高等学校教材

材料力学

【第二版】 下册

孙训方 方孝淑 关来泰编

CAILIAO LIXUE

高等教育出版社

164962

高等学校教材

材料力学

下册

（第二版）

孙训方　方孝淑　关来泰　编

江南大学图书馆
91395626

高等教育出版社

本书第一版是根据一九七七年十一月原教育部委托召开的高等学校工科基础课力学教材会议上讨论的"《材料力学》教材编写大纲（土建类、多学时）"的内容编写的。因第一版纸型已破损，修订本尚需一定时间才能完成，为了满足读者的需要，由编者孙训方对原书作了小修订重排，作为第二版供应。

第二版仍分上下两册出版。上册只作了些局部小修改，内容包括：绪论及基本概念，轴向拉伸和压缩，扭转，弯曲内力，弯曲应力，弯曲变形和简单超静定梁。下册第十四章及相应的附录删掉，在第十三章后增加一节低应力脆断·断裂韧度，其余各章有少量修改，这样下册内容包括：应力应变状态分析，强度理论，组合变形，压杆稳定，能量方法，实验应力分析基础和材料力学性能的进一步研究。

高等学校教材

材 料 力 学

下 册

（第二版）

孙训方 方孝淑 关来泰 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

*

开本 850 × 1168 1/32 印张 12 字数 300 000

1979年4月第1版 1987年5月第2版 1987年5月第1次印刷

印数 00,001—27 290

书号 15010·0861 定价2.40元

下册目录

第七章　应力状态与应变状态分析

§ 7-1．应力状态的概念

在分析拉（压）杆斜截面上的应力时（参见§2-3）已知，通过杆内任意一点所作各个截面上的应力都随着截面的方位而改变。从薄壁圆筒在扭转时的应力分析中（§3-2），同样可以看到类似情况。一般说来，通过受力构件内任意一点所作的各个截面上，该点处的应力都随截面方位的不同而异。在作构件的强度计算时，对于轴向拉伸（压缩）和纯弯曲的构件，由于其材料处于单向拉伸或压缩状态，故可根据构件横截面上的正应力与材料在单向拉伸（压缩）时的容许应力加以比较而建立强度条件。对于自由扭转的构件，其材料处于纯剪切应力状态，故可根据构件横截面的剪应力与材料在纯剪切时的容许应力相比较来建立强度条件。但对于一般情况，例如梁在横力弯曲时，在梁的横截面上，除去离中性轴最远的两边缘和中性轴上的各点以外，在其它点处既有正应力又有剪应力（参看§5-4），材料处于较复杂的应力状态。当需要按照这种点处的应力对梁进行强度计算时，既不能认为材料处于单向拉伸或压缩状态而只按正应力建立强度条件，也不能认为材料处于纯剪切应力状态而只按剪应力来建立强度条件，而必须考虑两种应力对材料强度的综合影响。要解决在这类情况下的强度计算问题，就需要全面地研究通过构件内的一点所作各个截面上的应力，也就是说，要研究一点处的应力状态。

为了研究受力构件内某一点处的应力状态，可以围绕该点取出一个单元体。例如，为了研究图7-1，a所示工字形截面梁内

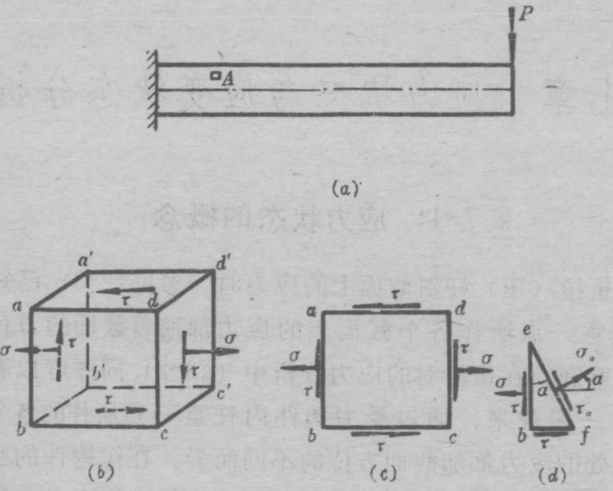


图 7-1

A点处的应力状态，可按§5-5所介绍的方法，从梁内围绕A点取出如图7-1,a、b所示的单元体。因为单元体各边长都是无穷小的量，故可以认为，在单元体各个表面上的应力都是均匀的，而且可认为在单元体的任意一对平行平面(例如图7-1,b中的ab'面和dc'面)上应力均相等，它代表了通过所研究的点并与上述平面平行的面上的应力。为了简便起见，将这种前后两个面上应力为零的单元体，用一个平面图来表示（图7-1,c)。在梁的横截面上A点处的应力σ和τ，可按公式（5-2）和（5-8),即$\sigma=\dfrac{My}{I_z}$和$\tau=\dfrac{QS_z^*}{I_zd}$分别求得。再根据剪应力互等定理，就可确定$A$点处图示单元体各表面上的剪应力。从而也就可利用截面法从图示单元体中截出体积元素（例如图7-1,d中所示),根据其平衡条件求出斜截面上的应力（如图7-1,d中的σ_a、τ_a)，亦即A点处斜截面上的应力。

本章的主要内容是：研究一点处的应力状态，并从而确定该点处的最大正应力、最大剪应力、最大线应变和比能。这些都是对应力状态比较复杂的构件进行强度计算的基础。此外，还将讨论一点处的应变状态，这既是实验应力分析方法（见第十二章）的基础，对于像层状纤维增强复合材料这一各向异性材料，建立应力应变关系，也是个重要的方面。

§ 7-2. 平面应力状态下的应力研究·应力圆

本节中将结合在普遍形式的平面应力状态（关于平面应力状态的全部含义将在后面阐述）下的单元体（图7-2,a），介绍如何根据单元体各面上已知的应力来确定其斜截面上的未知应力。图示单元体有一对互相平行的面上没有应力，如前所述，可将该单元体用平面图表示（图7-2,b）。这里所指的斜截面 ef 是与图7-2,a 所示单元体的一对应力为零的面垂直的。

（一）斜截面上的应力 对于图7-2,a所示的单元体，在外法线分别与 x 轴和 y 轴重合的两对平面上应力 σ_x、τ_x和σ_y、τ_y都是已知的。下面就利用截面法来找出在该单元体的斜截面ef上（图7-2, b）的应力。斜截面ef的外法线 n 与 x 轴间的夹角用 α 来表示，以后就简称该斜截面为 α 截面，并规定从 x 轴沿逆时针转向转到外法线 n 的 α 角为正值。α 截面上的应力用 σ_α和 τ_α来表示，对正应力σ_α，规定以拉应力为正、压应力为负，对剪应力 τ_α，则以其矢量对单元体内任一点产生顺时针转向的矢量矩者为正，反之为负。这样对应力σ_α和τ_α的正负号所作的规定，和前面对轴力N及梁的剪力Q所作的正负号规定是一致的。

现用斜截面ef假想地将单元体截分为二（图7-2, b），留下左边部分的体元ebf（图7-2,c），根据其平衡方程来求出σ_α、τ_α。

在写平衡方程时，要注意以下两点：

（1）斜截面上的 σ_α 和 τ_α 都是未知量，暂时假设它们都是正

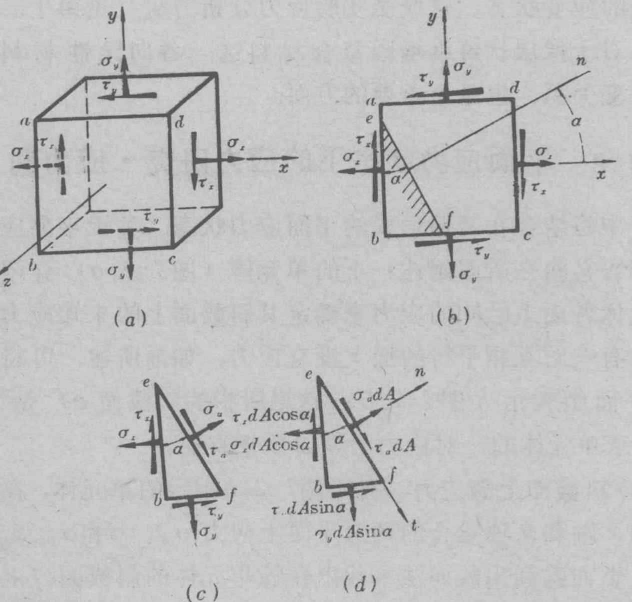


图 7-2

值的（见图7-2，c）；

（2）必须将各面上的应力乘上相应的面积元素以得出各面上的内力，因为满足平衡关系的是作用在左边部分体元 ebf 上的各个内力。

令斜截面ef的面积元素为 dA，从几何关系可知，eb和bf两个面的面积将分别为 $dA\cos\alpha$ 和$dA\sin\alpha$。作用在ebf 的三个面上的力是个平面汇交力系。以斜截面的法线 n 和切线 t 作为参考轴（见图 7-2，d），则对于参考轴 n 和 t 所写出的平衡方程分别为

$$\sigma_\alpha dA+(\tau_x dA\cos\alpha)\sin\alpha-(\sigma_x dA\cos\alpha)\cos\alpha$$
$$+(\tau_y dA\sin\alpha)\cos\alpha-(\sigma_y dA\sin\alpha)\sin\alpha=0$$
$$\tau_\alpha dA-(\tau_x dA\cos\alpha)\cos\alpha-(\sigma_x dA\cos\alpha)\sin\alpha$$
$$+(\tau_y dA\sin\alpha)\sin\alpha+(\sigma_y dA\sin\alpha)\cos\alpha=0$$

由剪应力互等定理（参看§3-3）可知，τ_x和τ_y大小相等（它们的指向已表示在图7-2，c中）。据此，再利用以下三角关系：

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2},\ \sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2},$$
$$2\sin\alpha\cos\alpha=\sin2\alpha$$

既可将两平衡方程简化为

$$\sigma_\alpha=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos2\alpha-\tau_x\sin2\alpha \qquad (7\text{-}1)$$

$$\tau_\alpha=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\sin2\alpha+\tau_x\cos2\alpha \qquad (7\text{-}2)$$

公式（7-1）和（7-2）就是根据图7-2，a所示单元体上已知的应力来计算α斜截面上应力σ_α、τ_α的公式。其中各应力及角度α的正负号均以前述规定为准。

（二）应力圆 斜截面上的应力σ_α和τ_α除了可由公式（7-1）和（7-2）算得外，还可以利用图解法来求得。

由上述两公式可知，在给定的平面应力状态下单元体的σ_x、τ_x和σ_y、τ_y为已知时，任一α截面上的应力σ_α和τ_α都以2α为参变量，因而在σ_α和τ_α之间具有确定的函数关系，即$\sigma_\alpha=f(\tau_\alpha)$。在上述两公式中消去$\sin2\alpha$和$\cos2\alpha$后，就可以得到这一函数关系。若在$\sigma$-$\tau$直角坐标系内，用一个点的纵横坐标分别表示单元体任一α截面上的应力τ_α和σ_α，则该点的轨迹就是表示上述函数关系$\sigma_\alpha=f(\tau_\alpha)$的曲线。

该曲线的方程可以从公式（7-1）和（7-2）中消去2α而得到。先将公式（7-1）改写为

$$\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha \tag{a}$$

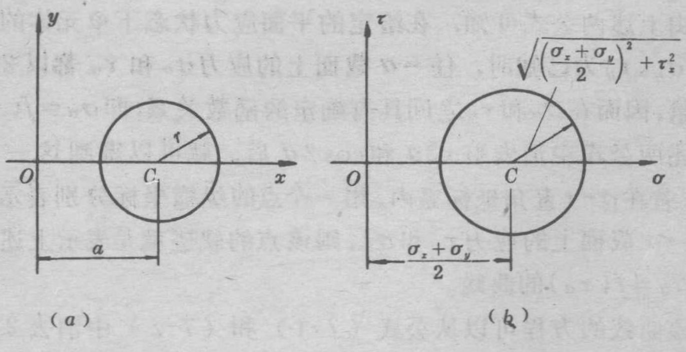
再将式(a)和公式（7－2）的两边各自平方，然后相加，并利用 $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$ 这一关系，即可消去 $\sin 2\alpha$ 和 $\cos 2\alpha$ 而得出

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2 \tag{b}$$

这就是所求的曲线方程。对于所研究的单元体，σ_x、σ_y 和 τ_x 都是已知量，所以式(b)的右边以及其左边的 $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ 各是一个常量。另一方面，由解析几何的原理可知，方程

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2 \tag{c}$$

所代表的曲线是一个圆，圆心在横坐标轴即 x 轴上，到坐标原点的距离为 a，圆的半径为 r，如图 7－3，a 所示。对比式(c)与式（b）可知，式（b）所代表的曲线也是一个圆，其圆心在横坐标轴即 σ 轴上，到坐标原点的距离为 $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$，其半径为 $\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$，如图7－3，$b$ 所示。通常称此圆为**应力圆**，有时也称它为莫尔（O Mohr)圆。按前面的分析可知，应力圆圆



（a）　　　　（b）

图 7-3

周上一点的纵、横坐标就分别代表所研究单元体的某一个α截面上的应力τ_α和σ_α，因此，单元体的斜截面和应力圆圆周上代表该截面上应力的点有着一一对应的关系。

要根据所研究单元体上的已知应力σ_x、τ_x和σ_y，τ_y（图7-4，a)作出相应的应力圆，可在σ-τ直角坐标系内，按选定的比例尺量取$\overline{OB_1}=\sigma_x$、$\overline{B_1D_1}=\tau_x$得D_1点，量取$\overline{OB_2}=\sigma_y$、$\overline{B_2D_2}=\tau_y$得D_2点（图7-4，b)；连接D_1、D_2两点的直线与σ轴相交于C点，以C点为圆心，$\overline{CD_1}$或$\overline{CD_2}$为半径，即可绘出一个圆。

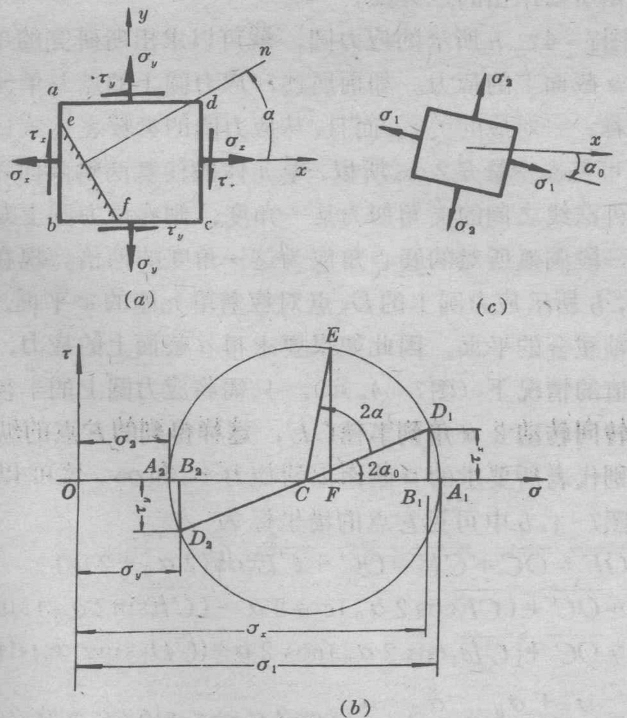


图 7-4

现在来证明这个圆就是所要作出的应力圆。因为这个圆的圆心在σ轴上，而且$\overline{OC}=\frac{1}{2}(\overline{OB_1}+\overline{OB_2})=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$，所以圆心到原点的距离为$\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$；又因$\overline{CB_1}=\frac{1}{2}(\overline{OB_1}-\overline{OB_2})=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}$，$\overline{B_1D_1}=\tau_x$，所以圆的半径为

$$\overline{CD_1}=\sqrt{\overline{CB_1}^2+\overline{B_1D_1}^2}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}$$

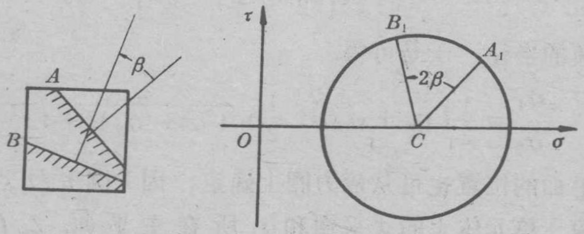
由此可见，这个圆的圆心位置和半径大小都符合应力圆的特点，因而它就是所要作出的应力圆。

利用图7－4，b所示的应力圆，就可以求出所研究的单元体的任一个α截面上的应力。如前所述，应力圆上的点与单元体的斜截面有着一一对应的关系，而且，从应力圆的参数表达式(7－1)和(7－2)可见参变量是2α。所以，单元体的任意两斜截面之间亦即它们的外法线之间的夹角如为某一角度，则在应力圆上对应的两点之间一段圆弧所对的圆心角应为这一角度的两倍。现在已知在图7－4，b所示应力圆上的D_1点对应着单元体的x平面，即外法线与x轴重合的平面，因此如果要求得α截面上的应力，则在α角为正值的情况下（图7－4，a），只需将应力圆上的半径CD_1沿逆时针转向转动2α角到半径CE，这样得到的E点的纵、横坐标就分别代表所要求的α截面上的应力τ_α和σ_α。这可以证明如下：从图7－4，b中可见E点的横坐标为

$$\begin{aligned}\overline{OF}&=\overline{OC}+\overline{CF}=\overline{OC}+\overline{CE}\cos(2\alpha_0+2\alpha)\\&=\overline{OC}+(\overline{CE}\cos 2\alpha_0)\cos 2\alpha-(\overline{CE}\sin 2\alpha_0)\sin 2\sigma\\&=\overline{OC}+(\overline{CD_1}\cos 2\alpha_0)\cos 2\alpha-(\overline{CD_1}\sin 2\alpha_0)\sin 2\alpha\\&=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha-\tau_\tau\sin 2\alpha=\sigma_\alpha\end{aligned}$$

按类似的方法可以证明E点的纵坐标$\overline{EF}=\tau_\alpha$。

利用应力圆来确定所研究的单元体在任意一个斜截面上的应力时，应注意应力圆上的点与单元体的斜截面位置之间的对应关系（图7－5），即单元体的A、B两斜截面外法线间的夹角若为β



(a)　　　　(b)

图 7-5

（图7－5，a），则在应力圆上相应两点A_1、B_1之间的圆弧所对的圆心角应为2β（图7－5，b），而且两角度应按照同一转向量取。

（三）主应力与主平面　从图7－4，b所示的应力圆上可见，A_1和A_2两点的横坐标分别为该单元体各截面上正应力中的最大值和最小值，在该两截面上的剪应力（即A_1、A_2两点的纵坐标）均等于零①。单元体内剪应力等于零的截面就称为主平面，主平面上的正应力是单元体内各截面上正应力的极值，称为主应力。这里仍结合图7－4所示单元体来研究如何确定主平面的位置和主应力的大小。

在图7－4，b所示的应力圆上，A_1和A_2两点的横坐标分别为主应力σ_1和σ_2，两点的纵坐标均等于零，即两主应力σ_1和σ_2

---

① 在剪应力等于零的截面上正应力为极值，这可从公式(7－1)和(7－2)中得到证明。因为$\frac{d\sigma_\alpha}{d(2\alpha)}$和$\tau_\alpha$两表达式只差一个负号，因此，在$\tau_\alpha=0$时$\frac{d\sigma_\alpha}{d(2\alpha)}=0$，这就是$\sigma_\alpha$为极值的条件。

所在截面上剪应力均等于零[①]。由图可见，A_1和A_2 两点的横坐标分别为$\overline{OA_1}=\overline{OC}+\overline{CA_1}$；$\overline{OA_2}=\overline{OC}-\overline{CA_1}$。其中，$\overline{OC}=\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)$为应力圆圆心的横坐标，

$$\overline{CA_1}=\overline{CD_1}=\sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\right]^2+\tau_x^2}$$

为应力圆的半径，于是可得

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)\pm\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_x^2} \qquad \begin{matrix}(7\text{-}3)\\(7\text{-}4)\end{matrix}$$

主平面的位置也可从应力圆上确定，因为圆上D_1点和A_1点分别对应于单元体上的x平面和σ_1所在主平面，$\angle D_1CA_1=2\alpha_0$为上述两平面间夹角α_0的两倍。由于图上所示从x平面转到σ_1所在主平面的转角是顺时针转向的，按前述对α_0正负号的规定，此角应为负值。因此，从应力圆上可得计算$2\alpha_0$角数值的公式为

$$\mathrm{tg}(-2\alpha_0)=\frac{\overline{B_1D_1}}{\overline{CB_1}}=\frac{\tau_x}{\frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)}$$

从而解得：

$$2\alpha_0=\mathrm{tg}^{-1}\frac{-2\tau_x}{\sigma_x-\sigma_y} \qquad (7\text{-}5)$$

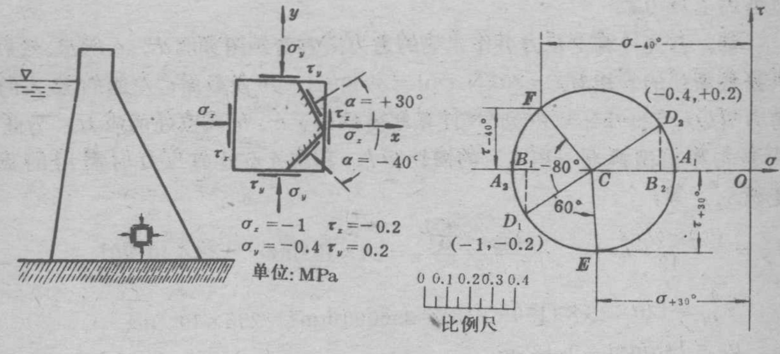
由此可解得$2\alpha_0$，从而定出主应力σ_1所在主平面的位置；而σ_2所在的另一主平面则与之垂直。

以上三公式也可根据公式（7-1）和（7-2）通过解析法导

① 在单元体的两个主应力均为拉应力的情况下，数值较大的主应力为σ_1，数值较小者为σ_2。在图7-4，a及c的单元体中，与纸面平行的平面上剪应力等于零，因此它也是主平面，其相应的主应力为$\sigma_3=0$，即三个主应力按代数值大小的顺序排列。此问题将在§7-4中进一步阐明。在这里需要指出的是，如果由公式（7-3）及（7-4）或用图解法求得的两个主应力一为拉应力而另一为压应力，则前者应为σ_1而后者为σ_3，另一主应力$\sigma_2=0$。同理，若求得的两主应力都是压应力，则它们应分别为σ_2及σ_3。

出，建议读者自行推导作为练习。这些公式无需死记，只要画个应力圆示意图，就可以从图上的几何关系很容易地得到。

例题 7-1 从水坝坝体内某点处取出的单元体如图 a、b 所示，$\sigma_x = -1\text{MPa}$，$\sigma_y = -0.4\text{MPa}$，$\tau_x = -0.2\text{MPa}$，$\tau_y = 0.2\text{MPa}$。试绘出相应的应力圆，并从而确定这单元体在 $\alpha = +30°$ 和 $\alpha = -40°$ 两斜截面上的应力。



(a) (b) (c)

例题 7-1 图

解： 要绘出代表图示单元体应力状态的应力圆，可根据单元体的两个相互垂直的 x 平面和 y 平面上的应力值，在 $\sigma - \tau$ 直角坐标系内定出相应的两点，这两点即为所求的应力圆直径的两端点。为此，可在 $\sigma - \tau$ 直角坐标系内，按所选定的比例尺（图 c），量取 $\overline{OB_1} = \sigma_x = -1\text{MPa}$ 和 $\overline{B_1D_1} = \tau_x = -0.2\text{MPa}$ 定出 D_1 点；量取 $\overline{OB_2} = \sigma_y = -0.4\text{MPa}$ 和 $\overline{B_2D_2} = \tau_y = +0.2\text{MPa}$ 定出 D_2 点。以 D_1D_2 为直径绘出的圆就是所要作的应力圆（图 c）。

要在应力圆上确定 $\alpha = +30°$ 斜截面上的应力，应该将半径 CD_1 沿逆时针转向转动 $2\alpha = 60°$ 的角到半径 CE，E 点的坐标就代表 $\alpha = +30°$ 斜截面上的应力。要确定 $\alpha = -40°$ 斜截面上的应力，则应该将半径 CD_1 沿顺时针转向转动 $2\alpha = 80°$ 的角到半径 CF，F 点的坐标就代表 $\alpha = -40°$ 斜截面上的应力。按选定的比例尺，量出应力圆上 E、F 两点的横、纵坐标，就分别得到