高等院校数学教师教育系列教材

总主编 李永新 曾 峥

中学代数研究与教学

李永新 李 莉 主编

科学出版社

高等院校数学教师教育系列教材

中学代数研究与教学

总主编　李永新　曾　峥
主　编　李永新　李　莉
副主编　李　劲　闫淑芳

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是高等院校数学教师教育系列教材的第二分册，全书包括绪论和正文七章，是关于中学代数内容体系及其教学分析设计的研究概论。绪论介绍了代数学演变发展的三个基本阶段、作为教学科目的中学代数的特点以及学习代数研究与教学课程的必要性；前四章分别研究分析了数与式、方程与不等式、初等函数、统计与概率等内容的基本理论和结构体系；第五、六章分别就中学代数的一些典型解题方法与应用问题作了举例介绍；第七章根据新数学课程标准要求，对中学代数各部分内容的教学分析与设计问题进行了专题讨论研究。

本书可作为高等学校数学教师教育方向相关专业数学教育课程的教学用书，也可作为中学数学教师继续教育以及相关教研人员的教研参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

中学代数研究与教学/李永新，李莉主编. —北京：科学出版社，2012
高等院校数学教师教育系列教材/李永新，曾峥总主编
ISBN 978-7-03-034053-5

Ⅰ. ①中… Ⅱ. ①李… ②李… Ⅲ. ①中学数学课-代数课-教学研究-高等师范院校-教材 Ⅳ. ①G633.622

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 125435 号

责任编辑：胡云志　相　凌　唐保军／责任校对：钟　洋
责任印制：阎　磊／封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2012 年 6 月第　一　版　开本：720×1000 1/16
2012 年 6 月第一次印刷　印张：16
字数：337 000

定价：32.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

序　一

近年来,"教师的专业发展"成为学界关注的一个研究课题,如教师需要什么知识、教师的知识结构是什么形态、教师的知识从何而来、教师专业发展的阶段性、学科教学知识(PCK)对教学的影响等,国内外学者对这些问题都开展了一系列研究。许多研究表明,职前训练是教师成长的必经之路,是教师专业发展的必需环节。而要进行有效的职前训练,就需要高质量的教材和恰当的训练方式。显然,教师的职前训练是师范院校的一项重要任务和常规工作。

作为未来的教师,高等师范院校的学生应当具备哪些知识,或者说,教师应当具备什么知识,不同的学者有自己的见解。舒尔曼(L. S. S. Shulman)把教师知识分为如下7类:学科内容知识、一般教学法知识、课程知识、学科教学知识、学生知识、教育环境知识和其他学科知识。格罗斯曼(P. L. Grossman)的分类方法为内容知识、学习者与学习知识、一般教学法知识、课程知识和教育环境知识。伯利纳(D. C. Berliner)的分类方法为学科专长、课堂管理专长、教学专长和诊断专长。帕特南和博克(Putnam & Borker)的分类方法为一般教学法知识、学科知识、学科教学法知识。艾尔贝兹(F. Elbaz)的分类方法为学科知识、课程知识、教学法知识、关于自我的知识。显然,作为教师必须具备学科教学知识,这一点已经成为国内外学者的共识。学科教学知识的核心是知识的学科性和知识的实践性,学科教学知识的生成源于理论,学科教学知识的发展源于实践。因此,作为数学教师来说,就应当在职前习得数学学科教学的理论知识,在职后发展数学学科教学的实践知识。

事实上,数学教学理论一直是我国高等师范院校的必修课程,1980年以来,出版了几十种以"数学教材教法"、"数学教学论"、"数学教育学"冠名的教材或论著,这些著作为我国的师范生培养作出了积极的、重要的贡献。

由李永新教授作总主编的系列教材《中学数学教育学概论》、《中学代数研究与教学》、《中学几何研究与教学》是2007年出版的,应当属于我国数学教育理论系列书籍中比较新的一套教材。我认真阅读了李永新教授和曾峥教授寄给我的这三本书,有两点感受。

其一,目标定位明确,内容与目标有高度的一致性。这套教材以培养初中数学教师为主要目标,三本书的内容都紧紧围绕这一目标展开。《中学数学教育学概论》中的数学课程标准分析、数学教育改革介绍、数学教学原则阐述、数学教学方

法运用,都以体现初中教师的特性为内容展示的逻辑起点和目标实现的归宿。《中学代数研究与教学》与《中学几何研究与教学》以初中教师必备的数学知识为讨论对象,同时增加与数学课程改革相适应的学科内容,使教材的目标与内容统一,针对性强,普适性广。

其二,内容组织严谨,体现出结构的系统性。首先,三本书的内容体现了初中数学教学应当"达到什么目标"、应当"教什么"、应当"怎么教"和"为什么要这样教"的逻辑链关系,内容充实,结构完整。其次,内容的系统性又表现为突破了传统数学教育论著的阈界,增加了一些与现代数学教育理念相吻合的元素。例如,在《中学数学教育学概论》中,比较详细地讨论了数学教育的文化价值观,对数学教育的价值取向作出了新的定位,从而走出了只把数学教育作为科学教育来认识的范畴;将弗赖登塔尔、波利亚等数学教育家的理论作为数学教育的理论基础,冲破了早期著作中只以一般教育和心理理论作为数学教育理论基础的束缚。再次,内容的系统性还表现为视野开阔。在《中学数学教育学概论》中,用较多的篇幅介绍了国外的数学课程与数学教学改革情况,并作了比较与分析,这对于扩大学生眼界、丰富学生的知识都是有益的。在《中学代数研究与教学》与《中学几何研究与教学》两本书中,不仅以专题形式介绍各种知识类型,而且专门安排章节讨论教学方法,并用案例形式介绍代数与几何的教学设计,凸显了知识的应用性和教学的操作性。

总之,我感觉这是培养初中数学教师的一套好教材。事实上,该套教材的再版就足以说明它的价值和它所具有的生命力。

谈一点感想,权当为序,同时也借此表达对这套教材编写团队同行们的敬意。

喻　平

2012 年 4 月于南京师范大学

序　二

作为世界上最大的发展中国家，在科教兴国战略方针的指引下，我国业已面临要加速发展基础数学教育的历史任务。这就迫切需要培育百万计的高素质中学数学教师队伍。在此种形势下，近年来国内已陆续出版了多种版本的数学教育学及教学法类著作和教材。新近最有影响的当是张奠宙、宋乃庆二位专家主编的《数学教育概论》及其后续诸教程。我很高兴看到那是一部集思广益、众志成城的作品，曾为该书写过序。

现今邀我作序的这套高等院校数学教师教育系列教材，由李永新、曾峥两位教授负责总体设计和编写，共三册，分别命名为《中学数学教育学概论》、《中学代数研究与教学》、《中学几何研究与教学》，同样也是一套通过集思广益、分工合作完成的著作。由于撰稿人大多是从事数学教育研究与教学多年的一线在职教师，他们既有教学实践经验，又充分理解新数学课程标准的理念与要求。从中不难看出这套教材有两个突出特点：一是兼顾继承与创新两个方面，既注重精选保留传统内容，又充分融入了许多普遍认可的专题内容；二是注意借鉴吸收当代数学教育学理论研究的新成果与实践探索的新经验。

据我所见，大凡任何著作、教材的作者或编者，都期望书籍出版之后能有一次或多次再版的机会，以便不断对原著作进一步的修订和补充。我想这套适用于高等院校数学教师教育方向相关专业的教材也不例外。教材面世之后，诚挚希望广大读者与使用者多提意见、建议，以期再版时进一步改进、完善和提高。

徐利治

2007 年 6 月 12 日于广州寓所

前　言

中学数学教育学概论、中学代数研究与教学、中学几何研究与教学是高等院校数学教师教育方向相关专业必修的专业基础课程，其研究对象为中学数学教育教学，直接担负着向学生传授数学教育教学理论、训练专业技能和培养数学教育研究能力的任务。

改革开放以来，我国教育事业和经济、科技、文化一样有了举世瞩目的长足发展，教育体制、观念、思想、内容、模式等都发生了巨大而深刻的变革。特别是新的国家数学课程标准的全面实施，要求数学教师教育相关专业的课程改革必须与基础教育改革相适应。对此，教育行政部门和数学教育专家高度重视，积极行动。但以初中数学教育师资为主要培养目标的高等院校仍一直为缺少可用、适用的数学教育系列教材所困扰，成为现阶段影响本专业教育质量水平的关键制约因素。

科学出版社谋师生所盼，行现实需求，组织工作在全国六省十多所地方高等院校教学一线的老师们精心编著的这套面向高等院校数学教师教育相关专业的数学教育系列教材，在结构体系和内容编排上多有创新，既注意保留采纳已有同类教材的成功经典体例，又注意吸收借鉴国内外中学数学教育教学研究的最新优秀成果。在精简、调整、提高的基础上，新增了一系列大家倍感必要的新内容，力图反映目前中学数学教育教学的各个侧面，密切联系我国基础教育数学课程改革发展的实际需要，着眼新世纪高素质中学数学教师的培养。三册教材的命名注意体现继承与创新的规划理念。《中学数学教育学概论》分册既注重数学教育教学理论的系统阐述，又紧密结合新数学课程标准的理念要求，数学教师素质和技能方面的内容占有很大比重。《中学代数研究与教学》、《中学几何研究与教学》两分册在系统研究初等数学的内容、体系、方法的同时，增加了统计与概率、投影与视图、向量法、典型解题方法和应用举例等内容，最后按新课程标准要求就初中阶段各部分内容的教学分析与设计问题作了专题研究。整套教材定位明确、选材讲究、内容丰富、结构严谨、叙述通俗简明，具有较强的科学性、理论性、实用性和可操作性，较好地反映了数学教育研究的最新成果和新世纪中学数学教育教学改革发展的需要。

全套教材由李永新、曾峥负责总体设计并拟定编写纲目，经各位编委反复讨论后分工编写，全部内容经总主编汇总、修改、统编后，再由各分册主编审核定稿。本册的具体编写分工如下：平顶山学院李永新编写绪论、第一章、第二章；白城师范学院李莉编写第三章、第七章；邢台学院闫淑芳编写第四章；河西学院李劲编写第五

章、第六章。

本套教材在编写出版过程中得到了科学出版社、全国高师数学教育研究会以及各编委所在院校的大力支持,先后请教并得到了徐利治、喻平、章士藻等先生的指导和具体帮助,徐利治、喻平先生亲自阅稿作序,在此深表谢意。另外,在编写过程中,还学习、参阅、引用了许多优秀数学教育研究文献资料,在此,对相关文献资料的作者也一并表示由衷的感谢。

由于编者水平有限,加之有些观点可能尚处于探讨之中,缺点、不足在所难免,敬请专家、读者指正,以便进一步修订完善。

编　者

2012 年 4 月于郑州

目　录

绪　论

代数学是一门古老而又崭新的数学基础分支，它经历了初等代数的形成、高等代数的发展和抽象代数的产生与深化三个不同的演变发展阶段。它的历史，其古典部分（即初等代数）可以追溯到公元前1700年以前，而近代部分（即近世代数或抽象代数）至今才仅有百余年，而且还正在蓬勃发展中，是最有活力的数学分支之一。

"代数学"一词，源于公元9世纪阿拉伯数学家、天文学家阿尔·花拉子模（Al-khowārizmi，约780—约850）所著的*ilm al-jabrwa'l muqabalah*（《还原与相消的科学》）一书，其300年后被罗伯特译成拉丁文时，"al-jabr"译成了"algebra"，其余的词逐渐被人们所遗忘。1859年，我国清代数学家李善兰（1811—1882）首次把"algebra"译成"代数学"。

一、代数学发展的几个历史观点

什么是代数学？代数学研究的对象和主要问题是什么？随着问题研究的不断深入，在代数学发展的不同历史阶段，人们的看法和认识是不断演变的。

1. 代数学是研究字母运算的科学

初等代数作为代数学的古典部分，是从算术中分溢出来而逐渐形成的一门学科。它的产生和发展与解方程（组）有着密切联系。

人们很早以前在研究实际问题的过程中就接触到方程。大约在公元前1700年以前，埃及人已经会解一些一元一次方程的应用题。与此同时，巴比伦人在一定程度上得到了一元二次方程的求根公式，并探索过某些特殊的多元方程组的解法，这些都是初等代数的萌芽。到了公元3世纪，希腊人丢番图（Diophantus，约246—330）编写了《算术》一书，较系统地研究了不定方程的理论，并用字母表示未知数和用文字缩写形式表示运算符号。

在代数学的早期历史上，中国也占有重要地位。成书于公元1世纪的《九章算术》已有不少代数学成就，如"正负术"和一整套有理数运算法则；它的"开方术"给出了形如$x^2 = n$的方程的解；"开带从平方法"给出了形如$x^2 + px = n$的二次方程的数值解法；"方程术"则给出了线性方程组的算术解法。公元5世纪，祖冲之（429—500）给出了形如$x(x+a)(x+b) = c$的三次方程的数值解法。到11世纪，贾宪等又创立了"增乘开方法"，解决了高次方程的求数值根问题。然后，我国数学家提出了解一元高次方程的方法——天元术。14世纪又创立了解二、三、四元高次

方程的“四元术”。中国的“天元术”、“四元术”标志着以方程为主要内容的初等代数已从算术中独立出来。

16 世纪,欧洲的文艺复兴运动解放了生产力并促进了科学技术的发展。由于地理探险、建筑、航海、贸易的需要,对数学的要求日益增长,原有的算术及其应用已不能满足人们的需要。这一时期,欧洲对初等代数的贡献主要表现在两个方面:一是对一元三次和四次方程求根公式的研究;二是数学符号的改进和普遍化。1553 年,意大利数学家塔尔塔利亚(N. Tartaglia,1499—1557)、费拉里(L. Ferrari,1522—1565)先后成功地得到了三次和四次方程的求根公式;法国数学家韦达(F. Vieta,1540—1603)开始有意识地系统使用数学符号,他不仅用字母表示未知数及其方幂,而且还用字母表示方程的系数和常数项。韦达认为代数与算术是不同的,算术仅研究关于具体数的计算方法,而代数则研究关于事物的类或形式的运算方法。以后,法国数学家笛卡儿(R. Descartes,1596—1650)又对数学符号作了改进,采用字母表中前面的字母表示已知量,后面的一些字母表示未知量。这就是字母代数的由来。

字母代替数的思想方法是代数学发展史上的一个重大转折,从此,代数从算术中很快分离出来,成为一门独立的学科。数学符号的改进和普遍化极大地提高了推理运算的效率和正确性,使代数学在短时期内获得了巨大进展。因此,历史上,人们将韦达称为“代数学之父”。这一时期,人们把代数学看成是关于字母的运算和由字母表示的公式的变换,以及解代数方程一类的科学。字母运算的观点是代数学的第一个观点,也是代数学最原始的观点,这种观点一直持续到 18 世纪后期。反映这种观点的代表性著作是瑞士数学家欧拉(L. Euler,1707—1783)的《代数学引论》(1770 年)。

2. 代数学是研究代数方程理论的科学

随着生产力的进一步发展,许多数量关系问题都被归结为代数方程的求解问题,从而人们开始把注意力逐步集中到关于方程和方程组求解的一般理论研究上,进而创立了包括行列式、矩阵、二次型与线性变换在内的方程(组)的求解理论。代数学开始进入高等代数发展阶段。

从 16 世纪起,随着三、四次方程根式解法的发现,人们把注意力逐步集中到五次以至更高次代数方程的根式解法。在随后的三个世纪中,许多数学家为此付出了大量的精力。1770—1842 年,先后经数学家拉格朗日(J. L. Lagrange,1736—1813)、范德蒙德(A. T. Vandermonde,1735—1796)、鲁菲尼(P. Ruffini,1765—1822)、阿贝尔(N. H. Abel,1802—1829)、伽罗瓦(E. Galois,1811—1832)等的探索,最后由阿贝尔完成了定理“次数大于 4 的一般代数方程不可能有根式解”的证明。到 1830 年,伽罗华解决了方程有根式解的充要条件这个意义更为广泛的问题,创立了伽罗华理论。代数方程的另一个极其重要的成果是代数学基本定理。在欧拉和达朗贝尔

研究的基础上，由高斯在1799年圆满地完成了它的证明。除了研究一元n次方程的理论之外，从17世纪下半叶开始，从研究线性方程组的解法出发，在莱布尼茨(G. W. Leibniz, 1646—1716)、凯莱(A. Cayley, 1821—1895)等的努力下，产生了以矩阵、线性变换等为主要内容的线性代数。这标志着高等代数理论体系的建立。

这一时期，由于代数学研究的中心是方程理论，因此，人们把代数学看成是研究代数方程理论的科学，这是代数学的第二个观点，也称为古典观点。反映这种观点的典型著作是19世纪中叶数学家舒尔(I. Schur, 1819—1885)的《代数学》。

3. 代数学是研究各种代数结构的科学

19世纪，在伽罗华理论和哈密顿四元数的深刻影响下，出现了向量、矩阵、线性变换等一系列更具一般性的研究对象，使代数学的研究内容与研究方法发生了巨大的变革，从原来以研究代数方程的理论为中心，转向研究定义在任意性质的元素集上的各种代数结构，产生了包括群论、环论、向量空间、线性代数、同调代数等内容庞大的数学分支。这一时期，数学开始进入抽象代数或近世代数发展阶段。

抽象代数是在数学抽象化、严格化和合理化思想的影响下产生的。在抽象代数中，遵循不同的公理系统，便形成不同的代数结构。因此，人们把这一时期的代数学理解为研究各种代数结构的科学。这是代数学的第三个观点，也是近代观点。反映这种观点的代表作是范德瓦尔登(Vandev Waerden)在1930—1931年出版的《近世代数学》。

二、作为教学科目的中学代数

中学代数教材内容大体属于初等代数范畴，但作为教学科目的中学代数，与作为一门科学的初等代数相比，无论性质还是内容的广度、深度，以及体系编排等方面都有着很大的差别。

作为教学科目的中学代数，其内容选编的依据是中学数学课程标准，应突出体现基础性、普及性和发展性。首先，教材选取的内容应当是现实的、有意义的、富有挑战性的，这些内容要有利于学生主动地进行观察、实验、猜测、验证、推理与交流等数学活动，有利于生活工作需要和进一步深造学习，有利于获得对数学本质特征和应用价值的正确认识，有利于数学能力和数学素养的培养提高。其次，要考虑普及性，选取内容应是人人都能学得的、有价值的，要宽而浅，是绝大多数学生通过努力都能够理解掌握的。再次，要注意统一性与灵活性相结合，着眼于每一个学生的发展，既要有一个基本的统一要求，又要给部分学有余力的学生留有拓展的空间；第四，还要注意教材内部以及外部与其他相关科目教材之间的衔接联系等。

根据上述要求，中学代数选编的内容主要包括有理数、实数和复数的概念及运算；代数式与初等超越式的概念、性质和变换；集合函数的初步知识和基本初等函数的性质与图像；代数方程和简单初等超越方程(组)的解法；不等式的解法与一元不等式(组)的解法；数列、数学归纳法、排列与组合、二项式定理、概率与统计初

步、导数及其应用、初等数论初步、矩阵变换、坐标系与参数方程、优选法与试验设计初步、统筹法与图论初步、风险与决策、开关电物与布尔代数等。这些内容属于多个数学分支，因此，中学代数实际上是一门综合性的学科。由于这些内容间的关系问题以及教学法的原因，内容编排上必须采取交叉安排的方式，内容叙述上适当采用描述的办法，理论上的要求不可能十分严谨，内容的深度与广度都有一定的局限性。

三、学习中学代数研究与教学课程的必要性

初等数学与高等数学是不同发展阶段的数学成果，它们之间的联系当然是十分密切的。高等数学的学习无疑有助于深化对初等数学的理解，有助于提高处理解决初等数学问题的专业素养，但初等数学有自身完整的知识体系，有不同于高等数学的研究对象、研究方法和语言特色，是其他任何高等数学分支都不能涵盖和代替的。对一个合格的中学数学教师来说，仅有高等数学和中学数学的知识素养是不够的，还必须结合中学数学的教学需要，有针对性地对初等数学进行比较全面、系统、深入的学习研究。

中学代数中许多概念的引进都是描述性的，有些数学命题的证明是不严格的，甚至是未加证明的，其知识体系是不够系统的，甚至是零乱的，一些广泛使用的数学方法的理论根据是不清楚的。这其中有些问题通过高等数学学习是可以部分解决的，但多数问题还必须通过对初等代数的专题研究才能有较为明确的解决。通过对本书的学习，首先应能对初等代数的知识体系有较系统的把握，对初等代数解决问题的方法有较理性的认识；其次能对中学代数中未作研究或研究不够的内容进行一些拓展学习，使学习者将来能够用初等代数学和高等数学的观点审视处理中学代数教学内容。

本册教材的命名意在强调针对性和目的性，其内容编排紧密结合中学代数内容的教学需要来设计。前三章综合对初等代数相关内容作专题研究；第四章对统计与概率的基础知识作了概括介绍；第五、六章对中学代数教学中的典型解题方法和实际应用作了归类和探讨；第七章就中学代数各主要部分教学的处理设计问题结合案例进行了分析研究。

第一章　数　与　式

数与式都是初等代数最基本的概念，是研究方程、不等式、函数和其他数学分支知识的基础。本章首先介绍数概念的形成与扩展、数的运算与性质、数的近似计算等内容。在此基础上，对多项式、分式、根式、指数式、对数式等内容进行研究。通过本章的学习，以期达到深入把握数与解析式的概念、性质和运算法则，熟练进行各种解析式的恒等变形的目的，为中学代数相关内容的教学打下基础。

第一节　数系的扩展

一、数的形成与扩展

数是数学最基本的研究对象，也是一切科学技术和社会领域中必不可少的工具。历史上，数的概念起源于人类生产和生活中计数的需要。经过漫长的岁月，逐步从具体事物的集合中分离出来，形成抽象的正整数，并给出了表示符号。从历史上看，正整数产生之后，数概念的扩展过程大致如下：

正整数$\xrightarrow{\text{正分数}}$正有理数$\xrightarrow{\text{零}}$非负有理数$\xrightarrow{\text{负有理数}}$有理数$\xrightarrow{\text{无理数}}$实数$\xrightarrow{\text{虚数}}$复数。

值得注意的是，历史上数概念的扩展是交错进行的。例如，还没有认识负数之前，早就发现了无理数；在实数理论还未完全建立之前，就已经运用虚数解三次方程了。

近代数学关于数的理论，是在总结了数概念历史发展的基础上，运用代数结构的观点和比较严格的公理系统加以整理而建立起来的。理论上采用的数概念的扩展过程是：

自然数集($\mathbf{N}$) → 整数集($\mathbf{Z}$) → 有理数集($\mathbf{Q}$) → 实数集($\mathbf{R}$) → 复数集($\mathbf{C}$)。

理论上，数集的扩充通常采用两种方法：一是添加元素法，即把新元素直接添加到已建立的数集中去；二是构造法，即从理论上构造一个集合，然后指出这个集合的真子集与先前的数集是同构的。

无论是添加元素法还是构造法，由数集 A 扩充到数集 B 都应遵循以下原则：

(1) A 是 B 的真子集，即 $A \subset B$；

(2) 在数集 B 中定义的一些基本关系与运算，对于作为 B 的真子集 A 的元素，

这样的定义与 A 中原有的关系与运算的定义应是一致的，并需保持它们在数集 A 中的一些主要性质；

(3) 数集 A 中不是总能实施的某种运算，在数集 B 中总能实施；

(4) 数集 B 应当是数集 A 的所有具有上述三个性质的扩展中的唯一最小扩展（在同构观点下）。

这里有两点需要指出：

第一，数集的每一次扩展都解决了原数集中不能解决的一些矛盾，从而使其应用范围扩大，但是每次扩展也会失去某些性质。例如，从自然数集 $\mathbf{N}$ 扩充到整数集 $\mathbf{Z}$ 后，$\mathbf{Z}$ 对减法具有封闭性，但却失去了 $\mathbf{N}$ 的良序性，即 $\mathbf{N}$ 中任何非空子集都有最小元素。又如，由实数集 $\mathbf{R}$ 扩充到复数集 $\mathbf{C}$ 后，$\mathbf{C}$ 使任何代数方程都有根，但却失去了 $\mathbf{R}$ 的顺序性，即 $\mathbf{C}$ 中元素已无大小可言。

第二，数集扩展到复数之后，能否继续扩展?这个问题的回答是有条件的。如果要求完全满足复数集的全部运算性质，那么任何扩充都是不可能的。但是，如果舍弃某些要求，进一步扩展则是有可能的。例如，舍去乘法交换律，可将复数集扩充到四元数集。

目前，我国中小学数学课程中关于数的概念基本上是按照历史的扩展过程进行的。但为了适应学生的年龄特征和接受能力，采用渗透近代数学观点、添加元素并强调运算的方法作了适当的教学法加工，其过程如下：

正整数集 $\xrightarrow{\text{零}}$ 自然数集 $\xrightarrow{\text{正分数}}$ 算术数集 $\xrightarrow{\text{负有理数}}$ 有理数集 $\xrightarrow{\text{无理数}}$ 实数集 $\xrightarrow{\text{虚数}}$ 复数集。

二、自然数理论

自然数的概念在历史上有不同的认识，最初的自然数是不包含0的，但1993年国家技术监督局颁布的《中华人民共和国国家标准》把0加入到了自然数集，而把非0的自然数组成的数集称为正整数集，记为 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}^+$。

尽管自然数的含义发生了变化，但自然数的作用并没有变化。已经知道，自然数具有两种作用：一是用来计数（有几个），二是用来排序（第几个）。由此可抽象出自然数的两种理论，一种是自然数的基数理论，另一种是自然数的序数理论。

1. 自然数的基数理论

基数理论是以原始概念“集合”为基础的。

把一切集合按对等关系分类，使所有对等的集合归为一类，这时同一类集合有一种共同的特征。例如：

(1) {一头牛}、{一匹马}、{一个手指}、$\{a\}$ 等，它们都是对等的集合，应归为一类。这里，显然，牛、马、手指、字母不是它们的共同特征，而只有“1”才是它们共同特征的标志；

(2) {5只羊}、{5棵树}、{5个人}、$\{a,b,c,d,e\}$ 等,它们都是对等的集合,应归为一类。显然,羊、树、人、字母不是它们的共同特征,而只有"5"才是它们共同特征的标志。

定义1 一切对等集合的共同特征的标志称为这些集合的基数(或势)。有限集的基数叫做自然数。若集合 A 与 B 的基数相同,则记作 $A \sim B$。

不含任何元素的集合,它的基数记作0;只含有一个元素的有限集,它的基数记作1;含有两个元素的有限集,它的基数记作2…… 从而得自然数0,1,2,3,…。

在定义了自然数以后,就可利用集合的知识来定义自然数集中元素间的大小关系和四则运算。

定义2 设 a,b 分别是有限集合 A,B 的基数。

(1) 若 $A \sim B$,则称 a 等于 b,记作 $a = b$;

(2) 若 $A \sim B' \subset B$,则称 a 小于 b,记作 $a < b$;

(3) 若 $A \supset A' \sim B$,则称 a 大于 b,记作 $a > b$。

定义3 设有限集 A,B,C 的基数分别是 a,b,c,$A \cap B = \varnothing$。如果 $C = A \cup B$,则 c 叫做 a 与 b 的和,记作 $a + b = c$,a 和 b 叫做加数。求两数和的运算叫做加法。

定义4 设 b 个对等集合 $A_1,A_2,\cdots,A_b$(其中任何两个集合均不相交)的基数都是 a。若 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_b = C$,则称集合 C 的基数 c 为 a 与 b 的乘积,记作 $a \times b = c$(或 $a \cdot b = c$,或 $ab = c$)。a 称为被乘数,b 称为乘数。求两数积的运算叫做乘法。

根据乘法定义可推出下面的结论:

求自然数 a 乘以 b 的积就是求 b 个相同加数 a 的和。

事实上,$A_1,A_2,\cdots,A_b$ 彼此不相交,它们的基数都是 a,可设

$$A_1 = \{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_a\},$$
$$A_2 = \{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_a\},$$
$$\cdots\cdots$$
$$A_b = \{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_a\},$$

其中 $\alpha_i,\beta_j,\cdots,\gamma_k$ 互不相同,$i,j,\cdots,k$ 都是由1到 a 的自然数。

它们的并集 $C = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_b = \{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_a,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_a,\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_a\}$。由定义3可知,并集 C 的基数为

$$c = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{b个a}。$$

而由定义4可知,C 的基数 $c = a \cdot b$,所以有

$$a \cdot b = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{b个a}。$$

根据上述定义,在自然数集范围内,容易利用集合论知识论证如下结果:

(1) 两个自然数的和与积都是唯一存在的;

(2) 加法、乘法的基本运算律: