提分攻略系列®
最新版

疑难与规律详解

YINANYUGUILÜXIANGJIE

y=lnx

高中数学

计数原理、随机变量及其分布

丛书主编：福　生　本册主编：张　轲

GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS
广西师范大学出版社

提分攻略系列
最新版

YINAN YU GUILÜ XIANGJIE

疑难与规律详解

高中数学
计数原理、随机变量及其分布

GAOZHONG SHUXUE JISHU YUANLI SUIJI BIANLIANG JIQI FENBU

本册主编：张　轲

本册编委：王明章

GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS
广西师范大学出版社
·桂林·

图书在版编目（CIP）数据

疑难与规律详解．高中数学．计数原理、随机变量及其分布／张轲主编．—桂林：广西师范大学出版社，2013.5

（提分攻略系列／福生主编）

ISBN 978-7-5495-3720-4

Ⅰ．①疑…　Ⅱ．①张…　Ⅲ．①中学数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ．①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 090130 号

广西师范大学出版社出版发行

（广西桂林市中华路 22 号　邮政编码：541001
网址：http://www.bbtpress.com）

出版人：何林夏

全国新华书店经销

三河市华晨印务有限公司印刷

（河北省三河市杨庄镇杨庄村　邮政编码：065200）

开本：710 mm × 960 mm　1/16

印张：8.5　　字数：208 千字

2013 年 5 月第 1 版　　2013 年 5 月第 1 次印刷

印数：00 001~15 000 册　　定价：17.80 元

PREFACE 序言

帮助同学们提高分数，是每一位家长、教师的愿望。做怎样的图书才能够最大可能地帮助同学们提分？我们组织了一批教育专家、一线教师研究了考试中学生丢分的问题：一是知识不扎实，疑难未解，规律不清，导致题目不会做；二是常考题训练不足，考试时答题慢，且容易出错。

“提分攻略”系列图书正是为解决这两个问题而精心策划出版的。该系列包括“疑难与规律详解”和“常考题型强化训练”两个子系列，涵盖数、理、化三个学科。其中，“疑难与规律详解”子系列侧重深入分析讲解，针对学习中的重、难、疑点进行透彻解读，并配有典型例题讲解。“常考题型强化训练”子系列侧重加强常考题训练，避免偏题怪题。二者搭配使用，可以全方位解决学生学习中遇到的问题。

“疑难与规律详解”系列图书由多位优秀的一线骨干教师结合新课标和考试大纲的要求精心编写，分学科、分专题编排成册。

该系列图书主要特点：

紧扣课标，提升综合能力

本系列图书追踪新课改，透析新教材，整合各版本教材内容，覆盖全部核心考点，知识结构体系完整，实现知识整合、思维拓展、规律探索、能力提升等方面的全面收获。

科学分册，构建知识体系

本系列图书以学科知识体系为主线，以知识专题划分编排成册，使学生对各专题知识由浅入深逐步了解和学习，既方便学生跟进学习进度，也便于学生复习使用。

内容精致，结构设计合理

本系列图书以知识重、难、疑点为主，解决学生在学习过程中遇到的常见问题，同时，为保证知识的连贯性和学习的需要，对非重、难、疑点部分也进行必要的阐述，满足各类学生的需要。

疑难规律，全面解读透视

本系列图书避免对知识进行简单堆积，重在对疑难的突破和规律的总结，避免使学生学习仅停留在知识的表面，达到由浅入深、由点及面、循序渐进的效果，实现对知识的灵活运用。

本系列图书从策划、编写到出版都经过精心设计和细致实施，但囿于水平，疏漏之处在所难免，敬请广大读者不吝批评指正。

编　者

2013年5月

CONTENTS 目录

第一章 计数原理 1

第1节 分类加法计数原理与分步乘法计数原理 —— 1

（疑难点）❶ 分类加法计数原理 —— 1

❷ 分步乘法计数原理 —— 3

❸ 分类加法计数原理与分步乘法计数原理的综合应用 —— 7

第2节 排列与组合 —— 11

（疑难点）❶ 排列与排列数的定义及公式 —— 11

❷ 简单的排列应用问题 —— 15

❸ 组合与组合数的定义及公式 —— 24

❹ 简单的组合问题 —— 27

❺ 排列与组合的综合问题 —— 35

第3节 二项式定理 —— 42

（疑难点）❶ 二项式的通项公式 —— 42

❷ 二项式系数的性质 —— 46

❸ 二项式定理的应用 —— 51

第二章 随机变量及其分布 54

第1节 离散型随机变量及其分布列 —— 54

（疑难点）❶ 离散型随机变量的定义 —— 54

❷ 离散型随机变量的分布列 —— 58

❸ 二点分布与超几何分布 —— 67

第2节 二项分布及其应用 —— 75

（疑难点）❶ 条件概率 —— 75

❷ 相互独立事件 —— 80

❸ 独立重复试验与二项分布 —— 86

第3节 离散型随机变量的均值与方差 —— 97

（疑难点）❶ 离散型随机变量的均值 —— 97

❷ 离散型随机变量的方差 —— 112

❸ 均值与方差的性质 —— 118

第4节 正态分布 —— 123

（疑难点）❶ 正态曲线的性质 —— 123

❷ 3σ 原则的运用 —— 127

第一章

计数原理

第1节 分类加法计数原理与分步乘法计数原理

疑难点1 分类加法计数原理

分类加法计数原理是对涉及完成某一件事的不同类方法种数的计数方法，该原理的“完成一件事有 n 类方法”，这是对完成这件事的所有方法的一个分类. 分类时，首先要根据问题的特点确定一个适合于它的分类标准，然后在这个标准下进行分类，其次，分类时要注意满足一个基本要求：完成这件事的任何一种方法必须属于某一类，并且分别属于不同两类的两种方法是不同的方法，即各种方法既不重复，又不遗漏，只有满足这些条件，才能用分类加法计数原理.

从集合的观点上理解，如果完成一件事有 A,B 两类方法，集合 A 与集合 B 的交集为空集，在 A 中有 m_1 个元素（m_1 种方法），B 中有 m_2 个元素（m_2 种方法），则完成这件事的不同方法种数即集合 $A\cup B$ 的元素个数：

$$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)=m_1+m_2-0=m_1+m_2.$$

这就是分两类时的分类加法计数原理. 对于这个原理，我们可以将其推广到 n 类不同方法的情况，即为分类加法计数原理.

例1

某同学逛书店，发现三本喜欢的书，决定至少购买其中一本，则购买方案有（　　）

A. 3 种　　B. 6 种　　C. 7 种　　D. 9 种

解析—至少购买一本，可以分为三类情形：买一本，买两本，买三本.

第一类：买一本，共有 3 种买法；

第二类：买两本，共有 3 种买法；

第三类：买三本，共有 1 种买法.

故由分类加法计数原理知，购买方案共有 $3+3+1=7$（种）.

答案—C

例2

从集合 $\{0,1,2,3,4\}$ 中任选两数 a,b，则复数 $a+bi$ 中的虚数有（　　）

A. 10 个　　B. 12 个　　C. 14 个　　D. 16 个

解析—分两类，$a=0$ 时，b 有 4 个值可取，此时有 4 个；$a\neq0$ 时，a 有 4 个值可取，b 有 3 个值可取，此时有 $4\times3=12$（个），因此一共有 $4+12=16$（个）.

答案—D

例3

某火车站站台上有电梯 3 架，自动梯 2 架，扶梯 4 架，则上站台共有________种不同的走法.

解析—由于坐电梯、自动梯、扶梯都能上到站台，故有 $3+2+4=9$(种)不同的走法.

答案—9

例4

把 10 个水果分成 3 份，要求每份至少 1 个，至多 5 个，则不同的分法种数共有________种.

解析—由于分成的三份中，每份至少有 1 个，至多有 5 个，因此可对每份苹果的个数多少进行讨论. 有一份 1 个苹果，则其余的两份只能是一份 5 个，一份 4 个；有一份 2 个苹果，则其余的两份可能是一份 5 个，另一份 3 个或一份 4 个，另一份 4 个；有一份 3 个苹果，则其余的两份只能是一份 4 个，一份 3 个.

故由分类加法计数原理知，不同的分法种数共有 $1+2+1=4$(种).

答案—4

例5

新华中学高一有优秀班干部 5 人，高二有优秀班干部 7 人，高三有优秀班干部 8 人，现在学校组织他们去参加旅游活动，需要推选一人为总负责人，有多少种不同的选法？

分析—本题为分类加法计数原理问题，我们可以运用定义、枚举、列表的方法来解决这个问题，关键是要正确地列出各种情况，做到不重不漏.

解答—方法(一)

定义法. 由于要从三个年级的优秀班干部中选出一人，故可分为三类：第一类从高一的 5 名优秀班干部中选取一人，有 5 种选法；第二类从高二的 7 名优秀班干部中选取一人，有 7 种选法；第三类从高三的 8 名优秀班干部中选取一人，有 8 种选法. 根据分类加法计数原理知，共有 $5+7+8=20$(种)不同的选法.

方法(二)

枚举法. 因为只选一人，所以可设三个年级的优秀班干部分别为 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，B_1，B_2，B_3，B_4，B_5，B_6，B_7，C_1，C_2，C_3，C_4，C_5，C_6，C_7，C_8，故从以上 20 个人中选一人的情况有 20 种.

例6

在某系统组织的庆元旦大型文艺演唱活动中，担任服务工作的有来自 A，B，C 三个不同单位的志愿者各 5 人，8 人，6 人，问从中推选一人为优秀志愿者的情况有多少种？

分析—由于选出的 1 名优秀志愿者可以从 A，B，C 三个不同单位中选出，这件事都能完成，因此完成这件事有 3 类办法，故可利用分类加法计数原理解决.

解答—本题可以分为三类：第一类从 A 单位的 5 名志愿者中选取一人，有 5 种选法；第二类从 B 单位的 8 名志愿者中选取一人，有 8 种选法；第三类从 C 单位的 6 名志愿者中选取一人，有 6 种选法. 根据分类加法计数原理知，共有 $5+8+6=19$(种)不同的选法.

例7

大小不同的两个正方体玩具，分别在各个面上标有数字 1，2，3，4，5，6，将它们放在同一平

面上，向上的面标着的两个数字之积不小于 20 的不同情形有多少种？

分析—因为两数字之积不少于 20，故一个面上的数字最小为 4，故分 4，5，6 三种情形讨论.

解答—依题意，分三类：

①若第一个向上的面标着的数字为 4，则第二个向上的面标着的数字为 5 或 6，共有两种不同情形；

②若第一个向上的面标着的数字为 5，则第二个向上的面标着的数字为 4 或 5 或 6，共有三种不同情形；

③若第一个向上的面标着的数字为 6，则第二个向上的面标着的数字为 4 或 5 或 6，共有三种不同情形.

由分类加法计数原理可知，两个数字之积不小于 20 的不同情形共有 $2+3+3=8$(种).

规律解读

应用分类加法计数原理，首先根据问题的特点，确定分类的标准，分类应满足：完成一件事的任何一种方法，必属于某一类且仅属于某一类；其次要做到不重不漏.

疑难点 2 分步乘法计数原理

1 分步乘法计数原理是对涉及完成某一件事的各个步骤的不同方法种数的计数方法，该原理中的“完成一件事，需要分成 n 个步骤”是指完成这件事的任何一种方法，都要分成 n 个步骤. 分步时首先要根据问题的特点确定一个分步的标准；其次分步时还要注意：满足“完成一件事”必须并且只需连续完成这 n 个步骤后，这件事才算完成，只有满足这些条件，才能用分步乘法计数原理.

2 **分类加法计数原理与分步乘法计数原理的联系与区别**

这两个原理都是用来计算完成一件事的不同方法的种数问题的，它们都是解决后面将要学习的排列、组合问题及综合问题的基础. 其区别在于：分类加法计数原理在“完成一件事有 n 类办法”的条件下使用，此时每一类办法中的每一种方法都能独立完成这件事；分步乘法计数原理是在“完成一件事需分 n 个步骤”的条件下使用，此时，每个步骤中的每一种方法只能完成所需完成的事的一部分，不能独立完成所需完成的事. 即分类加法计数原理与“分类”有关，各种方法相互独立，用任何一种都可以完成这件事；分步乘法计数原理与“分步”有关，各步骤相互依存，只有把各个步骤依次都完成了，这件事才算完成.

例 1

某校高二数学组有 9 名男教师，4 名女教师，现从中任选男教师、女教师各一人去参加市组织的数学教研活动，则不同的选法有 (　　)

A. 13 种　　B. 26 种　　C. 36 种　　D. 72 种

解析—从 9 名男教师中任意挑选一名参加教研活动，共有 9 种不同的选法，从 4 名女教师中任意挑选一名参加教研活动，共有 4 种不同的选法，由分步乘法计数原理可

得，不同的选法种数共有 $9\times4=36$(种). 故选 C.

答案—C

例2

已知函数 $y=ax^2+bx+c$，其中 $a,b,c\in\{0,1,2,3,4\}$，则不同的二次函数的个数共有 (　　)

A. 125　　B. 15　　C. 100　　D. 10

解析—若 $y=ax^2+bx+c$ 为二次函数，则 $a\neq0$，要完成该事件，需分步进行：

第一步，对于系数 a 有 4 种不同的选法；

第二步，对于系数 b 有 5 种不同的选法；

第三步，对于系数 c 有 5 种不同的选法.

故由分步乘法计数原理知，共有 $4\times5\times5=100$(个)不同的二次函数. 故选 C.

答案—C

例3

如果把两条异面直线看成“一对”，那么六棱锥的棱所在的 12 条直线中，异面直线共有 (　　)

A. 12 对　　B. 24 对　　C. 36 对　　D. 48 对

解析—如图 1-1-1 所示，在六棱锥中注意到棱锥的棱有两类：6 条侧棱共点，它们所在的直线中每两条之间不能构成异面直线；底面上的六条棱共面，它们所在的直线中每两条之间也不能构成异面直线，故只能在侧棱和底面棱之间构成异面直线.

任一侧棱与除底面上和它共点的两条棱外，与其余 4 条棱都能构成异面直线. 故先选侧棱，有 6 种选法，再选底面上与它异面的棱，有 4 种选法，所以根据分步乘法计数原理知，异面直线共有 $6\times4=24$(对). 故选 B.

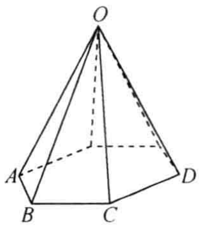

图 1-1-1

答案—B

例4

把 1，2，3 填入 3×3 的方格(如图 1-1-2 所示)中，要求每行、每列都没有重复数字，下面是一种填法，则不同的填写方法共有 (　　)

1	2	3
3	1	2
2	3	1

图 1-1-2

A. 6 种　　B. 12 种　　C. 18 种　　D. 24 种

解析—第一行第一列有 3 种不同的填法，第一行第二列有 2 种不同的填法，第二行第一列有 2 种不同的填法，其他行列只有一种填法，因此不同的填法共有 $3\times2\times2=12$(种). 故选 B.

答案—B

例5

甲、乙、丙、丁四位同学各自从家里拿来了互不相同的一本课外书，他们把四本不同的书籍放在一起，然后从中取一本别的同学的书进行交换看，则不同的取法共有 ( )

A. 6 种　　B. 9 种　　C. 11 种　　D. 23 种

解析—方法(一)

第一步：四个人中的任意一人(例如甲)先取一本，则由题意知共有 3 种取法；第二步：由第一人取走的书的供书人取，也有 3 种取法；第三步：由剩余的两人中的任一人取，只有一种取法；第四步：最后一人取，只有一种取法. 由分步乘法计数原理知，共有 $3\times3\times1\times1=9$(种). 故选 B.

方法(二)

设四本书籍分别记为 A,B,C,D. 由题意，某人(不妨设 A 书的供书人)取书的情况有 3 种，据此将书的不同分配方式分为三类，对于每一类，其他人依次取书分步进行. 为了避免重复或遗漏现象，我们用"树状图"表示，如图 1-1-3 所示，共有 9 种不同的取法. 故选 B.

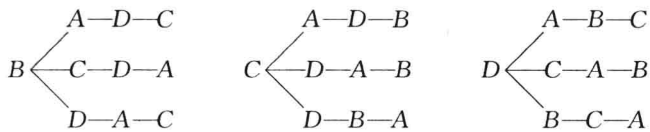

图 1-1-3

答案—B

例6

某市电话号码是 7 位数，其中头 3 位数字是 283，末位数字是偶数，后 4 个数字与前 3 个数字不重复的电话号码共有________种.

解析—先取末位数字，然后再取其他位上的数字.

分四步：末位数字取 0，4，6 有 3 种取法；第四个数字有 7 种取法(因不能取 2，8，3)；同理，第五、六个数字都有 7 种取法. 根据分步乘法计数原理知，后 4 个数字与前 3 个数字不重复的电话号码共有 $3\times7\times7\times7=1\ 029$(种).

答案—1 029

例7

课外兴趣小组的同学分别来自四个班，其中一班有 5 人、二班有 7 人、三班有 4 人、四班有 4 人，现从中选取 4 人组成联合小队参加市数学邀请赛，要求 4 人来自 4 个不同班级，则不同的组队方法的种数为__________.

解析—分四步：第一步，从一班选一人，有 5 种选法；第二步，从二班选一人，有 7 种选法；第三步，从三班选一人，有 4 种选法；第四步，从四班选一人，有 4 种选法，因此组队方法有 $5\times7\times4\times4=560$(种).

答案—560

例8

小于 50 000，含有两个 5 且其他数字不重复的五位数的个数为________.

解析—首位数字有 4 种选法，在其余四个数位中选两个数位排两个 5 有 4×3 种选法，再从其余 8 个数字中选出 2 个数字排在剩余的两个数位上，有 8×7 种选法. 因此，一共有 $4\times4\times3\times8\times7=2\,688$(个)五位数.

答案—2 688

例9

用数字 2，3 组成四位数，且数字 2，3 至少都出现一次，则这样的四位数共有________个.（用数字作答）

解析—若不考虑数字 2，3 至少都出现一次这个限制条件，则个位、十位、百位、千位每个“位置”都有两种选择，所以共有 $2^4=16$(个)四位数，然后再减去“2 222，3 333”这两个数，故共有 $16-2=14$(个)满足要求的四位数.

答案—14

例10

一种号码锁有 4 个拨号盘，每个拨号盘上有从 0 到 9 共 10 个数字，现最后一个拨号盘出现了故障，只能在 0 到 5 这 6 个数字中拨号，问这 4 个拨号盘可组成多少个四位数字号码？

解答—每个拨号盘所拨出的数字是 0 到 9 中任意的一个，而出了故障的拨号盘只可拨 0 到5 这 6 个数字，拨号盘拨出的数字相互之间是独立的，根据分步乘法计数原理，符合题意的四位数字号码共有 $10\times10\times10\times6=6\,000$(个).

例11

已知集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，$B=\{b_1,b_2\}$，其中 a_i，b_j($i=1,2,3,4$，$j=1,2$)均为实数.

(1)从集合 A 到集合 B 能构成多少个不同的映射？

(2)能构成多少个以集合 A 为定义域，集合 B 为值域的不同函数？

解答—(1)因为集合 A 中的元素 $a_i(i=1,2,3,4)$ 与集合 B 中元素的对应方法都有 2 种，由分步乘法计数原理知，可构成 $A\to B$ 的映射有 $2\times2\times2\times2=16$(个).

(2)在(1)的映射中，a_1，a_2，a_3，a_4 均对应同一元素 b_1 或 b_2 的情形构不成以集合 A 为定义域，以集合 B 为值域的函数，这样的映射有 2 个. 所以，能构成以集合 A 为定义域，集合 B 为值域的函数有 $16-2=14$(个).

例12

(1)某工厂的三个车间的工人举行了劳动技能大比武活动，第一车间有 2 名工人胜出，第二车间有 3 名工人胜出，第三车间有 2 名工人胜出，厂长要求每个车间选出一人进入厂技能领导小组，有多少种不同的选法？

(2)某工厂的 4 名工人要报名参加唱歌、跳舞、演讲比赛，每人报一项，则不同的报名方法有多少种？

分析—(1)此题属分步乘法计数原理问题，相当于“各取一个”，解答时可从定义法、枚举

法等角度进行思考.(2)解决这类问题的关键是明确谁选谁的问题.本题中是工人选比赛项目,工人是主动的.

解答—(1)本题可分三步完成:第一步,从第一车间中选 1 人,有 2 种选法;第二步,从第二车间中选 1 人,有 3 种选法;第三步,从第三车间中选 1 人,有 2 种选法.根据分步乘法计数原理知,一共有 $2\times3\times2=12$(种)选法.

(2)由于每名工人都可以参加三项比赛中的任何一项,可以让 4 名工人各自选择自己参加的比赛项目,因此共有 $3\times3\times3\times3=3^4=81$(种)报名方法.

例13

现有 5 张卡片,正反两面分别写有 0 与 1,2 与 3,4 与 5,6 与 7,8 与 9,用这 5 张卡片可以组成多少个不同的四位数?

解答—分四步,分别确定千位数、百位数、十位数与个位数.注意千位数不能为 0,正反两面均可用.

第一步,千位数有 $10-1=9$(种);

第二步,百位上的数有 8 种;

第三步,十位上的数有 6 种;

第四步,个位上的数有 4 种.

于是,由分步乘法计数原理知,不同的四位数有 $9\times8\times6\times4=1\ 728$(个).

规律解读

使用分步乘法计数原理做题时,必须是各步全部完成,事情才算完成,注意缺步问题,做到既简捷又不遗漏、不重复.当直接求解比较困难时,可考虑问题的对立面,采取"正难则反"的策略求解.在处理几何计数问题时,必须综合运用相应的几何概念,发挥空间想象和图形分析能力,要特别重视对应关系及对重复现象、不合要求问题的判断,只有认识到这些特性,才能够避免解题过程的重复.

疑难点3 分类加法计数原理与分步乘法计数原理的综合应用

在运用两个计数原理解决具体问题时,首先必须弄清是"分类"还是"分步",接着还要搞清"分类"或者"分步"的具体标准是什么,与此同时还要注意分类、分步不能重复、不能遗漏.

(1)如果完成一件事有 n 类办法,这 n 类办法彼此之间是相互独立的,无论哪一类办法中的哪一种方法都能单独完成这件事,求完成这件事的方法种数,就用分类加法计数原理;如果完成一件事需要分成 n 个步骤,而完成每一步骤各有若干种不同的方法,只有依次完成每一步骤中的一种方法,不可缺步,才能完成这件事,求完成这件事的方法种数,就用分步乘法计数原理,因此,分辨清楚完成一件事的方法是"分类"还是"分步",是正确使用这两个原理的前提.

(2)在实际问题中,不少问题既需要分类又需要分步,有的在分类中包含分步,有的在分步中包含分类,即把完成题设事件 S 的所有方法分为若干类 $S_1,S_2,\cdots,S_n$,然后在同一类中,再将完成的事件分成若干连续独立步,在每一类中使用分步乘法计数原理,在所有类中使

用分类加法计数原理，这就是复合事件的分类与分步，则完成事件 S 共有$[(m_{11}m_{12}\cdots m_{1n})+(m_{21}m_{22}\cdots m_{2n})+\cdots+(m_{n1}m_{n2}\cdots m_{nn})]$种不同的方法.

(3)对于较为复杂的既要用分类加法计数原理又要用分步乘法计数原理的问题，我们可以根据题意恰当合理地画出示意图或列出表格，使问题的实质直观地显现出来，从而便于我们解题.

例1

已知集合 $M=\{a,b,c\}$，$N=\{-1,0,1\}$，若 $f(x)$是 $M\to N$ 的映射，且 $f(a)=0$，则这样的映射 $f(x)$的个数为 ( )

A. 6　　B. 8　　C. 9　　D. 11

解析—要确定映射，只需确定 b,c 两个元素所对应的象，故有 $3\times3=9$(种). 故选 C.

答案—C

例2

甲、乙、丙、丁四位女同学在课后练习踢毛毽，第一次甲传给乙、丙、丁三人中任一人，第二次由接毽者再传给其他三人任一人，这样共传了 4 次，则第 4 次毛毽仍回到甲的方法共有 ( )

A. 21 种　　B. 42 种　　C. 24 种　　D. 27 种

解析—分四步完成：第一步，由甲传给乙、丙、丁中的一人，有 3 种方法；第二步，应分二类考虑：第一类传给甲，则第三步传给乙、丙、丁均可，第四步再传给甲，共有 $1\times3\times1$ 种方法；第二类不传给甲，则可传给甲以外的 2 人，第三步又传给甲以外的 2 人，第四步再传给甲，共有 $2\times2\times1$ 种方法. 因此一共有 $3\times(1\times3\times1+2\times2\times1)=21$(种)方法.

答案—A

例3

有三只口袋装小球，一只装有 5 个白色小球，一只装有 6 个黑色小球，一只装有 7 个红色小球，若每次从中取两个不同颜色的小球，则共有多少种不同的取法？

解答—分为三类：第一类是取白球、黑球，有 $5\times6=30$(种)取法；

第二类是取白球、红球，有 $5\times7=35$(种)取法；

第三类是取黑球、红球，有 $6\times7=42$(种)取法.

所以共有 $30+35+42=107$(种)取法.

例4

电视台在“欢乐今宵”节目中拿出两个信箱，其中存放着先后两次竞猜中成绩优秀的观众来信，甲信箱中有 30 封，乙信箱中有 20 封，现由主持人抽奖确定幸运观众，若先确定一名幸运之星，再从两信箱中各确定一名幸运伙伴，有多少种不同的结果？

解答—分为两类：①幸运之星在甲箱中抽，先定幸运之星，再在两箱中各定一名幸运伙伴有 $30\times29\times20=17\,400$(种)结果；

②幸运之星在乙箱中抽，同理有 $20\times19\times30=11\,400$(种)结果.

因此，共有 $17\,400+11\,400=28\,800$(种)不同的结果.

例5

由 1,2,3,4 可以组成多少个自然数(数字可以重复,最多只能是四位数)?

分析—按自然数的位数多少,可以分为四类:一位、二位、三位、四位.在每一类中,又可以分成若干步来进行.

解答—组成的自然数可以分为以下四类:

第一类:一位自然数,共有 4 个;

第二类:二位自然数,又可以分两步来完成.先取出十位上的数字,再取出个位上的数字,共有 $4\times4=16$(个);

第三类:三位自然数,又可以分三步来完成.每一步都可以从 4 个不同的数字中任取一个,共有 $4\times4\times4=64$(个);

第四类:四位自然数,分四步完成.共有自然数 $4\times4\times4\times4=256$(个).

由分类加法计数原理知,可以组成的自然数共有 $4+16+64+256=340$(个).

例6

从 1 到 200 的自然数中,各个数位上都不含有数字 8 的自然数有多少个?

分析—本题涉及分类加法计数原理与分步乘法计数原理,在分类中又包含分步,“类”“步”交融,对于一些“步”中分“类”的问题要具体对待.

解答—分三类来解决这个问题,第一类:一位数中除 8 以外符合要求的数有 8 个;

第二类:二位数中,十位数除 0,8 以外有 8 种选法,个位数除 8 以外有 9 种选法,故二位数中符合要求的数有 $8\times9=72$(个);

第三类:三位数中,百位数为 1,十位数和个位数上的数字除 8 外均有 9 种选法,故三位数中符合要求的数有 $9\times9=81$(个);百位数为 2 的只有 1 个符合要求.

根据分类加法计数原理知,从 1 到 200 的自然数中不含有数字 8 的自然数共有 $8+72+81+1=162$(个).

例7

如图 1-1-4 所示,用 4 种不同的颜色给图中 5 个区域涂色(4 种颜色全部使用),要求每个区域涂一种颜色,相邻的区域不能涂相同的颜色,则不同的涂色种数有多少种?

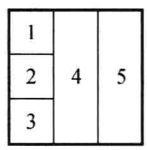

图 1-1-4

分析—要给 5 个区域涂 4 种颜色,应依次分五步来完成,其中对区域 3 还要分两类来分析:与区域 1 相同或不同,因此本题先分步,在步中再分类,“类”“步”交融.

解答—先涂 1,有 4 种涂法,再涂 2,有 3 种涂法,再涂 3,分两类:一类是与 1 涂相同的色,则 4,5 共有 2 种不同的涂法;另一类是涂与 1 不同的色,有 2 种涂法,则 4 有 1 种涂法,5 有 3 种涂法.因此不同的涂色种数共有 $4\times3\times1\times2+4\times3\times2\times1\times3=24+72=96$(种).

例8

某文艺团体有 10 人,每人至少会唱歌或跳舞中的一种,其中 7 人会唱歌,5 人会跳舞,从

中选出会唱歌与会跳舞的各 1 人，有多少种不同的选法？

分析—本题是一个有关多面手问题，可按既会唱歌又会跳舞的人数来分类.

解答—首先求得只会唱歌的有 5 人，只会跳舞的有 3 人，既会唱歌又会跳舞的有 2 人.

第一类：从只会唱歌的 5 人中任选 1 人，从只会跳舞的 3 人中任选 1 人，共有 $5\times3=15$(种)不同的选法；

第二类：从只会唱歌的 5 人中任选 1 人，从既会唱歌又会跳舞的 2 人中任选 1 人，共有 $5\times2=10$(种)不同的选法；

第三类：从只会跳舞的 3 人中任选 1 人，从既会唱歌又会跳舞的 2 人中任选 1 人，共有 $3\times2=6$(种)不同的选法；

第四类：将既会唱歌又会跳舞的 2 人全部选出，只有 1 种选法.

故由分类加法计数原理知，共有 $15+10+6+1=32$(种)不同的选法.

例9

某城市在中心广场建造一个花圃，花圃分为 6 个部分(如图1-1-5 所示). 现要栽种 4 种不同颜色的花，每部分栽种一种且相邻部分不能栽种同样颜色的花，不同的栽种方法有多少种？

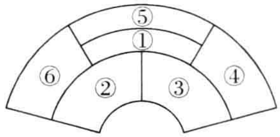

图 1-1-5

分析—由于 6 部分种 4 种花，故必有两部分或两部分以上的区域种同种颜色的花，从而从同颜色的花进行分类. 另外，本题也可以用“树状图”解答.

解答—方法(一)

从题意来看，6 部分种 4 种颜色的花，又从图形知必有 2 组同颜色的花，从同颜色的花入手分类求解.

(1)②与⑤同色，则③⑥也同色或④⑥也同色，

所以共有 $N_1=4\times3\times2\times2\times1=48$(种)；

(2)③与⑤同色，则②④或⑥④同色，

所以共有 $N_2=4\times3\times2\times2\times1=48$(种)；

(3)②与④且③与⑥同色，则共有 $N_3=4\times3\times2\times1=24$(种).

所以共有 $N=N_1+N_2+N_3=48+48+24=120$(种).

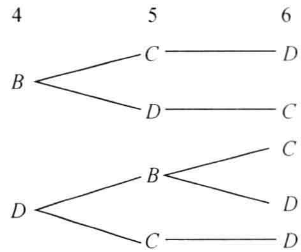

图 1-1-6

方法(二)

记颜色为 A,B,C,D 四色，先安排 1，2，3 有 A_4^3 种不同的栽法，不妨设 1，2，3 已分别栽种 A,B,C，则 4，5，6 栽种方法共有 5 种，由图 1-1-6 的树状图晰可见. 根据分步乘法计数原理知，不同的栽种方法有 $N=A_4^3\times5=120$(种).

规律解读

综合运用两个计数原理时，既要会合理分类，又能合理分步，解答时是先分类后分步，还是先分步后分类应视具体问题而定，一般是先分类后分步，“分类”或“分步”时，要注意弄清“分类”与“分步”的标准.

第2节 排列与组合

疑难点1 排列与排列数的定义及公式

1 排列的相关概念

(1)排列的定义包含两个重要因素,一是“取出元素”,二是“按一定顺序排成一列”,“按一定顺序”就是说元素的排列与位置有关.

(2)排列的定义中指的是“一个排列”,而不是所有的排列.对于两个排列来讲,只有当元素完全相同且元素排列的顺序也完全相同时,才是相同的一个排列.元素不完全相同或元素完全相同而顺序不同的排列,都不是同一个排列.

(3)在定义中规定 $m\leqslant n$,因为定义中给出的 n 个元素是互不相同的,且从 n 个元素中抽取 m 个元素是没有重复抽取情况的,因而这 m 个元素也是互不相同的,这就决定了 $m\leqslant n$.如果 $m<n$,称作选排列;如果 $m=n$,称作全排列.

2 判断一个具体问题是否为排列问题的方法

(1)首先要保证元素的无重复性,即是从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$个不同的元素,否则不是排列问题.

(2)其次要保证元素的有序性,即安排这 m 个元素时是有顺序的,有序的就是排列,无序的就不是排列.

3 排列数的定义及其理解

(1)正确认识排列与排列数之间的关系

排列与排列数是两个既有联系又有区别的概念,排列是若干元素的一种表现形式,排列数则是这种形式的所有个数,是一个自然数;若找出了所有排列就可以直接求出对应的排列数,但大多数情况下并不需要找出所有的排列就能得到相应的排列数.

(2)全排列、阶乘、排列数公式的阶乘表示

在排列数公式中,当 $n=m$ 时,有 $A_n^m=A_n^n=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1$.

这个公式指出了 n 个不同元素全部取出的排列数,等于正整数 1 到 n 的连乘积.这里我们又得到一个新的概念:

阶乘:正整数 1 到 n 的连乘积,叫做 n 的阶乘,用 $n!$表示,即 $A_n^n=n!$.

因此,排列数公式又可以写成 $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$.

为了使这个公式在 $m=n$ 时也成立,我们规定 $0!=1$.

(3)排列数公式的应用

①排列数的第一个公式 $A_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)$适用于具体计算以及解当 m 较小时的含有排列数的方程和不等式.对于这个公式,应注意以下几点:

$m\leqslant n$,且 $m,n\in\mathbf{N}^*$;

公式右边第一个因数为 n,后面每个因数都比它前面一个因数少 1,最后一个因数是 $n-m+1$,共 m 个因数相乘.