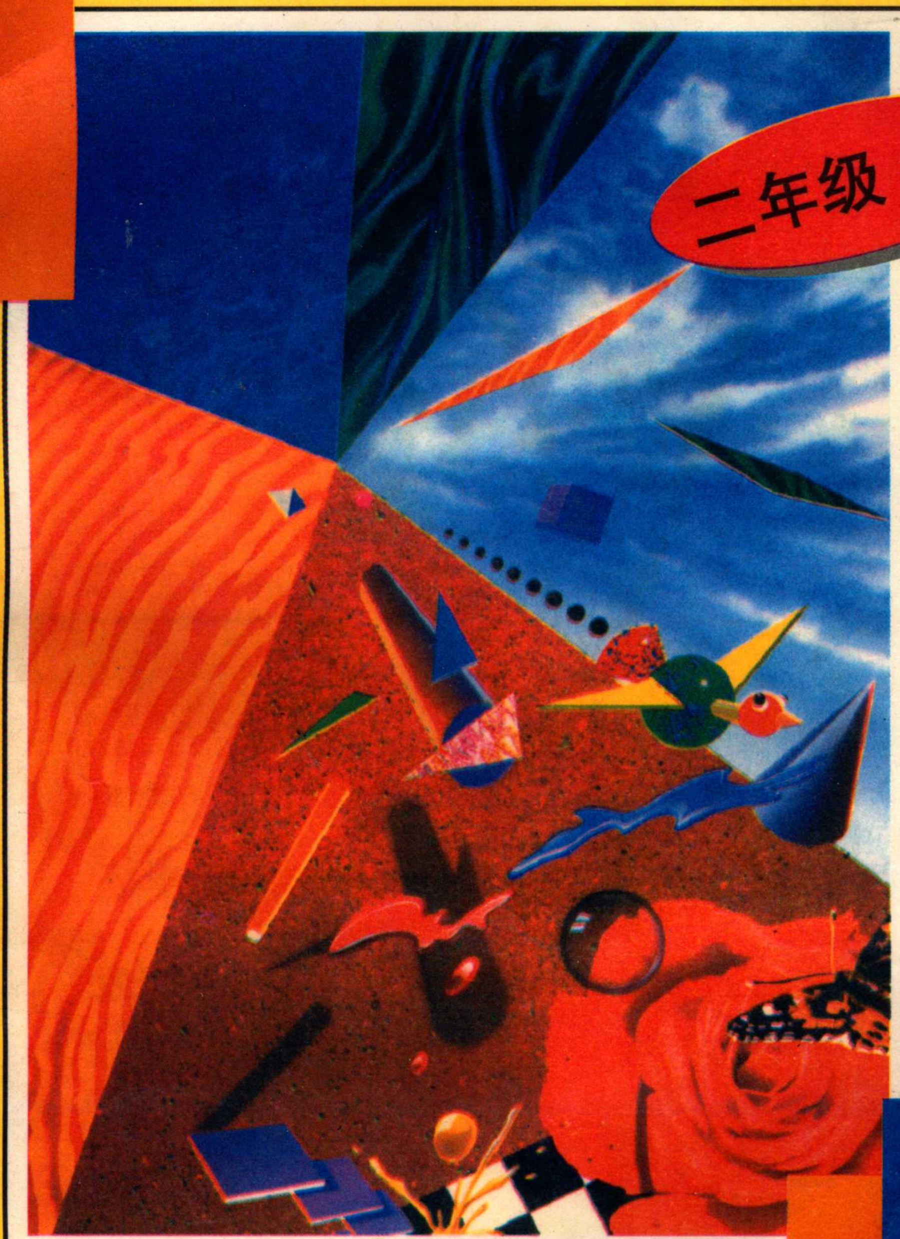
数学奥林匹克

初中练习册

二年级·上



北京数学奥林匹克学校　主编

北 京 师 范 大 学 出 版 社

数学奥林匹克初中练习册

（二年级·上）

北京数学奥林匹克学校　主编

北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克初中练习册　二年级·上/北京数学奥林
　匹克学校主编。
一北京:北京师范大学出版社,1994.6
ISBN　7-303-03546-X

Ⅰ.数…　Ⅱ.北…　Ⅲ.数学课-中学-教学参考资料
Ⅳ.G634.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 10987 号

北京师范大学出版社出版发行
(100875　北京新街口外大街 19 号)
北京昌平兴华印刷厂印刷　全国新华书店经销
开本:787×1092　1/16　　印张:6.25　　字数:152 千
1994 年 5 月北京第 1 版　1996 年 1 月北京第 2 次印刷
印数:20001—30000 册
定价:5.70 元

《数学奥林匹克初中练习册》

编 辑 委 员 会

顾问 裘宗沪(中国数学会普及工作委员会主任)
赵 桢(北京数学奥林匹克学校校长)

主编 北京数学奥林匹克学校

编委 (按姓氏笔划为序)
王永俊 刘金蕙 吴建平
陈 娴 唐大昌 陶晓永
袁素芬

作者 (按姓氏笔划为序)
王永俊 方仲伦 石景林
李青霞 何凤学 吴建平
陈 娴 金宝铮 郑 康
单志惠 赵晓峰 唐大昌
晁 洪 徐 流 陶晓永
袁素芬

策划 王永会

使 用 说 明

北京数学奥林匹克学校(BMOS)成立于1985年,是全国第一家数学奥林匹克学校。它创立十年来在北京市教育局、北京市科协、北京数学会的关心支持和领导下,为丰富北京市中小学生的课外活动,促进教育教学改革,培养各类人才进行了积极的探索并取得了可喜的成绩。北京数学奥林匹克学校培养的中小学生在全国小学数学奥林匹克、全国初中数学联赛、全国高中数学联赛、中国数学奥林匹克(暨全国中学生数学冬令营)等全国性数学竞赛,以及北京市的各类数学竞赛中均取得了优异的成绩,并且有九人次入选国际数学奥林匹克(IMO)中国代表队,为国家争得了荣誉。

北京数学奥林匹克学校云集了一批来自科研单位、高等院校、教研部门以及中小学的骨干教师,他们经验丰富,积累了大量的资料并形成了有效的训练方法,这套《数学奥林匹克初中练习册》即是该校初中部的全体教练员根据中国数学会普及工作委员会制定的《初中数学竞赛大纲》以及初中部教学计划集体编写而成的。

本套《练习册》共包括六个分册,分别供初一年级上、下学期,初二年级上、下学期和初三年级上、下学期使用。初一上下册、初二上下册及初三上册每册包括15个训练课题和5套综合练习。训练课题尽量以课内教学顺序为基础,力争与课堂教学同步进行,综合练习的题目则围绕15个课题选配,教师在指导学生使用时,可根据具体情况适当调整。初三下册包括10个训练课题、5套综合练习以及5套模拟试题(即近五年全国初中联赛试题),目的是为参加初中联赛的学生提供一个综合训练的机会。

由于时间仓促,练习册这种形式对我们来讲也是一种尝试,其中错误疏漏之处难免,希望广大的教师和同学们批评指正,以便我们修订时予以补救。

目　录

学校______ 班级______ 姓名______ 学号______ 成绩______

练习一　正约数的个数

每个正整数 $n>1$ 都至少有两个正约数，即 1 和它自身 n. 只有一个正约数的正整数就有一个：1；恰好有两个正约数的数称为质数(2,3,5,7,11,……)；有三个或三个以上正约数的数称为合数. 这样自然数被分为三类：1、质数和合数.

1. 质数有无穷多个，但只有 2 是偶数；

2. 合数可以“连成片”，即对于任意自然数 n，都可以找到 n 个连续自然数，它们都是合数. 例如下面这 n 个连续自然数就都是合数：

$$(n+1)!+2,\ (n+1)!+3,\ \cdots\cdots,\ (n+1)!+(n+1).$$

其中　$n!=1\times2\times3\times\cdots\cdots\times(n-1)\times n$；

3. 设 p 是质数，a、b 是整数，若 $p|ab$，则 p 必整除 a 和 b 中的一个.

一、填空题

1. 已知 p 是质数，且使得 $p+10$、$p+14$ 同时为质数，那么 $p=$______.

2. 已知质数 x,y,z 满足下列等式

$$x^y+1=z,$$

那么 $x+y+z=$______.

3. 设 a 是自然数，使得

$$a^4-3a^2+9$$

为质数的 a 有______个.

4. 已知质数 p、q 满足关系式

$$3p+5q=31,$$

则 $\frac{p}{3q+1}$ 的值为______.

5. 已知 $1176\times a=b^4$，其中 a、b 为自然数，则 a 的最小值为______.

6. 若 n 是自然数，且 $\frac{n^3-1}{5}$ 是质数，则 n 的值为______.

7. 已知 a、b、c、d 都是质数，且满足

$$10<c<d<20,$$

c 与 a 之差是一较大的质数，且 $d^2-c^2=a^3b(a+b)$，则 $a+b+c+d=$______.

8. 自然数 N 恰好有 12 个正约数(包括 1 和 N)，将它们依次记为 $d_1<d_2<\cdots<d_{12}$. 已知脚标为 d_4-1 的正约数等于 $(d_1+d_2+d_4)\cdot d_8$，那么数 N 等于______.

二、解答题

1. 试证：自然数 $\underbrace{11\cdots1}_{10\text{个}}2\underbrace{11\cdots1}_{10\text{个}}$ 是合数.

2. 将 1,2,3,……,1986 任意排成一行，得到一个整数，试证：这个整数一定是合数.

3. 求证：对于自然数 n，$|n^4-20n^2+4|$ 是合数.

4. 若 $p\geqslant 5$ 是质数，且 $2p+1$ 是质数，求证 $4p+1$ 是合数.

5. 证明：当 n 是大于 1 的整数时，n^4+4 必为合数.

6. 证明：整数 $4^{545}+545^4$ 是合数.

7. 设方程 $x^2+ax+b+1=0$ 的根都是正整数，其中 a 和 b 是整数．试证：a^2+b^2 是合数.

8. 证明：$1\underbrace{00\cdots0}_{21\text{ 个 }0}1$ 是合数.

学校______ 班级______ 姓名______ 学号______ 成绩______

练习二　完全平方数

完全平方数恰好等于某个整数的平方，其基本特征包括：

1. 平方数的个位数字只能是 0、1、4、5、6、9；
2. 奇平方数的十位数字一定是偶数；
3. 末位数字是 5 的平方数的十位数字和百位数字均是偶数；
4. 形如 $3k+2$，$4k+3$，$4k+2$ 的自然数（k 是整数）不是平方数；
5. 若 a 和 b 都是平方数，且 $a=bc$，则 c 也是平方数；
6. 设 a 是平方数，p 是质数，如果 $p|a$，那么 $p^2|a$.

一、填空题

1. 设 N 是一个两位数，在它的左边添上适当的两个数码变成四位数时恰好是原数 N 的平方，那么 $N=$______.

2. 使得 $22n+5$ 成为完全平方数的所有两位自然数 n 的和等于______.

3. 若某整数的平方的十位数字是 7，那么这个整数的平方的个位数字只能是______.

4. 一个自然数，加上 100 是一个完全平方数；加上 168，则是另外一个完全平方数，这个自然数是______.

5. 已知自然数 n 使得 $2^8+2^{11}+2^n$ 成为一个完全平方数，那么 $n=$______.

6. 已知 n 是一个平方数，$m>n$ 也是一个平方数，且在 n 和 m 之间没有其它的平方数，则 $m=$______.（用 n 表示）

7. 已知某三位数恰好等于平方数 n^2，而且各位数字之和等于 $n-1$，那么这个三位数是______.

8. 设 a 是从 1 到 9 这 9 个数字中的某一个，数组

$$a,\overline{aa},\overline{aaa},\overline{aaaa},\cdots\cdots$$

中完全平方数的个数是______个.

9. 设 n 是自然数，使得 $n^2-19n+91$ 成为完全平方数的 n 有______个.

10. 设 n 是自然数，使得 $9n^2+5n+26$ 恰好等于两个相邻自然数乘积的 n 的个数是______.

二、解答题

1. 五个连续自然数的平方和不是平方数，试证之.

2. 恰有 35 个连续自然数的算术平方根的整数部分相同，试求这个相同的整数.

3. 证明：对于任意自然数 n，$n^4+2n^3+2n^2+2n+1$ 不是完全平方数.

4. 已知 A 是一个百位数，其中有 99 位数字是 5，问 A 能不能是完全平方数？

5. 试讨论能否找到自然数 m 和 n，使得 $A=3^m+3^n+1$ 成为完全平方数？

6. 问是否存在三位数$\overline{abc}$，使得$\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$为完全平方数？

7. 设有四个整数 2,5,13 和 d,其中 $d\neq 2,5,13$. 证明:在这四个数中存在两个数 a、b,使得 $ab-1$ 不是完全平方数.

8. 若 x 和 y 都是自然数. 试证:x^2+y+1 和 y^2+4x+3 的值不能同时都是完全平方数.

学校______ 班级______ 姓名______ 学号______ 成绩______

练习三　非负数及其应用

非负数即正数和零.

非负数的一些重要性质主要是:

(1)　非负数一定有最小值,这个最小值是零. 无最大的非负数.

(2)　若干个非负数的和仍是非负数,即若 a_1、a_2、a_3、…、a_n 为非负数,则 $a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant 0$.

(3)　若干个非负数的积仍是非负数,即若 a_1、a_2、a_3、…、a_n 为非负数,则 $a_1a_2\cdots a_n\geqslant 0$.

(4)　如果若干个非负数的和为零,那么每一个非负数必为零,即若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为非负数,且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$,则必有 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$.

在解题中关键是抓住平方数、绝对值及算术根的非负性及非负数的性质(4). 例如:已知 $-2<x<3$,化简 $|x+2|-\sqrt{(x-3)^2}$ 时,由 $x>-2$,得 $x+2\geqslant 0$,则 $|x+2|=x+2$;由 $x<3$,得 $\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|=3-x$,于是,当 $-2<x<3$ 时, $|x+2|-\sqrt{(x-3)^2}=x+2-(3-x)=2x-1$.

一、选择题

1. 若 $|2x-3|>2x-3$,那么这个不等式的解集为(　　).

(A)$x>\frac{3}{2}$;　　(B)$x=\frac{3}{2}$;

(C)$x<\frac{3}{2}$;　　(D)解集为空集.

2. 若 $b>0$,则 $\sqrt{-x^3b}$ 等于(　　).

(A)$-x\sqrt{xb}$;　(B)$x\sqrt{-xb}$;　(C)$-x\sqrt{-xb}$;　(D)$x\sqrt{xb}$.

3. 若 $|5x+3|+(4x^2y-8xy+3y-9)^2=0$,那么代数式 $3(4x^2y-8xy+3y-2)-2(5x+3)^2$ 的值是(　　).

(A)0;　(B)6;　(C)21;　(D)33.

4. 若 $-3<x<4$,则满足 $\sqrt{x^2+6x+9}-|x-4|=5$ 的 x 值是(　　).

(A)2;　(B)3;　(C)4;　(D)5.

5. 不等式 $|x+2|-|5-x|<a$ 对任何实数 x 恒成立,则实数 a 的范围是(　　).

(A)$a\geqslant 7$;　(B)$a>7$;　(C)$a>3$;　(D)$a<7$.

6. 已知 a 和 b 为实数且满足 $5a^2+2b^2+1=6ab+4a-2b$,则 $(a-b)^{1994}$ 的值是(　　).

(A)0;　(B)1;　(C)2;　(D)无法求出.

7. 对于实数 x，$\sqrt{1994-x}+\sqrt{x-1994}+\frac{1}{x}=($　　$)$.

(A)0；　　(B)1994；　(C)-1994；　(D)$\frac{1}{1994}$.

8. 设 a、b、c 是非零实数，那么$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{ab}{|ab|}+\frac{bc}{|bc|}+\frac{ac}{|ac|}+\frac{abc}{|abc|}$的值等于(　　).

(A)7；　　(B)-7；　(C)-1；　(D)7 或 -1.

二、填空题

1. 已知 x、y 为实数，且 $y=\frac{1}{3}+\sqrt{4x-1}+\sqrt{1-4x}$，则$\frac{x-1}{2y}=$______.

2. 若 $\sqrt{a-1}+(ab-2)^2=0$，那么$\frac{1}{ab}+\frac{1}{(a+1)(b+1)}+\cdots+\frac{1}{(a+1994)(b+1994)}$的值是______.

3. 若实数 x、y、z 满足条件：$\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{1}{4}(x+y+z+9)$，则 $xyz=$______.

4. 设 $0<x<1$，化简$\sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+4}-\sqrt{(x+\frac{1}{x})^2-4}=$______. 当 $x=\frac{1}{2}$时，这个式子的值是______.

5. 已知 $x-y+2$ 的 n 次算术根与$(x+y-1)^2$ 互为相反数，则$\frac{y}{x}$的立方根是______.

6. $x>\frac{1}{4}$，化简$\sqrt{x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{4x+1}}-\sqrt{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{4x+1}}=$______.

7. 已知 a、b、c、d 均为实数，且 $ad-bc=1$，$a^2+b^2+c^2+d^2-ab+cd=1$，则 $abcd=$______.

8. 若关于 x 的方程$||x-2|-1|=a$ 有三个整数解，则 $a=$______.

三、解答题

1. 求证：对于任意实数 x、y，不等式 $x^2-xy+y^2-2x+y+\frac{5}{2}\geqslant 0$ 都成立.

2. 已知 a、b、c 是 ΔABC 的三边长，且满足 $\frac{2a^2}{1+a^2}=b$，$\frac{2b^2}{1+b^2}=c$，$\frac{2c^2}{1+c^2}=a$，试求 ΔABC 的面积.

3. 求满足 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2+\frac{4}{9}-(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_6+x_6x_7+x_7x_8+x_8x_1)=0$ 的实数 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5、x_6、x_7、x_8.

4. 已知 a、b、c 为 ΔABC 的三条边，且满足 $a^3+b^3+c^3=3abc$，试判断 ΔABC 的形状.