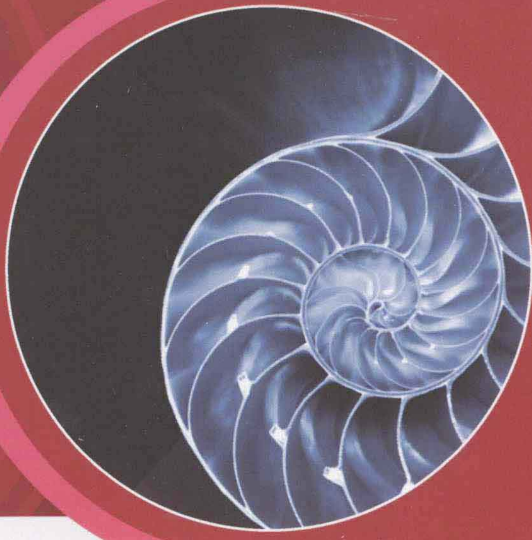
普通高等教育“十一五”国家级规划教材
普通高等教育机械类国家级特色专业系列规划教材



计算机辅助几何造型技术

（第三版）

主编　常智勇　万　能

科学出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

普通高等教育机械类国家级特色专业系列规划教材

计算机辅助几何造型技术

（第三版）

主编　常智勇　万　能

科学出版社
北京

内 容 简 介

计算机辅助几何造型技术是复杂产品数字化设计和制造的基本技术，在机械、航空、航天、船舶、汽车、家电、消费类电子产品等制造业中有着广泛的应用。本书较全面地介绍了计算机辅助几何造型技术的基础知识，包括：曲线曲面的基本知识、样条曲线、贝齐尔曲线与曲面、B样条曲线与曲面、非均匀有理B样条曲线、三边形贝齐尔曲面，以及细分曲面、T样条、箱样条等。同时，本书还包括了计算机辅助几何造型技术的工程应用，包括：曲线曲面光顺、三维实体建模、逆向工程中的应用、等几何分析方法、MBD技术的应用、三维模型检索、复杂产品建模方法等。

本书可用作高等学校非数学类专业（如机械设计与制造、航空宇航设计与制造等专业）的本科生教材，也可供高等学校师生及有关工程技术人员自学参考。

图书在版编目(CIP)数据

计算机辅助几何造型技术/常智勇，万能主编. —3版. —北京：科学出版社，2013.3

普通高等教育"十一五"国家级规划教材·普通高等教育机械类国家级特色专业系列规划教材

ISBN 978-7-03-036502-6

Ⅰ.①计… Ⅱ.①常… ②万… Ⅲ.①计算机辅助设计-几何造型-高等学校-教材 Ⅳ.①TP391.72

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第012660号

责任编辑：朱晓颖 / 责任校对：郑金红

责任印制：闫 磊 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

铭浩印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年2月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2009年5月第 二 版 印张：17 1/2

2013年3月第 三 版 字数：448 000

2013年3月第五次印刷

定价：38.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

计算机辅助几何造型(computer aided geometric design，CAGD)技术是进行产品计算机辅助设计(computer aided design，CAD)与计算机辅助制造(computer aided manufacturing，CAM)的基础技术，在机械、航空、航天、船舶、汽车、家电、消费类电子产品等制造业有着广泛的应用。计算机辅助几何造型技术的内涵包括用数学理论描述曲线、曲面、实体、零部件、装配体等精确几何形状及其之间的包含、约束、配合关系等，并采用计算机和网络支持的手段对几何进行设计、显示、分析、调整、检索等操作。这些数学理论和建模操作软件工具是进行复杂产品的设计、分析、优化、制造的基础。目前国际主流的大型CAD/CAM集成软件系统都使用了先进的几何造型理论，并提供了方便快捷的操作工具。

全书内容分为基础知识和工程应用两部分。

第1～7章为基础知识部分。第1章介绍曲线曲面的基本知识，学生可以从中了解矢量代数基础、曲线曲面的基础、直纹面和可展曲面。第2章重点讲述样条曲线，包括三次样条曲线、参数样条曲线、Ferguson曲线，并且给出应用例子。第3章讲述最常用的贝齐尔曲线与曲面，主要包括贝齐尔曲线的定义与性质、贝齐尔曲线的几何作图法、贝齐尔曲线的合成、贝齐尔曲线的升阶与降阶、贝齐尔曲面、贝齐尔曲面的合成、贝齐尔曲线曲面的应用。第4章讲述B样条曲线与曲面，包括B样条曲线的定义与性质、三次均匀B样条曲线、三次均匀B样条曲线的插值、双三次B样条曲面、B样条曲面的应用。第5章讲述非均匀有理B样条曲线与曲面(NURBS)，介绍非均匀B样条曲线与曲面的定义、性质和配套技术。第6章介绍三边贝齐尔曲面片，包括三边贝齐尔曲面片的表示、几何作图法、方向导矢，以及三边曲面片的连续性。第7章介绍近年来新发展的细分曲面技术，包括细分曲面的基本概念、T样条和Box样条的概念，以及细分曲面的基本应用。

第8～15章为工程应用部分。第8章介绍曲线曲面光顺，包括曲线曲面光顺的基本概念、曲线光顺方法和曲面光顺方法，主要是各种算法的原理和步骤。第9章介绍三维实体几何建模的基础知识、参数化/变量化造型技术，以及商品化几何建模核心。第10章介绍逆向工程，包括基本概念、数据采集和处理技术、模型重建方法，以及逆向工程的应用等。第11章结合CAD和CAE的技术发展思路，介绍了能够进行统一建模和分析的等几何方法，包括传统CAE方法分析、样条元技术，以及等几何分析的基本思想。第12章讲述了全三维模型在设计制造过程中的应用，也即MBD(model based definition，基于模型的定义)，重点介绍了MBD在机加工艺中的应用、基于工艺知识的建模方法、工序模型的一致性维护，以及工序模型的更改方法等，并给出了应用实例。第13章介绍了基于内容的三维模型检索技术，包括体系结构、关键技术，以及常见的三维模型检索系统。第14章介绍了虚拟现实与增强现实的概念、应用，以及关键技术。第15章以航空发动机涡轮叶片为例，介绍了复杂产品结构设计建模的方法，包括叶片曲面建模方法和复杂特征建模方法。第16章给出了两个配套的课程实验。

作为非数学类专业的本科生教材，本书省略了大量的数学推导和证明，考虑到目前自由曲线和曲面技术的广泛应用，以讲解基本理论和概念以及工程应用为主，希望学生在使用本书后，能够对计算机辅助几何造型技术的技术本质和应用范围有一个较为透彻和深入的了解，对

当前流行的CAD软件中的功能，不仅知其然而且知其所以然。“计算机辅助几何造型技术”课程学时约为50～60学时，以本书基础知识部分作为主要授课内容，其中带＊的章节可作为选修内容。

本书由常智勇、万能主编。第1章、第2章、第3章、第4章、第8章由常智勇编写，第7章、第11章、第13章、第16章由万能编写，第5章、第9章、第10章、第14章由孙惠斌编写，第6章、第12章、第15章由赵杰编写。陈涛、张欣参与了部分章节的材料整理和数据处理工作。

由于编者水平有限，书中的错误及不妥之处在所难免，敬请读者不吝指正。

编　者

2012年12月

符号使用说明

符号类型	表示方式	示例
标量	小写非黑体字母	$\lambda \quad a_1$
矢量	黑体字母或带上箭头线的字母	$\boldsymbol{a} \quad \overrightarrow{OA}$
	写在中括号内,以逗号分隔的三个坐标分量	$[a_1, a_2, a_3]$
单位坐标轴	小写黑体的 i、j、k	$\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{k}$
矢量的模	取模符号	$\lvert\boldsymbol{a}\rvert=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$
一般参数导矢	变矢量右上角带单引号	$\boldsymbol{r}'(t_0)$
弧长参数	小写字母 s	s
自然参数方程	以弧长参数 s 作为自变量的参数方程	$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)=[x(s), y(s), z(s)]$
自然参数导矢	变矢量正上方带黑点	$\dot{\boldsymbol{r}}(s) \quad \dot{\boldsymbol{T}}(s) \quad \ddot{\boldsymbol{r}}(s)$

目　录

第 1 章　曲线曲面的基本知识

在计算机辅助设计与制造中，微分几何中的许多知识是基础，常用到如曲线曲面用矢函数表示，曲线曲面上的切矢、法矢、二阶导矢和曲率，需要构造切平面、法平面和等距面等等。如在加工中用球头刀加工曲面时，刀心轨迹和被加工表面都是等距面问题。而欲构造等距面，就必须计算切矢、法矢。又如在两段或更多段曲线（曲面）要达到光滑拼接时，常要求两者达到位置、切矢、曲率连续；为防止数控加工中发生过切，要求在切触点处工件的曲率半径大于刀具的曲率半径；在数据处理中，应使曲率连续变化，等等；这些都需要计算曲率。因此学好本章的内容可为后面掌握曲线、曲面造型技术奠定良好的基础。

本章主要叙述矢量代数基础、曲线论基本公式、曲面论预备知识、直纹面与可展曲面。

1.1　矢量代数基础

1.1.1　矢量

1. 矢量表示

矢量：既有大小又有方向的量，也称为向量，如速度、加速度等。与之对应，只有大小而没有方向的量称为标量。

矢量依据其始端是否位于原点分为绝对矢量和相对矢量。

绝对矢量：用来表示定义形状的点，一个点意味着空间的一个位置，由绝对矢量的末端（即矢端）给出。

相对矢量：表示点与点间相互位置关系（如边矢量、一阶导矢）、矢量与矢量间相互关系（如高阶导矢）的矢量。相对导矢量又成为自由矢量，可以不依赖于坐标原点，在空间任意平移。

位置矢量：表示空间点位置的绝对矢量称为该点的位置矢量。

如图 1-1 从原点 O 到 A 点连线 $\overrightarrow{OA}$ 表示一个矢量，用小写黑体字母 $\boldsymbol{a}$ 或 $\overrightarrow{OA}$ 表示。$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别表示三个坐标轴的基本矢量，则矢量 $\boldsymbol{a}$ 可表示为

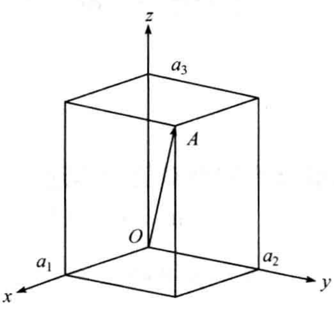


图 1-1　位置矢量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k} \quad &(\text{矢量 } \boldsymbol{a} \text{ 的坐标表示})\\ &=[a_1, a_2, a_3] \quad &(\text{矢量 } \boldsymbol{a} \text{ 的数组表示})\end{aligned} \tag{1-1}$$

常矢量：大小和方向不变的矢量。

变矢量：大小或方向变化的矢量。

矢量的模：矢量的长度（或大小）称为它的模。例如：矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$。

单位矢量：长度等于 1 的矢量称为单位矢量，用 $\boldsymbol{E}$ 表示，$\boldsymbol{E}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$。

2. 两矢量的数积

两个矢量的数积(或称内积、点积)为一个标量。已知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 两个矢量,$\boldsymbol{a}=[a_1,a_2,a_3]$,$\boldsymbol{b}=[b_1,b_2,b_3]$,则这两个矢量的内积为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \tag{1-2}$$

其中,θ 为两个矢量的夹角,当 $\theta=90°$时,即两矢量互相垂直时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$。

性质:

1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$。

2) 设 λ 为一个常数,则满足 $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$。

3) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$。

3. 两矢量的矢积

两个矢量的矢积(或称外积、叉积)还是一个矢量,即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$。其特点是:

1) $\boldsymbol{c}$ 的方向同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,且按右手法则。

2) $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\theta$(矢积值为以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积)。

3) 若 $\boldsymbol{a}=[a_1,a_2,a_3]$,$\boldsymbol{b}=[b_1,b_2,b_3]$,则矢量积可以表示为如下行列式。

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix} \tag{1-3}$$

性质:

1) 若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,且 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都为非零矢量,则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$,即零矢量。

2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$。

4. 三个矢量的混合积

三个矢量的混合积,即两个矢量的矢积与一个矢量作数积,记作 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} \tag{1-4}$$

其混合积的绝对值为以这三个矢量为边的平行六面体的体积,并且

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})=-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})$$

5. 三个矢量的二重矢积

已知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 三个矢量,则这三个矢量的二重矢积还是一个矢量

$$\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} \tag{1-5}$$

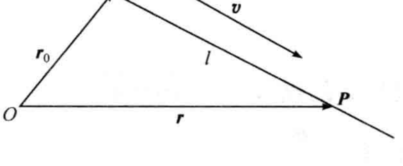


图 1-2　直线

1.1.2　直线的矢量方程

如图 1-2 所示,已知直线 l 上一点 $\boldsymbol{P}_0$ 径矢为 $\boldsymbol{r}_0$,$\boldsymbol{v}$ 为平行于直线 l 的任意固定不为零的矢量,若 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}$为直线上任意一点 $\boldsymbol{P}$ 的径矢,λ 为常数,则直线 l 的矢量方

程可写成

$$\boldsymbol{r} = \lambda \boldsymbol{v} + \boldsymbol{r}_0 \quad -\infty \leqslant \lambda \leqslant \infty \tag{1-6}$$

1.1.3 平面的矢量方程

设已给平面 π 上任意一个定点 $\boldsymbol{P}_0$ 的径矢为 $\boldsymbol{r}_0$ 和与平面 π 垂直的任意不为零的矢量 $\boldsymbol{n}$。若 $\boldsymbol{r}$ 为平面 π 上任意一点 $\boldsymbol{P}$ 的径矢，则 $\overrightarrow{P_0P}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直，如图 1-3 所示，则有 $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0$，这就是平面 π 的方程。

例 1-1 已知一平面内不在同一直线上的三个点 $\boldsymbol{P}_0$、$\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$，它们的径矢分别为 $\boldsymbol{r}_0$、$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$，求此平面的方程。

解 如图 1-4 所示，设 $\boldsymbol{r}_0$、$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$ 在平面 α 上且不在同一直线上，矢量 $\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0$、$\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_0$ 也在平面 α 上，则此平面的法矢为 $\boldsymbol{n}=(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)\times(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_0)$。

设点 $\boldsymbol{P}$ 为平面 α 上任意一点，径矢为 $\boldsymbol{r}$，则此平面的方程为

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot[(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)\times(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_0)]=0$$

化简后得所求的平面方程为

$$\boldsymbol{r}\cdot[(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)\times(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_0)]=\boldsymbol{r}_0\cdot(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)$$

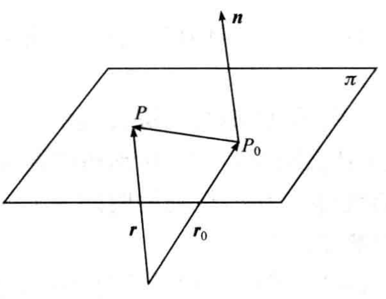


图 1-3 平面

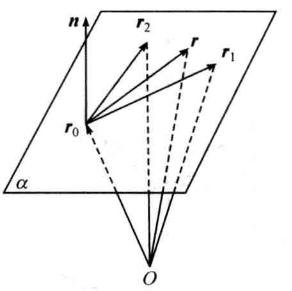


图 1-4 求平面方程例题

1.2 曲 线 论

对于飞机、汽车及其他一些具有复杂外形的产品，计算机辅助设计与制造的一个关键性环节，就是用数学方法来描述它们的几何形状，并在此基础上建立它们的几何模型。为了解决应用中的实际问题，我们需要了解一些微分几何知识，如曲线，曲面的矢函数表示等。

1.2.1 曲线的矢量方程和参数方程

图 1-5 中设空间一点 $\boldsymbol{P}$ 的位置矢量有三个坐标分量，若对应变量 $t\in[t_0,t_1]$ 里的每一个 t，点 $\boldsymbol{P}$ 随变量 t 变化，点 $\boldsymbol{P}$ 的运动轨迹是一条空间曲线，也就是空间矢量端点运动形成的矢端曲线。其矢量方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=[x(t),y(t),z(t)] \qquad t\in[t_0,t_1)$$

此式又称为单参数 t 的矢函数。

它的参数方程为

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \qquad t\in[t_0,t_1] \\ z=z(t) \end{cases} \tag{1-7}$$

一般来说，给定一个具体的单参数的矢函数，即给定一个具体的参数曲线方程，它既决定了所表示曲线的形状，也决定了该曲线上的点与参数域（参数的取值范围）内的点（即参数值）之间的一种对应关系，如图 1-6 所示。

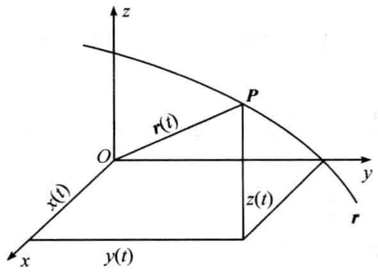


图 1-5　曲线上一点 **P** 表示为参数 t 的矢函数

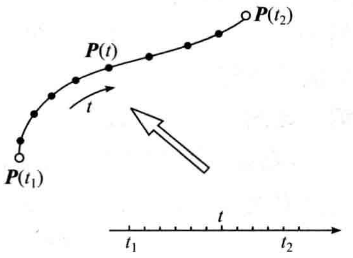


图 1-6　曲线上的点与参数域内的点的对应

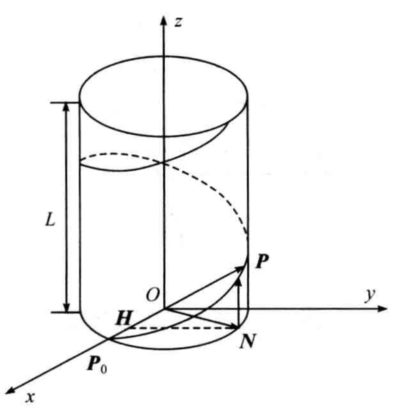


图 1-7　螺旋线

在参数方程中的参数可以不具有几何意义，并且参数的选取是不唯一的。

例 1-2　如图 1-7 所示，已知圆柱螺旋线的半径为 a，圆柱高度为 L，动点 **P** 做圆周运动的转动角速度为 ω，沿 z 轴做直线运动的线速度为 v，运动的时间为 t，求圆柱螺旋线矢量方程和参数方程。

解　首先选取起始平面的圆心 O 为坐标原点，过动点的起始位置 $\boldsymbol{P}_0$ 作 x 轴，建立右手坐标系 $Oxyz$。然后，连接原点 O 到动点的任一位置 **P**，得矢量 $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OP}$ 的端点轨迹是螺旋线，则它的矢端曲线方程为

$$\boldsymbol{r}(t)=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NP}$$

$$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HN}=a\cos(\omega t)\boldsymbol{i}+a\sin(\omega t)\boldsymbol{j}$$

$$\overrightarrow{NP}=vt\boldsymbol{k}$$

所以螺旋线矢量方程为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(t)&=a\cos(\omega t)\boldsymbol{i}+a\sin(\omega t)\boldsymbol{j}+vt\boldsymbol{k}\\ &=[a\cos(\omega t),a\sin(\omega t),vt] \qquad t\in\left[0,\frac{L}{v}\right]\end{aligned}$$

它的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos(\omega t) \\ y=a\sin(\omega t) \qquad t\in\left[0,\frac{L}{v}\right] \\ z=vt \end{cases}$$

1.2.2 矢函数的导矢及其应用

1. 矢函数的求导

曲线上的点是参数 t 的矢函数，对曲线求导也就是对矢函数的求导，即对曲线参数 t 求导，它等于对各个分量分别对参数 t 的求导。在形式上和标量函数相同，设矢函数

$$\boldsymbol{r}(t)=[x(t),y(t),z(t)] \tag{1-8}$$

$\boldsymbol{r}(t)$在区间$[t_1,t_2]$上连续，有 t_0 和 $t_0+\Delta t(\Delta t\neq 0)$都在这个区间里，若极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t} \tag{1-9}$$

存在，则 $\boldsymbol{r}(t)$称为在 t_0 是可微的，这个极限称为 $\boldsymbol{r}(t)$在 t_0 的导矢，用 $\boldsymbol{r}'(t_0)$或$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0}$ 表示

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0}=\boldsymbol{r}'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t} \tag{1-10}$$

导矢具有极其重要的几何意义。如图 1-8 所示。设 $\boldsymbol{P}_0$ 是曲线上固定点，$\boldsymbol{P}$ 为沿曲线趋于 $\boldsymbol{P}_0$ 时，曲线弦 $\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}$ 有极限位置，即为曲线在 $\boldsymbol{P}_0$ 的切线。$\boldsymbol{r}'(t_0)$则称为曲线在 $\boldsymbol{P}_0$ 点的切矢。

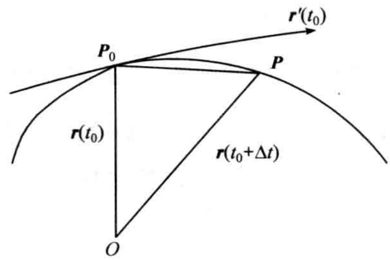


图 1-8 矢函数的导矢

若 $\boldsymbol{r}(t)=[x(t),y(t),z(t)]$，在区间$[t_1,t_2]$上是可微的，则称它为在这个区间里是可微的。矢函数 $\boldsymbol{r}'(t)$称为 $\boldsymbol{r}(t)$的导矢。有

$$\boldsymbol{r}'(t)=[x'(t),y'(t),z'(t)] \tag{1-11}$$

曲线采用参数表示后，就有了方向。曲线的方向对应于曲线上参数增加的方向。曲线在一点的方向即曲线在该点的切线方向，也就是曲线在该点的切矢的方向。

对矢函数求导就等于对矢函数各个坐标分量求导，矢函数的导矢还是矢函数。因此，矢函数 $\boldsymbol{r}(t)$的导矢 $\boldsymbol{r}'(t)$有大小和方向，$\boldsymbol{r}'(t)$方向是切线的方向，切矢和各阶导矢都是相对矢量，可以在空间任意平移。$\boldsymbol{r}'(t)$大小为$|\boldsymbol{r}'(t)|$，即

$$|\boldsymbol{r}'(t)|=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2} \tag{1-12}$$

2. 矢函数的求导公式

矢函数的求导公式有：

$$C'=0 \quad (C\text{ 为常矢量}) \tag{1-13}$$

$$[\boldsymbol{r}_1(t)+\boldsymbol{r}_2(t)]'=\boldsymbol{r}'_1(t)+\boldsymbol{r}'_2(t) \tag{1-14}$$

$$[K\boldsymbol{r}(t)]'=K\boldsymbol{r}'(t) \quad (K\text{ 为常数}) \tag{1-15}$$

$$[f(t)\cdot\boldsymbol{r}(t)]'=f'(t)\cdot\boldsymbol{r}(t)+f(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t) \tag{1-16}$$

$$[\boldsymbol{r}_1(t)\cdot\boldsymbol{r}_2(t)]'=\boldsymbol{r}'_1(t)\cdot\boldsymbol{r}_2(t)+\boldsymbol{r}_1(t)\cdot\boldsymbol{r}'_2(t) \tag{1-17}$$

$$[\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)]'=[\boldsymbol{r}'_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)]+[\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}'_2(t)] \tag{1-18}$$

高阶导矢

$$\begin{gathered}\boldsymbol{r}''(t)=[x''(t),y''(t),z''(t)]\\ \cdots\cdots\\ \boldsymbol{r}^{(n)}(t)=[x^{(n)}(t),y^{(n)}(t),z^{(n)}(t)]\end{gathered} \tag{1-19}$$

对于复合函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t),\quad t=\varphi(u)$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}u}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}=\boldsymbol{r}'(t)\varphi'(u) \tag{1-20}$$

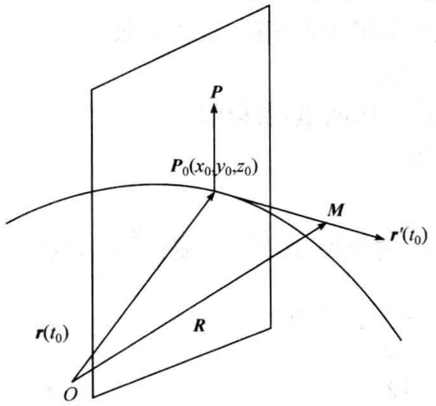


图 1-9　曲线上任一点的曲线和法平面

3. 导矢在几何上的应用

(1) 曲线上任一点的切线方程和法平面方程

设已知曲线方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，如图 1-9 所示，求曲线上任一点 $\boldsymbol{P}_0$ 处 $\boldsymbol{r}(t_0)=[x_0,y_0,z_0]$的切线方程和法平面方程。

1) 求过点 $\boldsymbol{P}_0(x_0,y_0,z_0)$的切线方程。

因为曲线方程为 $\boldsymbol{r}(t)=[x(t),y(t),z(t)]$，故曲线 $\boldsymbol{P}_0$ 点的切矢为

$$\boldsymbol{r}'(t_0)=[x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)]$$

则曲线在 $\boldsymbol{P}_0$ 的切线方程为

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}(t_0)+\lambda\boldsymbol{r}'(t_0) \tag{1-21}$$

其中，$\boldsymbol{R}=[x_1,y_1,z_1]$为切线上任一点 $\boldsymbol{M}$ 的径矢，λ 为切线上的参数。

过 $\boldsymbol{P}_0$ 点切线的参数方程可写为

$$\begin{cases}x_1=x_0+\lambda x'(t_0)\\ y_1=y_0+\lambda y'(t_0)\\ z_1=z_0+\lambda z'(t_0)\end{cases}\qquad \lambda\in(-\infty,+\infty) \tag{1-22}$$

消去 λ，故过 $\boldsymbol{P}_0$ 点切线方程又可写为

$$\frac{x_1-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y_1-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{z_1-z(t_0)}{z'(t_0)} \tag{1-23}$$

2) 求过 $\boldsymbol{P}_0$ 点的法平面方程。

经过 $\boldsymbol{P}_0$ 点而垂直于切线的每一条直线，称为曲线在 $\boldsymbol{P}_0$ 的法线。所有这些法线位于经过 $\boldsymbol{P}_0$ 点而垂直于切线的平面上，这个平面称为曲线在 $\boldsymbol{P}_0$ 点的法平面。

设 $\boldsymbol{P}$ 为法平面上一点，如图 1-9 所示，所以过 $\boldsymbol{P}_0$ 点法平面的矢量方程为

$$\boldsymbol{r}'(t_0)\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$$

即

$$\boldsymbol{r}'(t_0)\cdot[\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}(t_0)]=0 \tag{1-24}$$

或

$$x'(t_0)[x_1-x(t_0)]+y'(t_0)[y_1-y(t_0)]+z'(t_0)[z_1-z(t_0)]=0 \tag{1-25}$$

注意公式(1-24)和(1-25)是隐式的而不是显式的平面方程。

显式曲线曲面方程，如公式(1-29)、(1-30)、(1-75)等，可以用来明确地确定曲线曲面方程的参数与空间点之间的对应关系；而隐式方程，则可以方便地判断空间点是否位于曲线或曲面上。本书所涉及的主要是曲线曲面的显式方程。

(2) 平面曲线的等距线

等距线在 CAD/CAM 中的应用比较广泛，例如在数控铣床加工零件时，铣刀中心轨迹和零件外形相差一个铣刀半径的距离，如图 1-10 所示。理论外形曲线，相应的也有结构内形曲线，它们只相差一个蒙皮厚度或零件的壁厚。这些都是等距线在生产实际中的应用。

先给出等距线的定义：已知一条曲线 r，沿曲线每一点($\boldsymbol{M}$)的法线方向，分别向曲线内部和外部移动一段距离 a，则分别得到一组新点($\boldsymbol{M}_1$ 或 $\boldsymbol{M}_2$)的轨迹 r_1 和 r_2，称为曲线 r 的等距线，如图 1-11 所示。

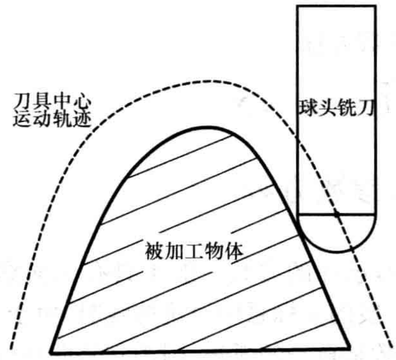


图 1-10　数控加工中的等距线

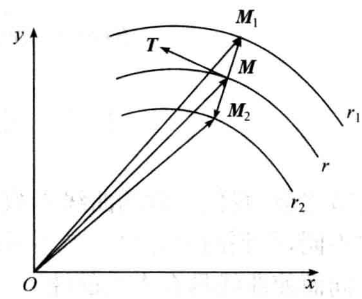


图 1-11　等距线

设已知曲线 r 矢量方程为

$$\boldsymbol{r}(t) = [x(t),\ y(t)]$$

求法向距离为 a 的等距线方程。

建立坐标系 Oxy，从图 1-11 中可知

$$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM_1} \tag{1-26}$$

其中，$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}(t)$。

设 $\boldsymbol{M}$ 点的单位切矢为 $\boldsymbol{T}$，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}&=\left[\frac{x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}},\frac{y'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}}\right]\\&=\left[\frac{x'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|},\frac{y'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}\right]\end{aligned} \tag{1-27}$$

$\boldsymbol{T}$ 的正向指向曲线参数 t 增长的方向。

取垂直于 Oxy 平面的方向为 z 轴，令 z 轴方向上的单位矢量为 $\boldsymbol{k}$，则法线方向的单位法矢为

$$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{x'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|} & \dfrac{y'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\left[\frac{y'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|},-\frac{x'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|},0\right] \tag{1-28}$$

把 $\overrightarrow{MM_1}=a\boldsymbol{N}$ 代入到式(1-26)，得到等距线为 a 的矢量方程为

$$\boldsymbol{R}(t)=\overrightarrow{OM_1}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MM_1}=\boldsymbol{r}(t)+a\boldsymbol{N} \tag{1-29}$$

等距线的参数方程为

$$
\begin{cases}
x_1 = x'(t) + \dfrac{a y'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|} \\[2ex]
y_1 = y'(t) - \dfrac{a x'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}
\end{cases}
\tag{1-30}
$$

同理，可由$\overrightarrow{OM_2}$确定另一条等距线矢量方程和参数方程。

$$
\boldsymbol{R}(t) = \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{MM_2} = \boldsymbol{r}(t) - a\boldsymbol{N}
$$

1.3　曲线的自然参数方程

在这节之前，我们了解的曲线参数是任意参数 t，这样的参数一般不具有几何意义，由于参数选取不同，得到的方程也会是不同的。所以在一般的坐标系中讨论曲线时，由于人们选取参数的不同而使曲线具有人为的性质。曲线自然参数是自身的弧长，因为它是曲线（对于刚体运动）的不变量，它不依赖于坐标系的选取，即不管坐标系如何选取，只要在其上取一初始点，确定一个方向，取一个单位长度，则曲线的弧长和参数增长方向便完全确定了。所以我们取曲线本身的弧长作为参数，研究曲线的一些性质，这对实际应用和理论分析，都会带来很多方便。

1.3.1　自然参数方程

设有一条空间曲线 $\boldsymbol{r}$ 在其上任取一点 $\boldsymbol{P}_0(x_0, y_0, z_0)$ 作为计算弧长的初始点，如图 1-12 所示，曲线上其他点 $\boldsymbol{P}(x, y, z)$ 到 $\boldsymbol{P}_0$ 之间的弧长是可以计算的（用弧长积分公式或累计弦长公式）。

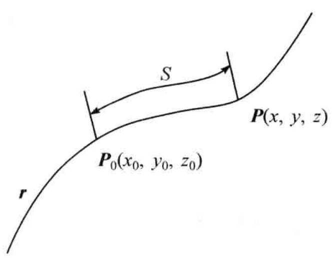


图 1-12　弧长参数化

这样，曲线上每一点的位置与它的弧长之间有一一对应的关系。以曲线弧长作为曲线方程的参数，这样的方程称为曲线的自然参数方程，弧长则称为自然参数。这就是说曲线上点的坐标 (x, y, z) 都是以弧长为参数的函数，它的矢量方程为

$$
\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s) = [x(s), y(s), z(s)] \tag{1-31}
$$

一般曲线上关于参数 t 的一阶导矢为零的矢量，被说成是切矢消失，这样的点称为奇点，曲线上切矢为非零的点称为正则点。若给定一个参数，其参数域内处处一阶导矢为非零矢量，则称参数化为正则的，所定义的曲线称为正则曲线。

设曲线的矢量方程为

$$
\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)] \tag{1-32}
$$

因为

$$
\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}'(t) = [x'(t), y'(t), z'(t)]
$$

$$
|\boldsymbol{r}'| = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}
$$

又记曲线弧长为 s，根据弧长微分公式

$$
\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,\mathrm{d}t \tag{1-33}
$$

得到