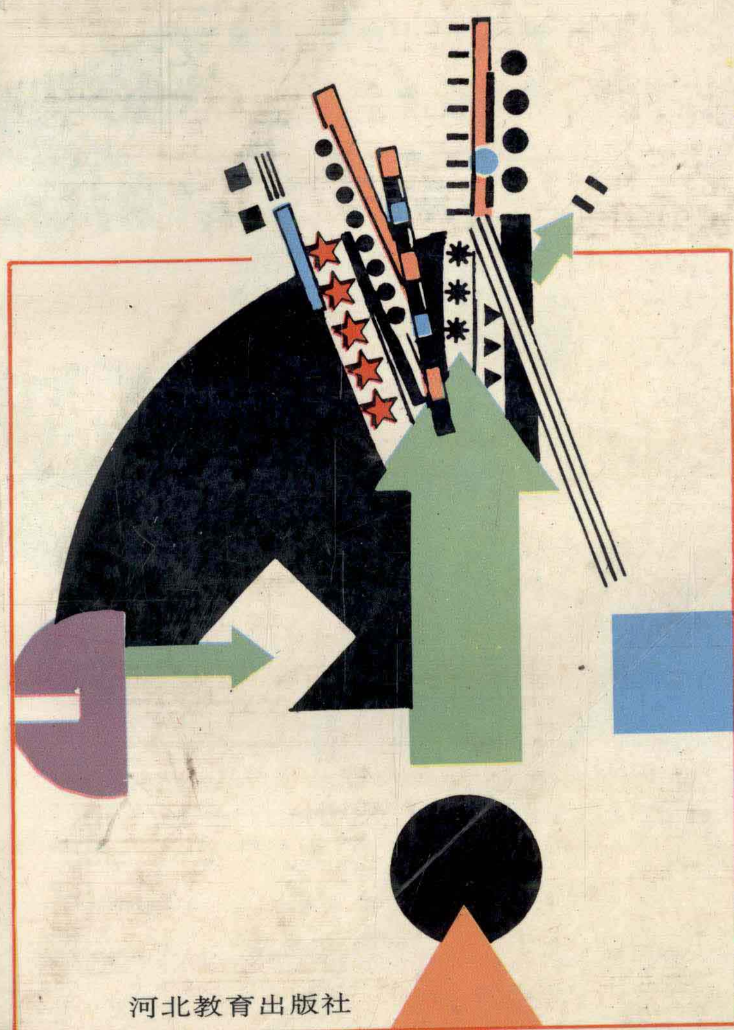
高中数学

中考·会考·高考　考法·考技·考题

主编　黄健生



河北教育出版社

高中数学

中考·会考·高考　考法·考技·考题

编著　黄健生　任光辉
徐荣华　何　松
徐　航

河北教育出版社

[冀]新登字006号

中考·会考·高考　考法·考技·考题丛书

主　编　张德政

副主编　程　迟

杨惠娟

郑致远

高中数学

中考·会考·高考　考法·考技·考题

主编　黄健生

河北教育出版社出版(石家庄市城乡街44号)
河北大学印刷厂印刷　新华书店总店北京发行所发行

787×1092毫米　1/32　15印张　320,000字　1994年4月第1版
1994年4月第1次印刷　印数：1—10,000　定价：10.00元
ISBN 7—5434—2026—0/G·1719

前　　言

本书依据《全日制中学教学大纲》的要求，紧密结合高考的实际，把知识加以系统梳理、归纳、总结，联系近几年高考的题型、范围、发展趋向进行编写.

主要内容有〔导语〕、〔考法〕、〔技巧〕、〔题目〕. 简明扼要指出章、节重点难点，基本概念，基本定理；明确应掌握哪些关键知识点、易错点、多考点；从不同角度编写几套模拟练习题，既巩固所学知识，又紧扣高考题型及今后发展趋向；最后按难易程度附三套模拟综合试题.

高中数学撰稿人有北京市海淀区首都师大附中副校长、高级教师、海淀区学科带头人黄健生，海淀区立新学校高级教师、北京市兼职教研员、海淀区学科带头人任光辉以及高级教师徐荣华、何松、徐航等，由黄健生主编.

由于编写时间紧迫，疏漏不妥之处在所难免，恳请读者批评指正.

编　者

1993 年 12 月

目　录

第一部分　代　　数

第一章　幂函数指数函数和对数函数

【导语】

（一）考试内容及要求

1　考试内容

集合、子集、交集、并集、补集.

映射、函数(函数的记号、定义域、值域).

幂函数、函数的单调性、函数的奇偶性.

反函数、互为反函数的函数图象间的关系.

指数函数、对数函数、换底公式、简单的指数方程和对数方程.

2　考试要求

理解集合、子集、交集、并集、补集的概念、了解空集和全集的意义.了解属于、包含、相等关系的意义,能掌握有关的术语和符号,能正确地表示一些较简单的集合.

了解映射的概念,在此基础上理解函数及其有关的概念,掌握互为反函数的函数图象间的关系.

理解函数的单调性和奇偶性的概念，并能判断一些简单函数的单调性和奇偶性，能利用函数的奇偶性与图象的对称性的关系描绘函数图象.

掌握幂函数、指数函数、对数函数的概念及其图象和性质，并会解简单的指数方程和对数方程.

（二）掌握这些知识应注意的问题

1 集合的概念

集合是数学中最原始的概念之一，不能用其他更基本的概念来给它下定义；子集、真子集、交集、并集、补集等概念研究的是两个集合之间的相互关系，应注意弄清各个基本概念的涵义，相互联系和区别，必要时可结合韦恩图直观验证来加深理解.

2 映射的概念

映射是一种特殊的对应，且具有方向性，即从 A 到 B 的映射与从 B 到 A 的映射可以是截然不同的.

3 一一映射是一种特殊的映射

一一映射有 3 个特点：

(1) $f: A \to B$ 是从 A 到 B 的映射；(2) 对于集合 A 中不同元素，集合 B 中有不同的象； (3) B 中每一个元素都有原象.

4 函数的概念

函数是数学中极其重要的概念之一，代数中的恒等式、方程、不等式、数列等都可以用函数概念去解释，函数的概念、性质和思想方法象一根红线一样贯串在有关数学知识之间. 因此，在复习过程中以函数为重点来考虑和安排复习的全局是

完全必要的.

函数的实质是一种特殊映射,即在映射 $f:A\to B$ 中,A、B 为非空数集,且 B 中的每一个元素都有原象的一种映射.定义域、值域以及定义域到值域的对应法则是构成函数的三要素.特别要注意:两个函数对应法则完全相同,而定义域不同,则是两个不同的函数.

5 反函数的概念

只有一一映射确定的函数才有反函数.反函数的定义域是函数的值域,反函数的值域是函数的定义域.

6 函数的定义域是函数的重要组成部分

在研究有关函数的问题时,要养成考虑函数的定义域的良好习惯,都要注意定义域的作用,方能保证解答的完整性和严密性.

7 复合函数的概念

目前,有很多的习题和高考试题中涉及到复合函数的性质.诸如单调性,值域等.

8 函数的单调性是函数在整个定义域或者它的某一子集内的性质.而函数的奇偶性则是整个定义域内的性质

特别要注意不论研究函数的奇偶性,还是单调性,都要首先考虑定义域,否则将会出现错误,如,只有函数的定义域关于坐标原点对称时,才能讨论奇偶性.

9 掌握周期函数的概念时要特别注意以下两点

(1) T 是一个非零常量;(2) 关系式 $f(x+T)=f(x)$ 必须对定义域中任意一个 x 值都成立.

10 对数函数

对数函数是五大初等函数之一,对数函数涉及反函数的

概念，函数图象和函数性质，复习时要搞清楚这些内容，从而牢固地掌握这一初等函数.

11 指数方程与对数方程是中学阶段第一次遇到的超越方程

其基本思路是转化为代数方程来解，对这种转化的思想必须加以体会和掌握.

（三）典型例题分析

例1 设全集 $I=\{x|x$ 为小于 20 的正偶数$\}$，若 $A\cap\overline{B}=\{12,14\}$，$\overline{A}\cap B=\{2,4,16,18\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$，求集合 A 和 B.

分析 应着眼于由 $A\cap\overline{B}$，$\overline{A}\cap B$，$\overline{A}\cap\overline{B}$ 等的运算意义（所涉及到的概念）来确定每一个元素的属向，故可有如下两种解法.

解法1 从局部入手，根据各个运算关系的含义，逐步确定 A 与 B 的元素.

$\because\quad I=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18\}$，

$\therefore\quad A\cap\overline{B}=\{12,14\}\Rightarrow 12,14\in A$，但 $12,14\notin B$.

$\overline{A}\cap B=\{2,4,16,18\}\Rightarrow 2$、$4$、$16$、$18\notin A$，但 2、4、16、$18\in B$.

现在再由 $\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$ 来确定剩下的 6、8、10 的属向. 先考虑 6，若 $6\in\overline{A}$，因为 $\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$，则 $6\notin\overline{B}$，即 $6\in B$，从而 $6\in\overline{A}\cap B$ 与题设矛盾，所以 $6\in A$，同理 8、$10\in A$.

同法还可证：6、8、$10\in B$

故 $A=\{6,8,10,12,14\}$，

$B=\{2,4,6,8,10,16,18\}$.

解法2 借助于韦恩图，分别依 $A\cap\overline{B}$，$\overline{A}\cap B$，$\overline{A}\cap\overline{B}$ 的含

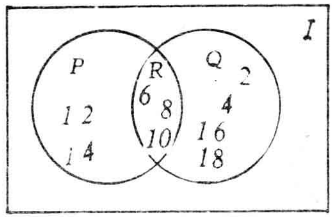


图 1-1

义将有关元素对号入座地填入有关区域内. 如图 1-1, 由 $P=A\cap\overline{B}=\{12,14\}$ 和 $Q=\{2,4,16,18\}$, 各填入相应的元素. 又 $R=\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$ 的含义是: 不存在既不在 A 中又不在 B 中的元素, 而不在 A 中在 B 中, 不在 B 中在 A 中的元素均已填入, 故应将剩下的元素 6、8、10 填入 R.

说明 有关集合问题用韦恩图来解比较直观, 但它不能代替严格的逻辑推理和证明, 此例亦可用集合的运算律作如下更为简捷的解答: $\overline{B}=\overline{B}\cap(A\cup\overline{A})=(\overline{B}\cap A)\cup(\overline{B}\cap\overline{A})=\overline{B}\cap A=\{12,14\}$, 从而 $B=\{2,4,6,8,10,16,18\}$, 同理得 $A=\{6,8,10,12,14\}$.

例 2 已知 $A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 4\}$, $B=\{x\mid x^2-2ax+a+2\leqslant 0\}$, 若 $B\subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.

分析 课本中规定空集是任何集合的子集, 即 $\varnothing\subseteq A$, 因此, 必须就 $B=\varnothing$; $B\neq\varnothing$ 两种情况进行研究.

解 当 $B=\varnothing$ 时, 二次三项式 $x^2-2ax+a+2$ 的判别式为负, 即 $(-2a)^2-4(a+2)<0$, 解得

$$-1<a<2.$$

当 $B\neq\varnothing$时，二次三项式 $x^2-2ax+a+2$ 有实数根，其判别式 $(-2a)^2-4(a+2)\geqslant 0$，即

$$a\geqslant 2 \text{ 或 } a\leqslant -1.$$

设 $x^2-2ax+a+2=0$ 的二个实数根为 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，这时有

$B=\{x\mid x_1\leqslant x\leqslant x_2, a\geqslant 2 \text{ 或 } a\leqslant -1\}$.

满足 $B\subseteq A$ 的充要条件为

$$\begin{cases} a\geqslant 2 \text{ 或 } a\leqslant -1, \\ x_2\leqslant 4, \\ x_1\geqslant 1. \end{cases}$$

由二次函数 $f(x)=x^2-2ax+a+2$ 的图象得到一组等价条件

$$\begin{cases} f(4)=4^2-2a\cdot 4+a+2\geqslant 0, \\ f(1)=1^2-2a\cdot 1+a+2\geqslant 0, \\ \quad a\geqslant 2 \text{ 或 } a\leqslant -1, \\ \quad 1\leqslant \dfrac{2a}{2}\leqslant 4. \end{cases}$$

解之得 $1\leqslant a\leqslant \dfrac{18}{7}$.

综合上述，a 的取值范围为

$$-1<a\leqslant \frac{18}{7}.$$

说明 正确的理解集合的有关概念以及集合中有关集合符号的涵义，同时善于将集合与集合的关系转化为元素与集合的关系，是解决有关集合问题的关键.

例 3 设 $A=\{(x,y)\mid x\in Z, |x|<2, y\in N, x+y<3\}$，$B=\{0,1,2\}$，$f:(x,y)\rightarrow x+y$ 是 A 到 B 的对应关系，试判断

f 是不是从 A 到 B 的映射？

分析 此解的关键有两点：

(1) 集合 A 的元素是什么？

(2) 什么是从 A 到 B 的映射？

解 $\because$ $x \in Z$，且 $|x|<2$，

$\therefore$ $x \in \{-1,0,1\}$

又 $\because$ $y \in N$，且 $x+y<3$.

$\therefore$ $A=\{(-1,1),(-1,2)(-1,3),(0,1),(0,2),(1,1)\}$.

$\because$ $f:(x,y) \to x+y$，

$\therefore$ A 中每个元素中的一对数的和都在 $B=\{0,1,2\}$ 中能找到唯一的象，

$\therefore$ f 是从 A 到 B 的映射.

例 4 已知函数 $f(x)=\log_{(1+a)}(x-ka)(|k| \leqslant 1)$ 的定义域为 A，函数 $g(x)=\log_{(1+a)^2}(x^2-a^2)$ 的定义域为 B，求 $A \cap B$.

分析 此例中涉及两个参数 k 和 a，而 k 已给定了取值范围，故本题要首先确定参数 a 的取值范围，以 a 的不同取值分别确定 $A \cap B$.

解 $f(x)$ 中 a 的取值范围是：$a>-1, a \neq 0$.

$g(x)$ 中 a 的取值范围是：$a \neq 0$、-1、-2. 而 $A \cap B$ 由不等式组

$$\begin{cases} x>ka, \\ x^2-a^2>0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>ka, \\ (x+a)(x-a)>0. \end{cases}$$

确定，从而易知，当 $a>0$ 时，$A \cap B=\{x \mid x>a\}$；当 $-1<a<0$ 时，$A \cap B=\{x \mid x>-a\}$.

说明 对于含参系数的函数求定义域问题，要注意着眼于使函数有意义的参数的取值范围的不同情况分类讨论.

例 5 (1) 若 $f(x)$的定义域为$(0,1)$，试分别求 $f(x^2-1)$、$f(\sin x)$中 x 的取值范围；

(2) 函数 $y=f[\lg(x+1)]$中 x 的取值范围为 $0\leqslant x\leqslant 9$，试求 $y=f(x)$的定义域.

分析 (1) 首先要正确理解记号 $f(x)$的意义，如(1)中对 $f(x)$限定了一切 x 都只能在$(0,1)$内取值，因而将 x 替换成 x^2-1 和 $\sin x$，就必须满足：$0<x^2-1<1$ 和 $0<\sin x<1$.

(2) 根据 x 的取值范围，确定出 $\lg(x+1)$的取值范围.

解 (1) 依上分析，解不等式 $0<x^2-1<1$ 得 $f(x^2-1)$的定义域为

$$(-\sqrt{2},-1)\cup(1,\sqrt{2}).$$

解不等式 $0<\sin x<1$ 得 $f(\sin x)$的定义域为 $(2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2})\cup(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\pi)(k\in Z)$.

(2) 依上分析，由 $0\leqslant x\leqslant 9$ 得 $0\leqslant\lg(x+1)\leqslant 1$. 得 $y=f(x)$的定义域为$[0,1]$.

例 6 求函数 $f(x)=\sin x+\frac{4}{\sin x}$，$x\in(0,\pi)$的值域.

分析 求函数的值域，首先要明确两点：一是值域的概念，即对于定义域 D 上的函数 $y=f(x)$，其值域就是指集合 $B=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$；二是函数的定义域及函数的性质是确定值域的依据.

解 令 $t=\sin x$，$f(x)=\sin x+\frac{4}{\sin x}=t+\frac{4}{t}$.

$\because\ x\in(0,\pi)$，$\therefore\ t\in(0,1]$

设　$0<t_1<t_2\leqslant 1$，$t_1-t_2<0$，则

$$f(t_2)-f(t_1)=t_2+\frac{4}{t_2}-t_1-\frac{4}{t_1}=(t_2-t_1)-4\times\frac{t_2-t_1}{t_1t_2}$$

$$=(t_2-t_1)(1-\frac{4}{t_1t_2})<0.$$

∴　$f(t_2)-f(t_1)<0$，$f(t_2)<f(t_1)$.

∴　$f(t)$在$(0,1]$上是减函数，$y=f(t)\geqslant f(1)=5$.

故　$f(x)=\sin x+\dfrac{4}{\sin x}$ 在 $x\in(0,\pi)$上的值域是

$$y\in[5+\infty).$$

说明　在求值域时首先要随时顾及定义域对解题过程及结果的制约；若用换元法时，要根据原函数定义域求出新元的范围.

例 7　已知函数 $f(x)=\lg(x+\sqrt{2+x^2})-\lg\sqrt{2}$，求证：(1)$f(x)$的图象关于原点对称；(2)$f(x)$是单调函数.

分析　欲求证“函数的图象关于原点对称”可证其等价命题“函数为奇函数”代替.

证明　(1)显然 $x\in R$，由于

$$f(-x)+f(x)=\lg[(-x+\sqrt{2+x^2})(x+\sqrt{2+x^2})]$$
$$-2\lg\sqrt{2}=\lg[(2+x^2)-x^2]-\lg 2=0,$$

∴　$f(-x)=-f(x)$.

∴　$f(x)$为奇函数，即 $f(x)$的图象关于原点对称.

(2) 设　$x_1<x_2$，∵　$\sqrt{2+x_1^2}>-x_1$，$\sqrt{2+x_2^2}>-x_2$，

∴　$1>\dfrac{-(x_1+x_2)}{\sqrt{2+x_1^2}+\sqrt{2+x_2^2}}$，　∴　$x_2-x_1>$

$\dfrac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{1+x_1^2}+\sqrt{1+x_2^2}}=\sqrt{1+x_1^2}-\sqrt{1+x_2^2}$,即 $x_1+\sqrt{1+x_1^2}<x_2+\sqrt{1+x_2^2}$,$\therefore f(x_1)<f(x_2)$.

$\therefore$ $f(x)$为单调增函数.

例 8 已知定义在$(-\infty,4]$上的减函数 $f(x)$,使得 $f(m-\sin x)\leqslant f(\sqrt{1+2m}-\dfrac{7}{4}+\cos^2 x)$对一切实数 x 均成立,求 m 的取值范围.

解 依题意有

$$\begin{cases} m-\sin x\leqslant 4, \\ \sqrt{1+2m}-\dfrac{7}{4}+\cos^2 x\leqslant 4, \\ m-\sin x\geqslant \sqrt{1+2m}-\dfrac{7}{4}+\cos^2 x. \end{cases}$$

对于 $x\in R$ 成立,再按 m 集项,即它等价于:

$$\begin{cases} m-4\leqslant \sin x, & ① \\ \sqrt{1+2m}-\dfrac{23}{4}\leqslant -\cos^2 x, & ② \\ m-\sqrt{1+2m}+\dfrac{7}{4}\geqslant \cos^2 x+\sin x. & ③ \end{cases}$$

①对 $x\in R$ 恒成立的条件是

$m-4\leqslant -1$,即 $m\leqslant 3$;

②对 $x\in R$ 成立的条件是

$$\sqrt{1+2m\leqslant\frac{19}{4}},$$

解得 $-\dfrac{1}{2}\leqslant m\leqslant \dfrac{345}{32}$;

③等价于 $m-\sqrt{1+2m}+\frac{1}{2}\geqslant-\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2$,

此式对于 $x\in R$ 成立的条件是

$$m-\sqrt{1+2m}+\frac{1}{2}\geqslant 0.$$

解得 $m=-\frac{1}{2}$ 或 $m\geqslant\frac{3}{2}$. ④

综合得 $m\in\left\{-\frac{1}{2}\right\}\cup\left[\frac{3}{2},3\right]$.

例 9 设 $f(x)$是定义在 R 上以 2 为周期的函数,当 $x\in[-1,1]$时,$f(x)=x^2$.

(1) 求 $x\in[1,3]$时,$f(x)$的解析式;

(2) 求 $f(-3)$,$f(3.5)$的值.

分析 解本题的关键是根据周期性定义 $f(x+T)=f(x)$,灵活地把所求问题中自变量加上或减去函数周期的 k($k\in z$)倍,使得到的$(x-2k)$或$(x+2k)$的取值范围仍在已知区间$[-1,1]$内,这样便可利用 $x\in[-1,1]$时的已知解析式来解.

解 (1) ∵ $x\in[1,3]$,又 2 是 $f(x)$的周期,故有 $x-2\in[-1,1]$,且 $f(x)=f(x-2)=(x-2)^2$.

即 $x\in[1,3]$时,$f(x)=(x-2)^2$.

(2) ∵ $x=-3$,而 $x+2=-1\in[-1,1]$,

∴ $f(-3)=f(-3+2)=f(-1)=(-1)^2=1$

仿上,$f(3.5)=f(-0.5+2\times2)=f(-0.5)=(0.5)^2=0.25$.

例 10 当幂函数 $y=x^n$($n\in Q$)在第一象限的图象具有下列特点时,指出 n 应取怎样的值.

(1)通过原点,是上升的;

(2) 不通过原点，又不与两轴相交，是下降的；

(3) 当 $x\in(0,1)$时，在 $y=x$ 的图象的下方，当 $x\in(1,+\infty)$时，在 $y=x$ 的图象的上方.

分析 解本题的关键，是熟练掌握幂函数的图象.

解 (1) n 是正奇数或分子为奇数的正既约分数.

(2) n 是负奇数或分子不为偶数的负既约分数.

(3) n 是大于 1 的有理数.

例 11 在坐标平面上，已知曲线 $y=f(x)=\log_2(x+1)$，且当点(x,y)满足 $y=f(x)$时，点$\left(\frac{x}{3},\frac{y}{2}\right)$ 在曲线 $y=g(x)$ 上.

(1) 写出 $g(x)$的表达式；

(2) 求 x 的取值范围，使 $g(x)-f(x)\geqslant 0$；

(3) 在(2)有范围内，求 $g(x)-f(x)$的最大值.

解 (1) 令 $\frac{x}{3}=X$，$\frac{y}{2}=Y$，则 $x=3X$，$y=2Y$.

$\because$ $y=\log_2(x+1)$，$\therefore$ $2Y=\log_2(3X+1)$，

$Y=\frac{1}{2}\log_2(3X+1)$.

$\therefore$ $g(x)=\frac{1}{2}\log_2(3x+1)$.

(2) $\because$ $g(x)-f(x)\geqslant 0$，

$\therefore$ $\frac{1}{2}\log_2(3x+1)\geqslant\log_2(x+1)$，解得 $0\leqslant x\leqslant 1$，

(3) $\because$ $g(x)-f(x)=\frac{1}{2}\log_2\frac{3x+1}{(x+1)^2}$，

令 $k=\frac{3x+1}{(x+1)^2}$，得 $kx^2+(2k-3)x+k-1=0$，又$\because$ $k\neq 0$，且 $x\in R$，