高职高专交通土建类系列规划教材

工程数学

主　编　王丰胜　李洪岩
副主编　施晓青　严卫平　李秀美
主　审　彭　玲

合肥工业大学出版社
HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

高职高专交通土建类系列规划教材

工程数学

GONG CHENG SHU XUE

主　编　王丰胜　李洪岩
副主编　施晓青　严卫平　李秀美
主　审　彭　玲

合肥工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

工程数学/王丰胜,李洪岩主编.—合肥:合肥工业大学出版社,2013.6
ISBN 978-7-5650-1297-6

Ⅰ.①工… Ⅱ.①王…②李… Ⅲ.①工程数学 Ⅳ.①TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 074089 号

工 程 数 学

主 编 王丰胜 李洪岩　　　　责任编辑 张择瑞

出 版	合肥工业大学出版社	**版 次**	2013 年 6 月第 1 版
地 址	合肥市屯溪路 193 号	**印 次**	2013 年 6 月第 1 次印刷
邮 编	230009	**开 本**	787 毫米×1092 毫米 1/16
电 话	综合图书编辑部:0551-62903204	**印 张**	16.75
	市 场 营 销 部:0551-62903198	**字 数**	408 千字
网 址	www.hfutpress.com.cn	**印 刷**	安徽江淮印务有限责任公司
E-mail	hfutpress@163.com	**发 行**	全国新华书店

主编信箱 30301296@qq.com　　责编信箱/热线 zrsg2020@163.com 13965102038

ISBN 978-7-5650-1297-6　　　　定价:30.00 元

前　　言

《工程数学》是在全国路桥工程专业指导委员会数学课程改革研讨会召开之后编写而成的，是为了更好地适应高职教育发展的需求。本教材是我们结合多年来数学教学与土木工程类专业教学结合的实践，针对土木工程类专业对数学知识需求的特点组织编写的，其内容更合理、更具有针对性，适用性更强。

本教材在编写过程中，力求突出以下特点：

1. 根据教育部最新制定的高职高专数学课程的基本要求，遵循理论“必需、够用、兼顾”和以应用为主要目的的原则，本教材在不影响数学体系的前提下，淡化理论，力求深入浅出，强化实践能力的培养，并从实际出发，使数学理论和专业实际应用有机地结合起来，使学生更好地了解数学的应用以及激发学生的学习热情。

2. 为培养高素质的应用型人才，结合当前数学发展的新形势，本教材在编写过程中强调数学在专业上的应用性。例如，在学习一些重要概念时引入土木工程上面的一些案例，更体现数学的实用价值。

3. 本教材在结构体系、内容安排、例题选择等方面，做了大量细致的工作，对数学概念的引入力求以生产、生活实际问题为切入点，每章后面配有大量的习题，习题难度具有梯度和灵活性。

4. 本教材的内容全面，并以模块化形式出现，第一模块是微积分知识，在这一模块里面我们打破以往教材的结构，把多元微分和一元微分的内容合并，把定积分和不定积分的内容合并；第二模块概率统计，这一模块里面重点是数理统计，概率部分只介绍一些基本知识；第三模块为线性代数部分，在这一模块中我们只介绍线性代数一些最基本的内容。原则上我们要求第一模块为必学内容，第二模块和第三模块根据专业需求不同可选上。

本教材由安徽交通职业技术学院土木工程系王丰胜老师和李洪岩老师任主编；施晓青老师、严卫平老师、李秀美老师任副主编。具体分工如下：王丰胜

老师负责拟订总体章节内容的构成;第一章至第三章由施晓青老师编写;第四章至第五章由李秀美老师编写;第六章、第七章、第八章由李洪岩老师编写;第九章由严卫平老师编写;最后由李洪岩老师统稿。

尽管我们在此教材的特色建设方面做了许多努力,但是由于作者水平有限,加之时间仓促,编写过程中难免有不足之处,真诚希望专家、同行及广大读者批评指正,并将意见和建议及时反馈给我们,以便下次修订时改进。在此感谢安徽交通职业技术学院土木工程系齐永生、王东、严任苗、王林攀、凌训意等老师给教材提供的案例,还要感谢土木工程系彭玲老师对本书作了审稿,最后还要向对此项工作给予大力支持和在教材编写过程提出宝贵建议的教务处李亮处长和章劲松副处长表示衷心的感谢。

编　者

2013 年 4 月

目　　录

第一章 函数的极限与连续

第一节 预备知识

一、基本初等函数

我们在中学阶段学习过函数的定义，讨论了函数的单调性、奇偶性、周期性和有界性等性质. 为了学习方便，现简要复习一下关于函数的有关知识.

定义 1 设数集 $D \subset \mathbf{R}$，则称映射 $f: D \to \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为

$$y = f(x), x \in D,$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，即 $D_f = D$.

应注意的问题：

(1) 记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的

前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则，而后者表示与自变量 x 对应的函数值. 但为了叙述方便，习惯上常用记号"$f(x), x \in D$"或"$y = f(x), x \in D$"来表示定义在 D 上的函数，这时应理解为由它所确定的函数 f.

(2) 函数符号

函数 $y = f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可改用其他字母，例如"F""φ"等. 此时函数就记作 $y = F(x)$，$y = \varphi(x)$.

(3) 函数的两要素

函数是从实数集到实数集的映射，其值域总在 $\mathbf{R}$ 内，因此构成函数的要素是定义域 D_f 及对应法则 f. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的.

(4) 函数的定义域

函数的定义域通常按以下两种情形来确定：一种是对有实际背景的函数，根据实际背景中变量的实际意义确定；另一种是对抽象地用算式表达的函数，通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域称为函数的自然定义域.

下面介绍一下邻域的概念. 设 $a \in \mathbf{R}$，则以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域，记作 $U(a)$.

设 δ 是一个正数，则称开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a, \delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\},$$

其中,点 a 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径.

去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$:

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

二、初等函数

基本初等函数有以下几类:

常量函数:$y=c$(c 为常数);

幂函数:$y=x^u$($u\in\mathbf{R}$,是常数);

指数函数:$y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq1$);

对数函数:$y=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq1$,特别当 $a=\mathrm{e}$ 时,记为 $y=\ln x$);

三角函数:$y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\tan x$,$y=\cot x$,$y=\sec x$,$y=\csc x$;

反三角函数:$y=\arcsin x$,$y=\arccos x$,$y=\arctan x$,$y=\operatorname{arccot} x$.

初等函数是指由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数.例如

$$y=\sqrt{1-x^2},y=\sin^2 x,y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$$

等都是初等函数.

三、空间直角坐标系及点的坐标

为了沟通空间图形与方程的关系,需要建立空间点与有序数组之间的联系.为此,我们引进空间直角坐标系.

过空间一个定点 O,作三条互相垂直的数轴,它们都以 O 为原点,一般具有相同的长度单位.这三条轴分别称为 x 轴(横轴),y 轴(纵轴)和 z 轴(竖轴),统称为坐标轴.通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上,而 z 轴则是铅直的,它们的正方向符合右手规则,即以右手握住 z 轴,当右手的四个手指从 x 轴的正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴正向时,大拇指的方向就是 z 轴的正方向.这样的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系,记作 $Oxyz$,点 O 叫做坐标原点(如图 1-1).x 轴和 y 轴所确定的平面叫做 xOy 面,y 轴和 z 轴所确定的平面叫做 yOz 面,x 轴和 z 轴所确定的平面叫做 xOz 面,它们统称为坐标面.三个坐标面将空间分成八个部分,每一部分叫做卦限.含有 x 轴、y 轴和 z 轴正半轴的那个卦限叫做第一卦限,第二、三、四卦限均在 xOy 面的上方,按逆时针方向确定.第五、六、七、八卦限在 xOy 面的下方,依次位于第一、二、三、四卦限之下(如图 1-2),这八个卦限分别用字母 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ 表示.

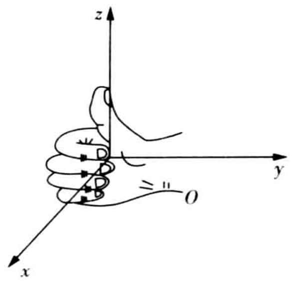

图 1 - 1

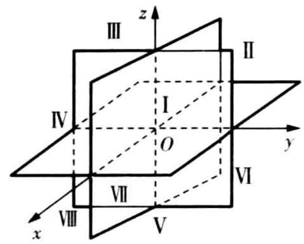

图 1 - 2

取定了空间直角坐标系之后，就可以建立空间中点与有序数组之间的一一对应关系. 设 M 是空间中的一个点，过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴，它们与坐标轴的交点依次为 P,Q,R（如图 1 - 3），这三个点在三个坐标轴上的坐标依次为 x,y,z. 于是空间中一点 M 就唯一地确定了一个有序数组 (x,y,z)；反之，已知一个有序数组 (x,y,z)，我们在 x 轴，y 轴，z 轴上找到坐标分别为 x,y,z 的三个点 P,Q,R，过这三个点各作一平面分别垂直于所属的坐标轴，这三个平面就唯一地确定了一个交点 M. 这样，空间中的点 M 就与有序数组 (x,y,z) 之间建立了一一对应关系. 这个有序数组 (x,y,z) 叫做点 M 的坐标，其中 x,y,z 依次称为点 M 的横坐标、纵坐标及竖坐标，此时点 M 记作 $M(x,y,z)$.

原点、坐标面上和坐标轴上的点，其坐标各有一定特点，如坐标原点的坐标为 $(0,0,0)$，x 轴上点的坐标为 $(x,0,0)$，y 轴上点的坐标为 $(0,y,0)$，z 轴上点的坐标为 $(0,0,z)$，xOy 面上点的坐标为 $(x,y,0)$，yOz 面上点的坐标为 $(0,y,z)$，xOz 面上点的坐标为 $(x,0,z)$.

四、两点间的距离公式

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点，过 M_1，M_2 两点作六个与坐标轴垂直的平面，这六个面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体（如图 1 - 4）. 由于 $\triangle M_1NM_2$ 为直角三角形，$\angle M_1NM_2$ 为直角，所以

$$d^2 = |M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2.$$

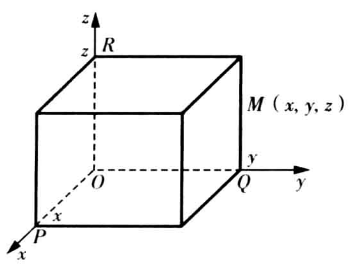

图 1 - 3

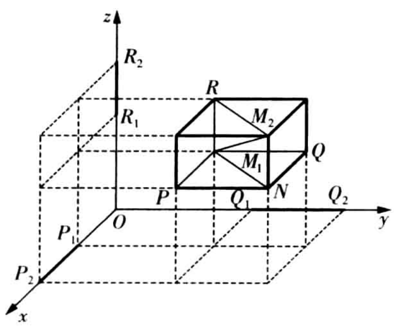

图 1 - 4

又 ΔM_1PN 也是直角三角形，且 $|M_1N|^2=|M_1P|^2+|PN|^2$，所以

$$d^2=|M_1M_2|^2=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2.$$

由于

$$|M_1P|=|P_1P_2|=|x_2-x_1|,$$

$$|PN|=|Q_1Q_2|=|y_2-y_1|,$$

$$|NM_2|=|R_1R_2|=|z_2-z_1|,$$

所以

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}, \tag{1-1}$$

这就是空间两点间的距离公式.

特殊地，点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{1-2}$$

例 1 在 z 轴上求与点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

解 因为所求的点 M 在 z 轴上，所以设该点为 $M(0,0,z)$，依题意有

$$\sqrt{(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2},$$

去根号解得 $z=\frac{14}{9}$，所以，所求的点为 $M\left(0,0,\frac{14}{9}\right)$.

例 2 求证以 $M_1(4,3,1)$、$M_2(7,1,2)$、$M_3(5,2,3)$ 为顶点的三角形是一个等腰三角形.

解

$$|M_1M_2|^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14,$$

$$|M_2M_3|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6,$$

$$|M_3M_1|^2=(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2=6,$$

所以 $|M_2M_3|=|M_3M_1|$，原结论成立.

五、多元函数

例 3 圆柱体的体积 V 和它的底半径 r、高 h 之间具有关系

$$V=\pi r^2h.$$

这里，当 r、h 在集合 $\{(r,h)\mid r>0,h>0\}$ 内取定一对值 (r,h) 时，V 对应的值就随之确定.

例 4 一定量的理想气体的压强 p、体积 V 和绝对温度 T 之间具有关系

$$p=\frac{RT}{V},$$

其中 R 为常数. 这里，当 V、T 在集合 $\{(V,T)\mid V>0,T>0\}$ 内取定一对值 (V,T) 时，p 的对应值就随之确定.

例 5 $R=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$.

这里，当 R_1、R_2 在集合 $\{(R_1,R_2)\mid R_1>0,R_2>0\}$ 内取定一对值 (R_1,R_2) 时，R 的对应值就随之确定.

定义 2 设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个非空子集，称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的二元函数，通常记为

$$z=f(x,y),(x,y)\in D(\text{或 } z=f(P),P\in D)$$

其中点集 D 称为该函数的定义域，x、y 称为自变量，z 称为因变量.

上述定义中，与自变量 x、y 的一对值 (x,y) 相对应的因变量 z 的值，也称为 f 在点 (x,y) 处的函数值，记作 $f(x,y)$，即 $z=f(x,y)$.

值域：$f(D)=\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$.

函数的其他符号：$z=z(x,y)$，$z=g(x,y)$ 等.

类似地，可定义三元函数 $u=f(x,y,z)$，$(x,y,z)\in D$ 以及三元以上的函数.

一般地，把定义 2 中的平面点集 D 换成 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 内的点集 D，映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 就称为定义在 D 上的 n 元函数，通常记为

$$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D,$$

或简记为

$$u=f(x),x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D,$$

也可记为

$$u=f(P),P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D.$$

关于函数定义域的约定：在一般讨论用算式表达的多元函数 $u=f(x)$ 时，就以使这个算式有意义的变元 x 的值所组成的点集为这个多元函数的自然定义域. 因而，对这类函数，它的定义域不再特别标出. 例如，函数 $z=\ln(x+y)$ 的定义域为 $\{(x,y)\mid x+y>0\}$（无界开区域）；函数 $z=\arcsin(x^2+y^2)$ 的定义域为 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$（有界闭区域）.

二元函数的图形：点集 $\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形，二元函数的图形是一张曲面.

例如，$z=ax+by+c$ 是一张平面，而函数 $z=x^2+y^2$ 的图形是旋转抛物.

习 题 一

1. 下列各题中所给的两个函数是否相等？为什么？

(1) $y=x$ 和 $y=\sqrt{x^2}$；

(2) $y=x$ 和 $y=(\sqrt{x})^2$；

(3) $y=2-x$ 和 $y=\dfrac{4-x^2}{2+x}$；

(4) $y=|x-1|$ 和 $y=\begin{cases}1-x, & x<1, \\ 0, & x=1, \\ x-1, & x>1.\end{cases}$

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{3x+4}$；

(2) $y=\dfrac{2}{x^2-3x+2}$；

(3) $y=\sqrt{1-|x|}$；

(4) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

3. 设 $f(x)=\arcsin x$，求 $f(0)$，$f(-1)$，$f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$f(1)$.

4. 有一边长为 a 的正方形铁片，从它的四个角截取相等的小正方形，然后折起各边做一个无盖的小盒子，求它的容积与截取的小正方形边长之间的函数关系，并说明定义域(参见图 1-5).

5. 有一个底半径 R，高为 H 的圆锥形量杯，为了在它的侧面刻上表示容积的刻度，需要找出溶液的容积与其对应高度之间的函数关系，试写出其表达式，并指明定义域(参见图 1-6).

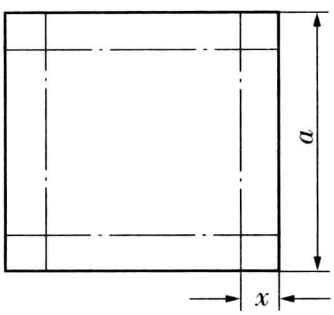

图 1-5

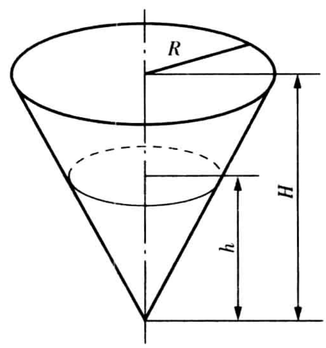

图 1-6

6. 在半径为 R 的球内做内接圆柱体，试将圆柱体的体积 V 表示为高 h 的函数，并指明定义域.

7. 已知水渠的横断面为等腰梯形，倾斜角 $\varphi=40°$(如图 1-7) $ABCD$ 叫做过水断面(即垂直于水流的断面)，$L=AB+BC+CD$ 叫做水渠的湿周. 当过水断面的面积为定值 S_0 时，求湿周 L 与水渠深 h 之间的函数关系式，并指明定义域.

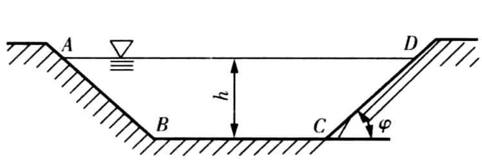

图 1-7

8. 火车站收取行李费的规定如下：当行李不超过 50 千克时，按基本运费计算，每千克收费 0.15 元；当超过 50 千克时，超重部分按每千克 0.25 元收费. 试求运费 y(元) 与重量 x(千克) 之间的函数关系式，并作出函数的图象.

8. 梯形如图 1-8. 当垂直于 x 轴的直线扫过该梯形时，若直线与 x 轴的交点坐标为(x，0)，求直线扫过的面积 S 与 x 之间的函数关系. 指明定义域，并求 $S(1)$，$S(3)$，$S(5)$，$S(6)$ 的值.

10. 在底为 $AC=b$ 和高为 $BD=h$ 的三角形 ABC 之中(如图 1-9)，内接一个高为 $NM=x$ 的矩形 $KLMN$. 把矩形 $KLMN$ 的周长 p 及面积 S 分别表示为 x 的函数. 指出定义域，并作出函数的图象.

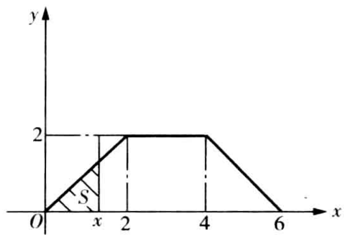

图 1-8

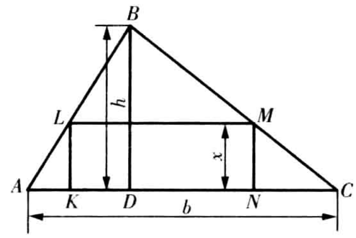

图 1-9

第二节　函数的极限

一、函数极限的定义

1. 自变量趋于有限值时函数的极限

通俗定义：

如果当 x 无限接近于 x_0，函数 $f(x)$ 的值无限接近于常数 A，则称当 x 趋于 x_0 时，$f(x)$ 以 A 为极限. 记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(\text{当 } x\to x_0).$$

分析：在 $x\to x_0$ 的过程中，$f(x)$ 无限接近于 A 就是 $|f(x)-A|$ 能任意小，或者说，在 x 与 x_0 接近到一定程度(比如 $|x-x_0|<\delta$，δ 为某一正数)时，$|f(x)-A|$ 可以小于任意给定的(小的)正数 ε，即 $|f(x)-A|<\varepsilon$；反之，对于任意给定的正数 ε，如果 x 与 x_0 接近到一定程度(比如 $|x-x_0|<\delta$，δ 为某一正数)就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则能保证当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 无限接近于 A.

定义 1　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε(不论它多么小)，总存在正数 δ，使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时

的极限，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(\text{当 } x \to x_0).$$

定义的简单表述：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta, |f(x) - A| < \varepsilon.$$

单侧极限：

若当 $x \to x_0^-$ 时，$f(x)$ 无限接近于某常数 A，则常数 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的左极限，记为 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$ 或 $f(x_0^-) \to A$；

若当 $x \to x_0^+$ 时，$f(x)$ 无限接近于某常数 A，则常数 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的右极限，记为 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$ 或 $f(x_0^+) \to A$.

讨论：

(1) 左右极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义如何叙述？

(2) 当 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的左右极限与当 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限之间有什么关系？

提示：左、右极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义及与当 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限之间的关系如下.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, x_0 - \delta < x < x_0, |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, x_0 < x < x_0 + \delta, |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = A, \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A.$$

例 1 求函数 $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$ 当 $x \to 0$ 时的极限(参见图 1-10).

解 不存在，这是因为 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-}(x - 1) = -1$，$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+}(x + 1) = 1$，即 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$，所以极限不存在.

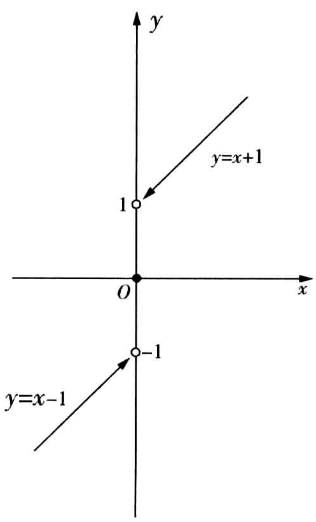

图 1-10

2. 自变量趋于无穷大时函数的极限

设 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义. 如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε，总存在着正数 X，使得当 x 满足不等式 $|x| > X$ 时，对应的函数数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则常数 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(\text{当 } x\to\infty).$$

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

类似地可定义

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \text{ 和 } \lim_{x\to+\infty}f(x)=A.$$

结论：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的定义几何意义如图 1 - 11 所示。

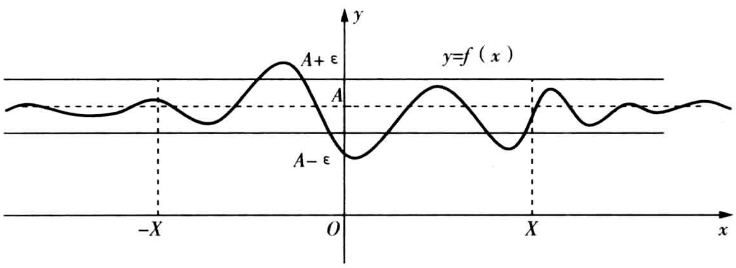

图 1 - 11

二、函数极限的性质

定理 1 （函数极限的唯一性）如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，那么此极限是唯一的.

定理 2 （函数极限的局部有界性）如果 $f(x)\to A(x\to x_0)$，那么存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

定理 3 （函数极限的局部保号性）如果 $f(x)\to A(x\to x_0)$，而且 $A>0$(或 $A<0$)，那么存在常数 $\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

定理 3′ 如果 $f(x)\to A(x\to x_0)(A\neq 0)$，那么存在点 x_0 的某一去心邻域，在该邻域内，有 $|f(x)|>\dfrac{1}{2}|A|$.

推论 如果在 x_0 的某一去心邻域内有 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$)，而且 $f(x)\to A(x\to x_0)$，那么 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$).

三、二元函数的极限

与一元函数的极限概念类似，如果在点 $P(x,y)$ 以任何一种方式趋向点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，对应的函数值 $f(x,y)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 是函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to$

(x_0, y_0) 时的极限.

记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \text{ 或 } f(x,y)\to A((x,y)\to(x_0,y_0)),$$

也记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \text{ 或 } f(P)\to A(P\to P_0).$$

上述定义的极限也称为二重极限.

注意:

(1) 二重极限存在,是指 P 以任何方式趋于 P_0 时,函数都无限接近于 A;

(2) 如果当 P 以两种不同方式趋于 P_0 时,函数趋于不同的值,则函数的极限不存在.

讨论:

函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点(0,0) 有无极限?

提示: 当点 $P(x,y)$ 沿 x 轴趋于点(0,0) 时,有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0} 0=0;$$

当点 $P(x,y)$ 沿 y 轴趋于点(0,0) 时,有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{y\to 0} f(0,y)=\lim_{y\to 0} 0=0.$$

当点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

因此,函数 $f(x,y)$ 在(0,0) 处无极限.

总结二元函数的极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在,即要求点 $P(x,y)$ 以任意方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时,函数 $f(x,y)$ 极限不仅要存在,而且都要相等.若当点 $P(x,y)$ 趋向于 $P_0(x_0,y_0)$ 时,

(1) 任何路径下函数极限值恒为定值,极限存在;

(2) 特殊路径下函数极限值不相等,极限不存在;

(3) 特殊路径下函数极限值相等,极限存在性不定.

相比较而言,上述三点中最为实用的是第(2) 种情况,用来判断二元函数极限是否存在.一般判断方法如下:令 $P(x,y)$ 沿 $y=kx$ 趋向于 $P_0(x_0,y_0)$,若二元函数的值与 k 有关,则函数的极限不存在.