作者	开本	定/估价	计划出版时间
考研历届数学真题题型解析（数学一）	黄先开　曹显兵	16K	56.00	2013.3
考研历届数学真题题型解析（数学二）	黄先开　曹显兵	16K	42.00	2013.3
考研历届数学真题题型解析（数学三）	黄先开　曹显兵	16K	48.00	2013.3
考研数学高分复习全书（数学一、二）	黄先开　曹显兵	16K	69.00	2013.1
考研数学高分复习全书（数学三）	黄先开　曹显兵	16K	68.00	2013.1
考研数学最新精选 600 题（经济类）	黄先开　曹显兵	16K	36.00	2013.3
考研数学最新精选 600 题（理工类）	黄先开　曹显兵	16K	42.00	2013.3
考研数学经典冲刺 5 套卷（数学一）	黄先开　曹显兵	16K	12.00	2013.9
考研数学经典冲刺 5 套卷（数学二）	黄先开　曹显兵	16K	12.00	2013.9
考研数学经典冲刺 5 套卷（数学三）	黄先开　曹显兵	16K	12.00	2013.9
考研数学新编考试参考书	李恒沛	16K	69.00	2013.4
历年考研数学真题名家解析与指导	李恒沛	16K	46.00	2013.4
2014 年考研数学辅导讲义精编	李恒沛	16K	45.00	2013.7
考研数学新编考试参考书（经济类）	严守权	16K	52.00	2013.4

四、2014 人大社考研专业课类图书

书　　　名	作者	开本	定/估价	计划出版时间
考研教育学命题思路及名校真题详解	翔高教育考研命题研究中心	16K	48.00	已出
考研心理学命题思路及名校真题详解	翔高教育考研命题研究中心	16K	59.00	已出

书　　名	作者	开本	定/估价	计划出版时间
考研计算机命题思路及名校真题详解	翔高教育考研命题研究中心	16K	48.00	已出
考研管理学命题思路及名校真题详解	翔高教育考研命题研究中心	16K	36.00	已出
考研法学命题思路及名校真题详解	翔高教育考研命题研究中心	16K	39.00	已出
考研新闻学命题思路及名校真题详解	翔高教育考研命题研究中心	16K	68.00	已出
考研俄语指南	钱晓蕙	16K	78.00	2013.6
考研日语指南	易友人	16K	58.00	2013.6
考研西医综合科目辅导讲义	于吉人	16K	88.00	2013.6

五、2014 人大社法硕（1 月份考试）图书

书　　名	作者	开本	定/估价	计划出版时间
全国法律硕士专业学位研究生入学联考考试指南（第十四版）	全国法硕指导委员会	16K	119.00	2013.9
2014 年法律硕士联考历年试题汇编	编写组	16K	56.00	2013.9
2014 年法律硕士联考考试大纲配套练习	朱力宇等	16K	76.00	2013.9
2014 年法律硕士联考标准化题库	白文桥等	16K	76.00	2013.3
2014 年法律硕士联考重要知识点深度解析及模拟试卷	法硕联考命题研究组	16K	88.00	2013.9
2014 年法律硕士联考五年真题归类详解及知识清单	北京万国学校	16K	39.00	2013.5
2014 年法律硕士联考重要法条释解	朱力宇等	16K	42.00	2013.5
2014 年法律硕士联考最新试题分析及考点解析	白文桥等	16K	42.00	2013.5
2014 年法律硕士联考专业基础课必备经典案例分析	刘守芬等	16K	39.00	2013.3
2014 年法律硕士联考模拟试卷	朱力宇等	16K	66.00	2013.10
2014 年法律硕士联考大串讲	朱力宇等	16K	62.00	2013.10
2014 年法律硕士联考考前最后 5 套题	刘守芬等	16K	29.00	2013.11
2014 年法律硕士联考考点集锦	白文桥	16K	42.00	2013.10
2014 年法律硕士联考专题讲座	郭志京	16K	86.00	2013.6
2014 年法律硕士（法学）联考大纲要点解析及应试策略	白文桥	16K	58.00	2013.4
2014 年法律硕士（法学）联考大纲配套练习	白文桥	16K	68.00	2013.4

中国 1 考网：www. 1kao. com. cn　　　　咨 询 电 话：(010) 62515978
咨 询 信 箱：lity@crup. com. cn
读者服务部：(010) 62514148　62516566（人大院内）
邮 购 电 话：(010) 82501766

目　录

第Ⅰ篇　高等数学

第Ⅱ篇　线性代数

第Ⅲ篇　概率论与数理统计

第Ⅰ篇

高等数学

高等数学是全国硕士研究生入学统一考试数学一、数学二、数学三的考试内容。其中数学一、三的卷面分值约占满分150分的56%，而数学二的卷面分值约占满分150分的78%。

第一章

函数、极限、连续

一、内容提要

考试内容

①函数、极限与连续的概念；②函数的有界性、单调性、奇偶性与周期性；③函数的表示法、复合函数、反函数、分段函数和隐函数；④基本初等函数的性质及其图形；⑤初等函数及简单应用问题的函数关系的建立；⑥数列与函数极限的性质，函数的左、右极限；⑦无穷小与无穷大，无穷小的性质及无穷小的比较；⑧极限的四则运算；⑨极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则，两个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$；⑩函数间断点的类型；⑪初等函数的连续性；⑫闭区间上连续函数的性质（最大值、最小值定理和介值定理）.

考试重点

①函数、极限（含左极限与右极限）、连续（含左连续与右连续）的概念及性质；②函数间断点类型的判断；③函数的表示方法（变量替换转换表达形式）；④求极限的方法（常见的几种）.

考试题型

①函数的表示；②分段函数的复合；③简单反函数的定义域及其表示；④运用极限的定义，极限存在准则，两个重要极限，等价无穷小，L'Hospital 法则，导数定义，定积分定义，级数收敛的必要条件等求极限的方法；⑤考查函数在一点极限存在及连续性的充要条件，判断函数间断点及其类型；⑥进行无穷小的比较；⑦判断函数的性质（有界性、单调性、周期性、奇偶性）；⑧运用闭区间上连续函数的性质证明一些命题.

根据以往统计，试题的难度值（通过率）大体在 0.6 以上，区分度一般在 0.4 以下，可见考生比较熟悉这部分试题的类型.

二、例题选析

例 1 设 $x\in(-\infty,+\infty)$，$f(x)$ 有定义，且 $\forall\ \forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\neq 0$，$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$，求 $f(2\,011)$.

析 因 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x)\neq 0$，于是知 $f(0)\neq 0$，适当选择 x 与 y 之值，由已知等式即得所求.

解 令 $x=0$，$y=2\,011$，则有 $f(0)=f(0)\cdot f(2\,011)$，

因 $f(0)\neq 0$，故 $f(2\,011)=1$.

例 2 设 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x)+2f(1-x)=x^2-2x$，求 $f(x)$.

析 利用已知表达式的特点，作变换 $t=1-x$，得 $x=1-t$. 将变换后的式子与变换前式子联立解之，即得 $f(x)$.

解 令 $t=1-x$，则 $x=1-t$，于是有

$$f(1-t)+2f(t)=(1-t)^2-2(1-t)=t^2-1.$$

记为 $f(1-x)+2f(x)=x^2-1$，与原式联立消去 $f(1-x)$，得

$$f(x)+2[(x^2-1)-2f(x)]=x^2-2x\Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}(x^2+2x-2).$$

例 3 设 $f(x)$是以 2 为周期的奇函数，且当 $x\in[2,3]$，$f(x)=x^2$.

求当 $x\in[-2,0]$时 $f(x)$的表达式.

析 注意到$[-2,0]=[-2,1]\cup[-1,0]$，利用题设条件：$f(x+2k)=f(x)$，$k\in\mathbf{Z}$，$f(-x)=-f(x)$.

解 当$-2\leqslant x\leqslant -1$，有 $2\leqslant x+4\leqslant 3$，由周期性，有

$$f(x)=f(x+4)\xlongequal{\text{题设}}(x+4)^2.$$

当$-1\leqslant x\leqslant 0$，有 $0\leqslant -x\leqslant 1\Rightarrow 2\leqslant -x+2\leqslant 3$，由设，

$$f(x)=-f(-x)=-f(-x+2)=-(-x+2)^2=-(x-2)^2.$$

故所求 $f(x)$的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}(x+4)^2, & -2\leqslant x\leqslant -1,\\ -(x-2)^2, & -1\leqslant x\leqslant 0.\end{cases}$$

例 4 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

析 按 $f(x)$ 的定义及$|g(x)|<1$，$|g(x)|\geqslant 1$ 讨论即得.

解 按 $f(x)$ 的定义，有

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & |g(x)|<1,\\ 0, & |g(x)|\geqslant 1.\end{cases}$$

再由 $|g(x)|<1$，知 $|x|\leqslant 1$，$|g(x)|\geqslant 1$，知 $|x|>1$.

于是 $$f[g(x)]=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

例 5 设 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1,\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2,\\ 12x-16, & x>2.\end{cases}$ 试求 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式.

析 $f(x)$ 逐段单调（分段存在反函数）；$f(x)$ 的值域为 $(-\infty, +\infty)$，分段值域即相应反函数的分段定义域. 合起来即得所求反函数的表达式.

解 当 $x<-1$，知，$-\infty<f(x)<-1$，且是单调增加的；

当 $-1\leqslant x\leqslant 2$，知 $-1\leqslant f(x)\leqslant 8$，且是单调增加的；

当 $x>2$，知 $8<f(x)<+\infty$，且是单调增加的.

由此可知，$y=f(x)$ 的值域为 $-\infty<y<+\infty$. 在此区间上，$f(x)$ 存在单值的反函数 $x=g(y)$，分段表述如下：

$$g(y)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-y}{2}}, & -\infty<y<-1,\\ y^{\frac{1}{3}}, & -1\leqslant y\leqslant 8,\\ \dfrac{1}{12}(y+16), & 8<y<+\infty.\end{cases}$$

即 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 为

$$g(x)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}, & -\infty<x<-1,\\ x^{\frac{1}{3}}, & -1\leqslant x\leqslant 8,\\ \dfrac{1}{12}(x+16), & 8<x<+\infty.\end{cases}$$

例 6 用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$（常数 $a>0$）.

析 将常数 a 取整，建立不等式，再按定义证之.

证 令 $m=[a]$，则当 $n>m$ 时，有

$$\frac{a^n}{n!}=\frac{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot m\,(m+1)\cdot\cdots\cdot n}\leqslant K\cdot\frac{a}{n},\ \frac{a}{m+1}<1,\cdots,\frac{a}{n-1}<1,$$

其中 $K=\dfrac{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot m}$，$\dfrac{a\cdot\cdots\cdot a}{(m+1)\cdot\cdots\cdot n}<\dfrac{a}{n}$. 于是 $\forall\varepsilon>0$，欲使 $\dfrac{a^n}{n!}<\varepsilon$，只要 $K\cdot\dfrac{a}{n}<\varepsilon$ 以及 $n>m=[a]$. 由此，取 $N=\max\left([a], \left[\dfrac{Ka}{\varepsilon}\right]\right)$，当 $n>N$，就有 $\dfrac{Ka}{n}<\varepsilon$，从而有 $\dfrac{a^n}{n}<\varepsilon$. 即

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$.

例 7 设 $a_1\geqslant -12$，$a_{n+1}=\sqrt{12+a_n}$，$n=1, 2, \cdots$，试讨论 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 的存在性. 若存在，则求之.

析 利用单调有界变量极限存在准则证之.

解 易知，当 $n=2, 3, \cdots$，有 $a_n\geqslant 0$.

先考察数列$\{a_n\}$的单调性.

$$a_{n+1}-a_n=\sqrt{12+a_n}-\sqrt{12+a_{n-1}}=\frac{a_n-a_{n-1}}{\sqrt{12+a_n}+\sqrt{12+a_{n-1}}}.$$

因此，若 $a_2>a_1$，则由数学归纳法可知$\{a_n\}$单调增加；

若 $a_2<a_1$，则$\{a_n\}$单调减少；

若 $a_2=a_1$，则$\{a_n\}$为常数数列.

为此，考察 a_2-a_1. 若 $a_1<0$，则 $a_2-a_1>0$.（显然）

故以下不妨设 $a_1\geqslant 0$.

$$a_2-a_1=\sqrt{12+a_1}-a_1=\frac{12+a_1-a_1^2}{\sqrt{12+a_1}+a_1}=\frac{-(a_1-4)(a_1+3)}{\sqrt{12+a_1}+a_1}.$$

于是，若 $a_1<4$，则 $a_2>a_1$，从而$\{a_n\}$单调增加；

若 $a_1>4$，则 $a_2<a_1$，从而$\{a_n\}$单调减少；

若 $a_1=4$，则 $a_2=a_1$，从而$\{a_n\}$为常数数列.

再考察$\{a_n\}$的有界性.

$$a_{n+1}-4=\sqrt{12+a_n}-4=\frac{12+a_n-16}{\sqrt{12+a_n}+4}=\frac{a_n-4}{\sqrt{12+a_n}+4}$$

于是，若 $a_1<4$，则由数学归纳法知，一切 $a_n<4$，$\{a_n\}$有上界；若 $a_1>4$，则 $\forall n$，$a_n>4$，$\{a_n\}$有下界.

综上所述，不管 $a_1(\geqslant -12)$ 如何，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 总存在.

记为 a，对 $a_{n+1}=\sqrt{12+a_n}$两边取极限，得

$a=\sqrt{12+a}\Rightarrow a^2-a-12=0\Rightarrow (a-4)(a+3)=0\Rightarrow a=4$（因 $a_n\geqslant 0$，故 a 非负）.

注: 本题也可用夹逼准则来证.

①设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ $\exists$，则在迭代式两边取极限得 $a=4$. 考察$|a_n-4|$，有

$$0\leqslant|a_n-4|=\frac{|a_{n-1}-4|}{\sqrt{12+a_{n-1}}+4}\leqslant\frac{1}{4}|a_{n-1}-4|\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{4^{n-1}}|a_1-4|,$$

注意到$|a_n-4|$为定值，由夹逼准则，知

$$\lim_{n\to\infty}|a_n-4|=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=4.$$

②仅在迭代式两边取极限得 $a=4$，是不可作为证明的.（因为这样做的前提是"设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ $\exists$"，在这一前提下才有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=4$.）因为这样并未解决"$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$"的存在性问题. 要是不管三七二

十一，就会得出荒谬的结论. 例如设 $a_n=n$，则 $a_{n+1}=n+1=a_n+1$，就此式两边取极限，并记为 a，从而得出 $a=a+1\Rightarrow 0=1$. 荒唐至极！

在这里要指出的是，具体解题时，可以先对迭代式两边取极限，得出极限 $a=4$，这对后论证其存在性是有好处的，事实上，在证$\{a_n\}$的单调性与有界性时都用到了数"4".

③讨论$\{a_n\}$的单调性，也可以用求导的方法.

令 $f(x)=\sqrt{12+x}$，从而 $a_{n+1}=f(a_n)$，$n=1, 2, \cdots$.

由于 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{12+x}}>0$，于是，若 $a_2>a_1$，则有 $a_3=f(a_2)>f(a_1)=a_2$，…，$a_{n+1}>a_n$，….

若 $a_2<a_1$，则 $a_3=f(a_2)<f(a_1)=a_2$，…，$a_{n+1}<a_n$，….

不管如何，$\{a_n\}$的确是单调的. 此法可用于一般情况.

例 8　设 $a_1>0$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n(a_n^2+1)$，$n=1, 2, \cdots$，试问$\{a_n\}$收敛否？

析　利用单调有界变量极限存在准则.

解　由迭代式定义可知，$\forall n$，$a_n>0$. 考察

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}a_n(a_n^2+1)-a_n=\frac{1}{2}a_n(a_n^2-1).$$

由此可见，若 $a_1>1$，则 $a_2>a_1>1$，由数学归纳法知，$\forall n$，$a_n>1$，且 $a_{n+1}>a_n$，即$\{a_n\}$单调增加；若 $a_1<1$，则 $a_2<a_1<1$，由归纳法知，$\forall n$，$a_n<1$，且 $a_{n+1}<a_n$，即$\{a_n\}$单调减少；若 $a_1=1$，则 $\forall n$，$a_n=1$，即$\{a_n\}$为常数数列.

由设易知 $a_n>0$ $(n=1, 2, \cdots)$，故$\{a_n\}$有下界.

若 $a_1<1$，则由$\{a_n\}$单调减少有下界，推知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\ \exists$，记为 a，将迭代式两边取极限得

$$a=\frac{1}{2}a\,(a^2+1)\Rightarrow a\,(a-1)(a+1)=0\Rightarrow a=0, -1, 1.$$

因 $0<a_n<1$ $(n=1, 2, \cdots)$，且$\{a_n\}\downarrow$，故只能是$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

若 $a_1=1$，则由于$\{a_n\}$为常数数列，故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

若 $a_1>1$，则$\{a_n\}\uparrow$. 如果$\{a_n\}$有上界，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\ \exists$，其极限 $a>1$ 与 $a=0, -1, 1$ 三者之一矛盾，所以$\{a_n\}\uparrow$，无上界，于是推知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

综上所述，

若 $0<a_1<1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$；(收敛)

若 $a_1=1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$；(收敛)

若 $a_1>1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$. (发散)

注：本题的单调性也可用比值法处理. 由迭代式定义有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}(a_n^2+1).$$

类似地，

若 $a_1>1$，则 $a_2>a_1$，再由归纳法推知 $\{a_n\}\uparrow$.

若 $a_1<1$，则 $a_2<a_1$，再由归纳法推知 $\{a_n\}\downarrow$.

若 $a_1=1$，则 $\{a_n\}$ 为常数数列.

一般地，若 a_n 为某连乘积时，则用比值法讨论单调性方便.

例 9 设 $S_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$，$n=1, 2, \cdots$，试证 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ ∃.

析 利用极限存在准则（单调有界变量必有极限）.

证 由设知，$S_{n+1}=S_n+\frac{1}{(n+1)^2}$，$n=1, 2, \cdots$，

$\therefore \{S_n\}\uparrow$.

又

$$
\begin{aligned}
S_n &=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\\
&<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\,n}\\
&=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\\
&=2-\frac{1}{n}<2,
\end{aligned}
$$

$\therefore \{S_n\}$ 有界.

故由极限存在准则，知 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ ∃.

注：本题由迭代式取极限得不出极限为何值，事实上，记 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=a$，由 $S_{n+1}=S_n+\frac{1}{(n+1)^2}$，取极限，得 $a=a$，求不出 a 为何值. 将来利用 Fourier 级数可求得 $a=\frac{\pi^2}{6}$.

例 10 设 $a_n=\frac{1}{n}(1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n})$，试证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，并求之.

析 利用夹逼准则.

证 易知 $\frac{1}{n}(1+1+\cdots+1)<a_n<\frac{1}{n}(\sqrt[n]{n}+\sqrt[n]{n}+\cdots+\sqrt[n]{n})\Rightarrow 1<a_n<\sqrt[n]{n}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，故由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1\quad(n\geqslant 2)$.

注：补证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证：令 $\sqrt[n]{n}=1+a_n\Rightarrow n=(1+a_n)^n=1+na_n+\frac{n\,(n-1)}{2}a_n^2+\cdots+a_n^n$

$\Rightarrow n>\frac{n\,(n-1)}{2}a_n^2\Rightarrow 1>\frac{n-1}{2}a_n^2\Rightarrow 0<a_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}$，$n\geqslant 2$.

欲使原式成立，即欲使 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，即

$\forall\varepsilon>0$，欲使 $\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\varepsilon\Rightarrow n>\frac{2}{\varepsilon^2}+1$.

取 $N(\varepsilon)=\max\left(2,\left[\frac{2}{\varepsilon^2}+1\right]\right)$，则当 $n>N(\varepsilon)$，就有 $|\sqrt[n]{n}-1|=a_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\varepsilon$.

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

例 11　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

析　考察正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ 收敛，由收敛必要条件即得.

证　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$，

因
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\Big/\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{\mathrm{e}}<1,$$

故级数收敛，由级数收敛的必要条件，知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

例 12　设 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

析　利用定积分定义求之.

解　$a_n=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+i^2}}=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}}\cdot\frac{1}{n}$.

取　$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，

从而　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

注：若数列 $\{a_n\}$ 能化成积分和式求极限，通常要具备两个条件：

①能写成 $a_n=\sum\limits_{i=1}^{\infty}f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}$；

② $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续.

倘若如此，则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}=\lim_{\substack{n\to\infty\\(\lambda\to0)}}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\,\Delta x_i=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $\Delta x_i=\frac{1}{n}$，$\xi_i=\frac{i}{n}$，$\lambda=\max(\Delta x_i)=\frac{1}{n}$.

例 13　设 $a_n=\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

析　利用定积分定义求之.