

OS/333

葛氏平面三角學



武汉工业学院图书馆



01351168

1031410

書號：2073

葛氏平面三角學

全一冊

譯者：邱

調 梅

出版者：人民教育出版社

印釘者：（見正文最後頁）

發行者：新華書店

1-30410

33,151—36,650

定價 4,700 元

1947年2月世界書局原版

1951年3月第一次修訂版

1953年1月上 海 十五版

說 明

本社編輯中學數、理、化三科各種課本還沒有全部完成。因此按缺少的幾種，蒐集過去各家出版的課本加以審讀，選出幾種適用的，作為暫時的代用課本。曾經請求中央人民政府教育部轉向各大行政區徵求對於此項代用課本的意見。第一次全國中等教育會議開會，在分組討論課程標準的時候，又曾經提出來跟各地代表商量。其中高中三角一科，大都同意選用邱調梅譯的葛氏平面三角學。本社就決定把它印出來，作為暫時的代用課本。

人民教育出版社

一九五一年四月

三角學

三角學爲數學中重要之一部門，其於測量學上之關係尤大。許多重要之測量學原理與方法，均須藉三角學之應用以完成之，故其重要自不待言。

中學生於學習代數學與幾何學之後，往往繼之以學習三角學；尤以理工科之學生，對三角學之研習尤爲着重。是以本書特在篇首附以學習上之心得，以供讀者參考。惟譯者才疏學淺，下述數端不過就個人學習上之經驗所及，略貢陋見而已。至於乖誤之處，在所難免，尙祈 指正是幸。

須熟習三角函數之性質與意義 三角函數者，三角中各邊互比之數值也。而三角學即在表示三角形中角與邊互相依賴而變更之真實性質，故學者對此三角函數必須首先熟習之。六個函數之特質如何？八邊之關係如何？在單位圓中六函數之變化又如何？各象限中六函數之化法有何不同？凡此種種，均爲三角函數重要之特質。學者對此必須熟習其方法，且須澈底明瞭其原理。庶幾隨時可加應用，以達融會貫通之目的。

須熟練三角函數表及對數表之檢查 三角函數之自然數值表爲三角學演算時重要之工具。對數表及三角函數之對數表亦均爲演算數值較大之習題中不可或少之工具。學

學 習 要 點

者對此三表均應明瞭其應用，熟練其翻檢之方法。則遇題目中需用此種數值時，祇須在附錄中一翻即得。此為學習三角學基本之技能，學者不可不注意及之。

須熟記各種公式及恆等式 三角解析一章，為三角學中最重要亦為最有興趣之一章。在着手解析各種三角習題或證明各種恆等式時，必須應用各種公式及恆等式。此種公式及恆等式在本書第十章中均有詳細之表列，學者當熟讀牢記，並須明瞭其運用之方法，則在着手證明或解析三角式時方得心應手，運用自如。而三角方程之題目，亦可迎刃而解矣！

須熟繪各種圖形及圖解 許多三角習題之解答，均須賴圖形以為助。尤以證明某項定律時為然。蓋其圖形不啻為解答時之鎖鑰。祇須能繪出圖形，即可獲得不少暗示，而此項定律之證明亦可由此種暗示而獲得不少容易。且有數種定理，可由繪出正確之圖形而獲得解答時之領悟。於是數學之推理及思考，亦容易獲得門徑矣！

以上為學習三角學時之個人心得，讀者若能秉此學習，循序漸進，或可有助於學習之進步焉！

增訂版序

在增訂葛氏平面三角學時，增訂者深感此葛氏課本之能普及於各校師生間。解釋之簡潔，例題之豐富，與應用題範圍之廣大由以致之。現所改訂者其目的乃在更改其注意點耳。在此增訂本中，於三角函數更爲注意。故從直角三角形中分離而另述之。並對函數體裁力求其簡明。在此解釋之後繼之爲應用，分載於第四章及第五章中。而第五章則更使用對數，使計算更屬簡易。再後一章爲三角法之分析。此章有數處改訂，學者須注意及之；其次三角恆等式與方程式亦經改訂。如此編列，則應用方面在三角法之分析之前即可研究矣。

本書之附錄仍爲四位數字表與原版同。所不同者爲增加表四與表五。此二表所載者爲正弦，餘弦，正切與餘切之真數。此外更加入各表之用法。各表在計算中一律準確至四位有效數字，與原版同。惟再須注意者，即在所加入之二表中，其數值皆至四位有效數字，至如何求得四位有效數字之法，則亦有說明。

所有問題，與原版同，其角皆以度與分及度與度之小數表之。量角之法由教師選擇之。而諸表可供任何組問題之用。

P. F. Smith

J. S. Mikesh

目 錄

第一章 三角函數

| 節 | 頁 |
|---|----|
| 1. 三角法 | 1 |
| 2. 變數;常數..... | 1 |
| 3. 函數 | 1 |
| 4. 一銳角之三角函數 | 1 |
| 5. $45^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ 之函數值..... | 5 |
| 6. 作圖;量角器..... | 9 |
| 7. 三角函數之數值表 | 9 |
| 8. 角之形成..... | 10 |
| 9. 正角及負角..... | 12 |
| 10. 任意值之角 | 12 |
| 11. 四象限..... | 13 |
| 12. 平面上一點之直角坐標..... | 14 |
| 13. 任意三角函數之定義..... | 15 |
| 14. 三角函數之代數符號..... | 17 |
| 15. 應用..... | 17 |
| 16. 以一函數表其餘五個函數法..... | 25 |

第二章 基本關係式;化法方式

| | |
|-----------------------|----|
| 17. 基本關係式..... | 28 |
| 18. 以其餘五函數之一表一函數..... | 30 |
| 19. 零之除法;無限大..... | 34 |

| | | |
|-----|---|----|
| 20. | $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ 之函數 | 35 |
| 21. | 測角法 | 37 |
| 22. | 弧度制 | 37 |
| 23. | 化各三角函數爲銳角函數 | 43 |
| 24. | 餘角之函數 | 43 |
| 25. | 第二象限內諸角之化法方式 | 43 |
| 26. | 第三象限內諸角之化法方式 | 47 |
| 27. | 第四象限內諸角之化法方式 | 50 |
| 28. | 負角函數之化法 | 53 |
| 29. | 化任意角函數爲銳角函數之總法 | 54 |

第三章 線定義及圖解

| | | |
|-----|--------------|----|
| 30. | 三角函數之線定義 | 59 |
| 31. | 角變時函數值之變化 | 60 |
| 32. | 函數之圖形 | 63 |
| 33. | 三角函數之圖形 | 65 |
| 34. | 三角函數之週期性 | 66 |
| 35. | 用單位圓畫三角函數之圖形 | 68 |

第四章 應用

| | | |
|-----|-------------------|----|
| 36. | 本章之目的；近似值之計算 | 72 |
| 37. | 以直角三角形爲依據之問題 | 74 |
| 38. | 正弦與餘弦之數值表；補間法 | 80 |
| 39. | 正切與餘切之數值表 | 82 |
| 40. | 三角問題中常用之術語 | 83 |
| 41. | 斜三角形之解法 | 88 |
| 42. | 正弦定律 | 88 |
| 43. | 當已知兩邊及一對角時之“兩意情形” | 91 |
| 44. | 正切定律 | 96 |

| | |
|-------------------------|-----|
| 45. 餘弦定律..... | 99 |
| 46. 以三角形之三邊表其半角之函數..... | 103 |
| 47. 求斜三角形面積之公式..... | 110 |
| 48. 結論..... | 112 |

第五章 對數之理論及應用

| | |
|---|-----|
| 49. 三角法中對數之需要..... | 113 |
| 50. 對數之定理..... | 116 |
| 51. 常用對數..... | 119 |
| 52. 定常用對數指標之規則..... | 120 |
| 53. 對數表..... | 123 |
| 54. 求一數之對數法..... | 123 |
| 55. 已知一對數求其真數法..... | 127 |
| 56. 計算中對數之用法..... | 128 |
| 57. 餘對數..... | 130 |
| 58. 對數底之變換..... | 133 |
| 59. 指數方程式..... | 134 |
| 60. 三角函數之對數表..... | 136 |
| 61. 表二之用法,其已知或所求角爲以度與分表之者..... | 137 |
| 62. 求一角之函數對數,其角爲以度與分表之者..... | 137 |
| 63. 已知一角之函數對數,求該角而以度與分表之者..... | 139 |
| 64. 表三之用法,其已知或所求角爲以度與度之小數部分 表之者..... | 144 |
| 65. 直角三角形解法中對數之應用..... | 148 |
| 66. 斜三角形解法中對數之應用..... | 155 |
| 67. 斜三角形求積法中對數之應用..... | 173 |
| 68. 地積測量法..... | 176 |
| 69. 距等圈航法..... | 177 |
| 70. 平面航法..... | 179 |

| | |
|-----------------|-----|
| 71. 中緯線航法 | 180 |
|-----------------|-----|

第六章 三角學之解析

| | |
|---------------------------|-----|
| 72. 兩角和與較之函數 | 183 |
| 73. 兩角和之正弦與餘弦 | 183 |
| 74. 兩角較之正弦與餘弦 | 187 |
| 75. 兩角和與較之正切與餘切 | 189 |
| 76. 以一角之函數表其二倍角之函數 | 193 |
| 77. 倍角之函數 | 193 |
| 78. 以一角之半角函數表該角之函數 | 196 |
| 79. 以一角之餘弦表其半角函數 | 196 |
| 80. 函數之和與較 | 198 |
| 81. 三角恆等式 | 202 |
| 82. 三角方程式 | 208 |
| 83. 解三角方程式之提示 | 209 |
| 84. 當已知一函數後，一角之普遍公式 | 214 |
| 85. 反三角函數 | 217 |

第七章 近於 0° 或 90° 之銳角

| | |
|---|-----|
| 86. 定理 | 224 |
| 87. 近於 0° 與 90° 正銳角之函數 | 225 |
| 88. 求近於 0° 之銳角函數之法則 | 226 |
| 89. 求近於 90° 之銳角函數之法則 | 226 |
| 90. 求近於 0° 與 90° 之角之函數對數之法則 | 228 |

第八章 公式摘要

| | |
|-----------------|-----|
| 平面三角公式一覽表: | 頁 |
| 直角三角形 | 236 |
| 函數間之基本關係式 | 236 |

| | |
|----------------------|-----|
| 正弦定律 | 237 |
| 正切定律 | 237 |
| 餘弦定律 | 237 |
| 以三角形之三邊表其半角函數 | 237 |
| 三角形之面積 | 237 |
| 兩角和與較之函數 | 238 |
| 二倍角之函數 | 238 |
| 以一角之半角函數表該角之函數 | 238 |
| 半角函數 | 238 |
| 函數之和與較 | 239 |

四位數字表

表 一

| | 頁 |
|---|-----|
| 真數對數表..... | 1-5 |
| 求近於 0° 或 90° 各角之三角函數之對數諸法則..... | 6 |

表 二

| | |
|---------------------------|------|
| 三角函數之對數表,其角以度數與分數表之者..... | 7-16 |
| 角之轉換表..... | 17 |

表 三

| | |
|------------------------------|-------|
| 三角函數之對數表,其角以度數與度之小數表之者 | 19-37 |
|------------------------------|-------|

表 四

| | |
|----------------|-------|
| 正弦與餘弦之真數表..... | 40-41 |
|----------------|-------|

表 五

| | |
|----------------|-------|
| 正切與餘切之真數表..... | 42-43 |
|----------------|-------|

平面三角學

第一章

三角函數

1. **三角法** 在三角學中，吾人所欲研究之數量，謂之三角函數。本章之目的乃在說明此類函數之定義及其初步應用。

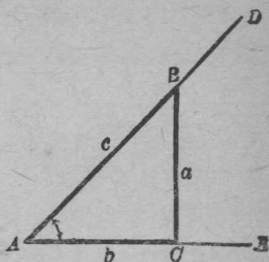
2. **變數；常數** 凡一問題中之數量，非為變數即為常數。故此二類數量之區別，必須精確了解。一數量在一問題中，可以任何數值表之者謂之變數。變數常以英文末尾字母 x, y, z 等表之。

一數量，其數值在一問題中為固定不變者謂之常數，數字或絕對常數，在一切問題中，常保持其同一之值，如 $2, 5, \sqrt{7}, \pi$ 等等。不定常數者僅在特定問題中時，其值為固定。常數常以英文首數字母 a, b, c 等表之。

3. **函數** 一變數之函數，為一數量，其值依變數之值而定。一正方形之面積為其邊長之函數，而一球形之體積，為其直徑之函數。同理，三項式 $x^2 - 7x - 6$ 為 x 之函數，因此式之值須依 x 之值而定。在三角函數中，變數為角之度量，而此等函數之值，常依已知角之度量而定。現暫以度數表一角之量。以後吾人將論及角之第二種測量法。

4. **一銳角之三角函數** 兩線相交成一角，其概念已詳具於初等平面幾何學中，茲先就銳角討論之。

設 $\angle EAD$ 爲一小於 90° 之角，即銳角。自任一邊上一點 B ，作一線垂直於他邊，於是成一直角三角形，如 ABC 。今以大楷字母 A, B, C ，表角之度量，小楷字母 a, b, c 表其相應對邊之長。* 在幾何學中，吾人已知此三角形之角與邊有相互之關係。三角法即表示此等相互關係之實性，而用各邊之比以達此目的。此諸邊之比，謂之三角函數。一銳角(如 A)有六個三角函數，茲表明如下：



| | | |
|------------|----|-------------------------|
| $\sin A$, | 讀作 | “ A 之正弦 (sine)”; |
| $\cos A$, | 讀作 | “ A 之餘弦 (cosine)”; |
| $\tan A$, | 讀作 | “ A 之正切 (tangent)”; |
| $\csc A$, | 讀作 | “ A 之餘割 (cosecant)”; |
| $\sec A$, | 讀作 | “ A 之正割 (secant)”; |
| $\cot A$, | 讀作 | “ A 之餘切 (cotangent)”。 |

此等三角函數(比)之定義如下(見上圖)：

$$(1) \sin A = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}} \left(= \frac{a}{c} \right); \quad (4) \csc A = \frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}} \left(= \frac{c}{a} \right);$$

$$(2) \cos A = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}} \left(= \frac{b}{c} \right); \quad (5) \sec A = \frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}} \left(= \frac{c}{b} \right);$$

$$(3) \tan A = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}} \left(= \frac{a}{b} \right); \quad (6) \cot A = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}} \left(= \frac{b}{a} \right).$$

須注意者，任一函數之數值祇依 A 角之大小而定，而與所取 B 點之位置無關。

因，如設 B' 爲 AD 上另一點，而 B'' 爲 AE 上任一點。作 $B'C'$ 及 $B''C''$ 各垂直於 AE 及 AD 。此等三角形 ABC , $AB'C'$, $AB''C''$ 必爲互等角三角形。因其俱爲直角三角形，而有一公共角 A 也。故彼等爲相似，而

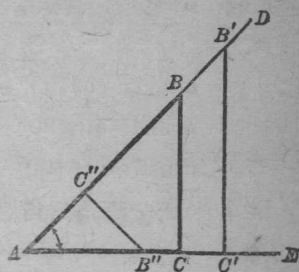
* 直角三角形，如無其他說明，恆以 c 表斜邊，而以 C 表直角。

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'} = \frac{B''C''}{AB''}.$$

但此諸比式，均爲 A 之正弦。同理，吾人亦可證其他諸函數具此性質。凡此可表明吾人所擇之三角形，其大小可任意，因重要之點，祇在三角形各邊之相互關係，而與各邊之實在長度無關。

學者更須注意者，即 A 角之大小有改變時，則第 2 頁上之六比，亦變其值。

此等函數(比)，在三角學研究中，最爲重要，如無透徹之了解，則進修非易，惟此等函數尙易記憶。學者祇須注意第一行三個函數各爲第二行三個函數之倒數可也。因



$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{1}{\csc A};$$

$$\csc A = \frac{c}{a} = \frac{1}{\frac{a}{c}} = \frac{1}{\sin A};$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{1}{\frac{c}{b}} = \frac{1}{\sec A};$$

$$\sec A = \frac{c}{b} = \frac{1}{\frac{b}{c}} = \frac{1}{\cos A};$$

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{\cot A};$$

$$\cot A = \frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{\tan A}.$$

現將定義(1)至(6)應用於第 2 頁圖上之銳角 B ，則對邊 $= AC = b$ ，鄰邊 $= BC = a$ 。故

$$\sin B = \frac{b}{c};$$

$$\csc B = \frac{c}{b};$$

$$\cos B = \frac{a}{c};$$

$$\sec B = \frac{c}{a};$$

$$\tan B = \frac{b}{a};$$

$$\cot B = \frac{a}{b}.$$

與 A 角諸函數比較之，可知

$$\sin A = \cos B;$$

$$\csc A = \sec B;$$

$$\cos A = \sin B; \quad \sec A = \csc B;$$

$$\tan A = \cot B; \quad \cot A = \tan B.$$

因 $A+B=90^\circ$ (即 A 與 B 互為餘角), 故上列諸結果, 可簡述如下:

定理 一銳角之函數等於其餘角之餘函數 (co-function).* 上述定理

可書之如下:

$$\sin A = \cos(90^\circ - A); \quad \csc A = \sec(90^\circ - A);$$

$$\cos A = \sin(90^\circ - A); \quad \sec A = \csc(90^\circ - A);$$

$$\tan A = \cot(90^\circ - A); \quad \cot A = \tan(90^\circ - A).$$

例 1. 在一直角三角形中, $a=3$, $b=4$, 求 A 角之諸函數.

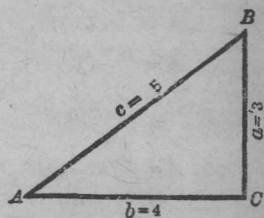
【解】 $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$

應用第 2 頁 (1) 至 (6) 諸式, 得

$$\sin A = \frac{3}{5}; \quad \csc A = \frac{5}{3};$$

$$\cos A = \frac{4}{5}; \quad \sec A = \frac{5}{4};$$

$$\tan A = \frac{3}{4}; \quad \cot A = \frac{4}{3}.$$



再求 B 角諸函數而比較其結果.

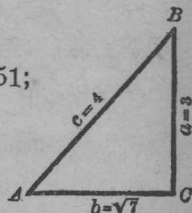
例 2. 在一直角三角形中, $a=3$, $c=4$. 求 B 角之諸函數.

【解】 $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$

$$\sin B = \frac{\sqrt{7}}{4} = 0.66; \quad \csc B = \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7} = 1.51;$$

$$\cos B = \frac{3}{4} = 0.75; \quad \sec B = \frac{4}{3} = 1.33;$$

$$\tan B = \frac{\sqrt{7}}{3} = 0.88; \quad \cot B = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7} = 1.14.$$



再求 A 角諸函數而比較其結果.

例 3. 在一直角三角形中, $a=2mn$, $b=m^2-n^2$, 求 A 角之諸函

* 正弦與餘弦, 正切與餘切, 正割與餘割, 均可互謂餘函數.

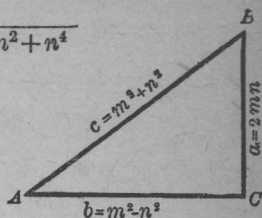
數。

$$\begin{aligned} \text{【解】 } c &= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4m^2n^2 + m^4 - 2m^2n^2 + n^4} \\ &= \sqrt{m^4 + 2m^2n^2 + n^4} = m^2 + n^2 \end{aligned}$$

$$\sin A = \frac{2mn}{m^2 + n^2}; \quad \csc A = \frac{m^2 + n^2}{2mn};$$

$$\cos A = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}; \quad \sec A = \frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2};$$

$$\tan A = \frac{2mn}{m^2 - n^2}; \quad \cot A = \frac{m^2 - n^2}{2mn}.$$



例 4. 在一直角三角形中, 已知 $\sin A = \frac{4}{5}$, 及 $a = 80$; 求 c .

【解】 從第 2 頁公式 (1) 中, 得 $\sin A = \frac{a}{c}$.

以本題中之 $\sin A$ 及 a 之值代入, 則得 $\frac{4}{5} = \frac{80}{c}$;

解之, 得 $c = 100$. [答].

5. $45^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ 之函數值. 此等銳角常散見於各種三角學習題中, 故須求其函數值而記憶之.

a. 求 45° 之各函數值. 作一等腰三角形 ABC , 則

$$\angle A = \angle B = 45^\circ.$$

因此處所重要者為邊之關係, 而非其實長, 故可任意定各邊之長度, 祇須使此直角三角形合於等腰之條件即可.

今設二等邊之長為 1, 即 $a = 1, b = 1$.

則 $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$, 而得

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\csc 45^\circ = \sqrt{2};$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\sec 45^\circ = \sqrt{2};$$

$$\tan 45^\circ = 1;$$

$$\cot 45^\circ = 1.$$

