

A GUIDE TO THE RESEARCH
ON MATHEMATICAL EDUCATION

数学教育研究导引

EDITOR IN CHIEF ZHANG DIANZHOU

SUBEDITORS IN CHIEF DAI ZAIPING

TANG RUIFEN

LI SHIQI

主 编 张奠宙
副主编 戴再平
唐瑞芬
李士锜

JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

江苏教育出版社

数学教育研究导引

2



江苏教育出版社

(苏)新登字第003号

数学教育研究引导

主 编 张奠宙

副 主 编 戴再平 唐瑞芬 李士铨

责任编辑 喻 伟

出版发行：江 苏 教 育 出 版 社
(南京中央路165号， 邮政编码：210009)

经 销：江 苏 省 新 华 书 店

照 排：南京理工大学激光照排公司

印 刷：无 锡 县 人 民 印 刷 厂
(无锡县钱桥镇， 邮政编码：214151)

开本850×1168毫米 1/32 印张18.75 插页4 字数446,000
1994年10月第1版 1994年10月第1次印刷
印数1—3,000册

ISBN 7—5343—2213—8

G · 1973

定价：12.80元

江苏教育版图书若有印刷装订错误，可向承印厂调换

序

面对社会主义市场经济大潮,数学教育界似乎显得冷落。街谈巷议之中,多闻“学生无心向学”,“教师跳槽下海”,现在谈数学教育的研究,是否“不合时宜”?但是,数学教育界的困难毕竟是暂时的,正如一位诗人所说:“冬天来了,春天还会远吗?”经济发展了,教育的兴旺时期就会到来,我们正是抱着这样的期望编写本书的。

本书的缘起可追溯到五年以前。1988年夏,我到匈牙利出席第6届国际数学教育会议归来,在天津举行的“21世纪中国数学展望”研讨会上结识江苏教育出版社的喻纬同志,我向他谈起中国数学教育的实际水平不低,但数学教育理论研究的水平却不高,国际上听不到中国数学教师的声。我们应当提高自己的研究水平,使中国数学教育走向世界。确实,在中国改革开放十年之后,中国数学教育却没有什。改革既不多,开放也不够。

喻纬同志是有心人。他觉得中国数学教育界对国外情形了解太少,对自己的状况认识不深。由于闭塞,往往孤芳自赏,以为天下的数学教学都是一个样子。于是乎局限于一题一句的争执,对数学教育改革的大势,21世纪数学教育的展望,都缺少兴趣。要改变这种情况,还得宣传介绍。于是,他提议编一本适合广大中学数学教师、数学教育研究人员阅读参考的书。全书分为四编:进展综述、专著导读、论文评介和课题推荐。

这确是一个很好的主意。华东师大的同仁都乐于承担此项目

务,并认为这也是自己学习研究的极好机会.陈昌平教授为此书定名:《数学教育研究导引》.他因主编上海市的中小学数学教材,无暇动笔,但从一开始就参与讨论,确定篇目.戴再平、唐瑞芬两位教授以及较年轻的李士锜先生,与我合作,随即开始向全国组稿,进展得相当顺利.

我从1990年初起,到美国访问两年,很少参与其事,回国后才化了较多时间编辑整理、改写补充.特别是将我在外的见闻,写成了第四编“课题推荐”,以供参考.全书在1992年上半年大体完成.1992年8月,我和唐瑞芬到加拿大参加第7届国际数学教育大会,又接触了一些新资料,于是再次作修改.如此反反复复,定稿之际,已是1993年春节了.

现在说说我们编写此书的指导思想.

国家教委已经提出,必须实现从“应试教育”到“素质教育”的转轨.因此,“数学素质”教育应是我们研究的总目标.一份“数学素质教育设计”(草案)也就成了本书的代前言.

全书贯彻“导引”的想法,即请允许我们充当一次“数学教育导游”.一方面,我们向读者展示国内外数学教育的各个侧面,包括最新进展、数学教育名著、优秀数学教育论文等比较原始的资料,以求一窥“庐山真面目”,另一方面,我们也以导引的身份,经过自己的理解和消化,用一个中国数学教育工作者的眼光看待国外的数学教育风貌,并作一番介绍,以便大家理解和欣赏.

本书带有“词典”、“手册”的意味,尽可能收集数学教育方面的精华于一书.现在买书难,买齐备的书更难.我们想借此书给广大数学教师一份比较齐全的资料,以供切磋研究.近闻许多省市在培养高级教师研讨班、青年骨干数学教师培训班时苦无教材,也许本书可以作为大家研讨的基础.本书第四编是课题推荐,我们真切希望我国数学教育研究能从单一的“解考题”模式中走出来.所建议的题目如果读者感兴趣,欢迎进行讨论.

·当前教师生活的清苦人所共知,但是温饱无虞,只是心理失衡而已。“当别人沉睡的时候,你起来跑就会领先一步。”文革时期的一些青年人,正是因为领先一步,在科学的春天里大步前进,连创佳绩.21世纪已经临近了.我们希望中国数学教育工作者形成自己的学派,发出自己的声音,以自己的优异研究成果在国际上独树一帜,立于世界之林.本书愿为此目标作一块铺路石,也但愿我们“导引”的大方向没有错.

本书的诞生要感谢许多同志的支持.其中倪明先生校阅加工的帮助尤大,使我们避免了许多错误,对本书的贡献多多,在此特予致谢.

张奠宙

1994年元旦于华东师大

代前言——数学素质教育设计(草案)

中国的基础教育正在从“应试教育”向“素质教育”转轨。那末,未来世纪的中国公民应该具有怎样的“数学素质”?看来已是数学教育研究的主要课题。改革开放的步伐,社会主义市场经济的大潮正向缺乏活力的数学教育提出新的要求:“面向世界,面向未来,面向现代化”,再也不能停留在口头上或纸面上了!让我们为未来的数学素质教育,设计蓝图,付诸行动,逐步地建立起有时代特色的中国数学教育体系,形成中国的数学教育学派。与此同时,在国际同行进行平等交流的基础上,使中国数学教育走向世界。60万中国数学教师的劳动与创造,理应在国际舞台上占有它自己的地位。

一 历史回顾

中国数学的发展在宋元时期达到高峰,明朝以珠算为中心的商业算术普及,而数学的整体发展却停滞不前。1607年,徐光启和利玛窦(Matteo Ricci)翻译《几何原本》开西学东渐之始,但并未引起多大反响。清康熙皇帝曾提倡过一段数学,但那毕竟是个人行为。到了清末,李善兰和伟烈·亚力(Alexander Wylie)译出第一部微积分著作——《代微积拾级》(1859)距牛顿(Newton, I.)发明微积分已有200年,不过,那时的日本,仍向中国学习数学,“微分”、“积分”的译名,是日本向中国学的!

进入20世纪,中国数学教育仍受“中学为体,西学为用”的指导,学习内容则仿照日本,京师大学堂使用的《代数学》教材,乃日人上野清所著,辛亥革命前后,中国的学制、教本多源自日本,数学教师大半为留日学生。

五四运动之后,中国数学教育向欧美学习,主要是英、美“三S氏几何”、“范氏大代数”、“葛氏三角”等,为许多学校采用。

解放之后,当然是学习苏联,一方面是用12年时间学习苏联十年制的课本,程度有所降低,另一方面是苏联重视基础,倡导精密的风格输入我国,致使数学教育的面貌为之一变。

主要在苏联数学教育体系影响之下,又经过1958年、1960年几次改革,冷静下来之后,终于出现了中国数学教育体系的形成标志:1963年数学教学大纲,“抓好‘双基’”,“培养三大能力”,构成了至今不变的中国特色,也是我们的宝贵财富。

“文革”时期的数学教育,从整体上不可取,但是数学联系实际的许多具体做法,一些难得的实际课题,实在是不该舍弃的,那是许多数学教育工作者辛勤劳动的结果。

80年代的口号是“拨乱反正”、“回到基础”,以恢复60年代的数学教育为目标,加上“高考指挥棒”的影响,遂形成了目前“知识窄”、“基础实”、“考题难”、“训练严”的格局。

综上所述,中国数学教育学日本,学英美,学苏联,可说博采众长,但到了90年代,基本模式仍是60年代的思路,再加高考指挥棒的某些负面影响,许多方面确已不适应时代要求和社会发展了,改革势在必行。

二 可贵的高分下隐伏着危机

中国中学生在数学学习上的成绩,已使世人刮目相看。近几年来,中国中学生在国际数学奥林匹克中连获冠军,中国学生的数学

能力已为世所公认；更重要的是1992年“教育进展国际评估组织”IAEP发表的报告，在21个参加数学测试和科学测试的国家和地区中，中国大陆以总平均80分的成绩名列第一，领先于第二位的台湾省和韩国7分之多。这双料冠军显示了中国数学教育的不平凡业绩。如果还考虑到我国的教育经费投入（占国民收入的2.7%）是21个国家和地区中最低的，上述成绩的获得更觉难能可贵：价廉物美的中国数学教育！

但是，我们不能不看到高分下的危机。

首先，虽然中国中学生的数学成绩位居21个国家和地区之首，但科学测验的成绩却位于15名，处于下游状态。数学一枝独秀，恐非吉兆，我们需要总体上的平衡。日本曾在另一个国际性数学测试中位居第一，但他们担心日本学生是否有必要花如此多精力学数学，一位专家说“日本的生命线在于公民的一般素质：外语、管理、史地、技术、数学等的均衡发展”，值得我们深思。

其次，中国大陆学生的数学测试成绩表明，常规计算能力虽强，但应用能力薄弱。例如在求两城市间最短路线，看统计图回答问题等测试成绩方面，得分率低于韩国、台湾、苏、美、瑞士、英、加拿大。难道中国学生只会做纯而又纯的数学题？非不会也，乃不教也，中国数学教育脱离实际，是一个严重的弊病。

再次，中国学生动手能力低于发达国家，也许无须测试即可知道，欧美学生在卷面上考不过我们，可是摆弄起计算机却如鱼得水，用计算机作图，储存资料，文字处理，科学计算乃至玩游戏，样样精通。你说他数学素质不好，恐怕也很难讲。说这是一群适应21世纪信息社会的未来公民，似乎不算过分。

总之，中国数学教育不必妄自菲薄，亦不可盲目乐观。

三 从“英才数学”到“大众数学”

以第二次世界大战为界,世界教育发生了巨大变化:从过去培养“精英”升学为主的教育转向为“大众”提高素质为主的教育。学生多了,水平参差不齐,由于实行义务教育又不能将差生赶出学校,于是教育的目标,理论研究,政府决策都随之而变。二次大战前的“英才数学”也终于变为“大众数学”。

“为一切人的数学”(Mathematics for all)的口号在欧美各国已被广泛接受,而且成为数学教育的主流。

日本已普及高中教育,尽管日本也有“考试地狱”,但升学压力主要体现在收取高昂学费的补习学校里,而正规的中学教育,则受教育立法和行政监督的保护,基本上按教育规律办事,日本数学教育正在提倡“实用”、“创造”,建立选修制度,以适应各种不同的数学需要。

从50年代末起,苏联实行了三次教育改革,柯尔莫哥洛夫(Колмогоров, А. Н.)领导的中学数学教育改革,已使我们当年所模仿的基谢廖夫(Киселёв, А. П.)数学教材体系大幅改观,而我们至今未有大的动,恐怕不合时宜。

我国是社会主义国家。我们的数学教育理应为“一切人”,“大众数学”是我们应当追逐的目标,国际上的成功经验,值得我们吸取,并加以发展。值得注意的历史事实是:半殖民地教育往往是“英才”教育,殖民者只需一批“买办”和“领班”就够了,今天,我们应是“大众数学”的积极倡导者!

四 让孩子们喜欢数学

日本中学生在夺取国际 IEA 调查总分第一的同时,却发现日

本学生不喜欢数学的比率也名列第一,因此,日本中小学生的数学好成绩,是在社会期望、家长督促下“强制地”获得的.中国的情况究竟如何,尚无确切的报道,但是,据调查某省在普及九年制义务教育过程中,初二时有大批学生流失,辍学的原因之一是厌恶数学.就我国数学教育改革的层面上分析,应该讨论以下的问题:

为什么让所有的学生学习同样的数学?让90%以上的学生去陪百分之几的升大学的学生念数学——营养丰富却咬不动的数学“牛排”,是否合适?“英才教育”是否在我国仍占主导地位?

九年制义务教育的实行,是对“英才教育”的否定,但是社会主义条件下,教育过程中还存在着事实上的不平等,由于家庭、社会环境各异,必有一部分数学上的“差生”、“慢生”出现.那么,我们是否向他们倾注了足够的爱心,负起应有责任?当我们在赞赏“高考状元”、“竞赛冠军”时,是否还记得他们?

在经济条件具备之后,义务教育的核心是“差生”、“慢生”问题.一方面,我们强迫父母把孩子送入学校九个年头,一方面却强迫学生学他们不喜欢的东西,这是一个矛盾.

因此,我们的目标是:让孩子们喜欢数学!让不同的孩子学习不同的数学!

五 “数学素质”需要设计

“素质教育”的口号已经提出好几年了,但是究竟什么是我国未来公民的数学素质,却并没有统一的认识,也无深入的探讨,当前比较流行的一种看法是:所谓数学素质就是数学思维能力,亦即数学运算能力、逻辑思维能力和空间想象力,其核心则是逻辑思维能力.

这种观点,源远流长,在学习苏联时期得到加强,并在1963年数学教学大纲中得到完整地表述.影响一直延续至今.其出发点是

强调数学的抽象性和逻辑严格性,把数学看作是一种思想体操,把逻辑的形式化陶冶看作数学教育的最重要功能。

欧美国家在二次大战前也持这样的观点,但从“英才数学”转向“大众数学”之后,情况发生了变化。

我们从英国的“Cockcroft 报告”,美国的“Everybody Counts”,美国数学教师协会(NCTM)的“课程标准”,德国和日本的“数学教学大纲”中,可以看到有许多新的提法,概括起来,数学素质似应从以下几个方面去阐述:

1. 知识观念层面:能用数学的观念和态度去观察、解释和表示事物的数量关系、空间形式和数据信息,以形成量化意识和良好的数感。

2. 创造能力层面:通过解决日常生活、实际情景和其他学科问题,发展提出数学模型、了解数学方法,注意数学应用的创造型数学能力,并形成忠诚、坚定、自信的意志品格。

3. 思维品质层面:熟悉数学的抽象概括过程,掌握数学中逻辑推理方法,以形成良好的思维品质与合理的思维习惯。

4. 科学语言层面:作为一种科学的语言,数学也是人际交流不可缺少的工具,数学素质应包括能初步运用这种简约、准确的语言。

简言之,数学素质,应包括数学意识、问题解决、逻辑推理和沟通交流这样四个部分。过去我们过分强调逻辑推理,未免偏颇。

六 数学应用意识的失落

这是中国数学教育的一种严重缺陷。课堂上不讲数学的实际来源和应用方法,“掐头去尾烧中段”,还自称为培养抽象思维能力,“理论联系实际”的口号喊了几十年,到头来连应用的影子都不见了,岂不痛心?

举一个小的例子来说,电视台播放某大奖赛实况,总要去掉一个最高分,一个最低分,现在又要去掉两个最高分,两个最低分,这是为什么?我们课堂上,不去让学生了解这类活生生的身边的数学事实,数学教育工作者应该觉得惭愧才是。

数学应用是一种数学通识,一种基本的观点和态度.我们强调数学应用,不是回到“测量、制图、会计”等那种忽视基础理论的路上去,而是要培养一种应用数学知识的意识和欲望,使数学溶入人的整体素质,成为世界观的一部分。

一个严重的问题是各级各类考试中没有应用数学的要求,在数学考卷中放一些适当的应用题如何?让高考指挥棒指挥得好一些,应该是办得到的事。

如果回顾一下历史,那么中国传统数学是很讲究应用的.《九章算术》就是由246个题目所组成,分别属于方田、粟米,衰分,少广,商功,均输,盈不足,方程,勾股等九章,应用的方向十分明确.就是在50年代的中学课堂上,学习苏联时期的课本里,也有很多应用题.后来经过1958年的联系实际大辩论,数学非联系田头、车床不可,走了极端.到1963年大纲,“调整”之余,应用被削弱.文革时期又走上另一极端,结果到“拨乱反正”阶段,应用成了“左”的表现.正所谓“进一步,退两步”,以至今日无人愿意谈应用。

现在,社会主义市场经济大潮正在兴起,股票、利息、保险、分期付款等经济方面的数学问题,已成为人们的常识,介入人们的日常活动,如果数学教学只提供“思想体操”,不管实际应用,恐怕不合时代要求了。

七 突破口:提倡问题解决

中国数学教育已形成了一个较完整的体系,要想改革,谈何容易,至高无上的升学考试指挥棒,在可见的将来仍是“绝对权威”,

升学考题决定了数学教学的走向,大运动量地训练学生迅速、正确地求解考题.在这一特定社会氛围中,数学课程改革受高考制约,教学方法改革以解考题为转移,数学教学的评价以升学考试成绩为标准.如果改革和考题无关,则免谈.这几年来,“大众数学”、“发现式教学”、“能力培养”等口号提到不少,但对课堂实际的影响甚微,关键在于和考题研究脱节.

这里,我们想到国外的“问题解决”的口号.此提法始于1980年的美国,美国是一个喜欢标新立异的国家,但这个口号提出至今,一直被人们广泛接受,而且在90年代依然是数学教育的中心课题,这就说明,它不是一时一地的权宜之计,而是历史的必然,符合时代潮流的明智之举.

中国是解题王国,我们天天在解题,何劳你来谈“问题解决”?

我们要说的是:问题不等于考题,尤其不等于目前中国的升学考题.

用“问题”来补充、改造和影响考题,以便进一步改革中国的数学教育,这也许是一个有效的突破口.

所谓“问题”,是指:(1)对学生来说不是常规的,不能靠简单的模仿来解决;(2)可以是一种情景,其中隐含的数学问题要学生自己去提出、求解并作出解释;(3)具有趣味和魅力,能引起学生的思考和向学生提出智力挑战;(4)不一定有终极的答案,各种不同水平的学生都可以由浅入深地作出回答;(5)解决它往往需伴以个人或小组的数学活动.

在我国提倡“问题解决”,我们打算做以下工作:

出版《问题集》,显示数学问题与考题的不同,使大家具体地了解“问题”.

在升学考试中适当地逐步地出一些“问题”作为考题,使问题进入数学教学的阵地,不停留在空喊.

问题解决教学和升学考试将是互补的,我们设想,在一些重点

中学进行“问题解决”教学,会促进而不妨碍升学率。

对义务教育中产生的差生和慢生来说,许多“问题”将会唤起他们的数学兴趣和数学学习欲望。

我们希望中国的数学教育能够做到:“以习题演练为基础,以问题解决为主导”。

八 观念转变:允许非形式化

数学的一个重要特点是形式化(formal),如形式化的表示,形式化的推理,形式化的演算,达到极点便是希尔伯特的形式主义。自从50年代学习苏联以来,中国数学教育更趋向形式化,特别注重逻辑上的精密,形式上的推演,数学上“言必有据”、“论必严谨”更倾倒了无数学子。

但是形式化毕竟是有限度的。希尔伯特的形式主义已被证明不可能,一切数学证明也不过是指指点点,不可能那么形式化。尽管数学论文发表的标准,必须是严密的逻辑证明,不可有任何疏漏。但是一切创造性的数学思维活动往往是直觉的,非形式化的,非逻辑的。

至于在数学教育上,非形式化已成为必不可少的手段,问题是如何掌握以使之适当。苏步青先生在编制中学数学教材时曾提出“混而不错”的原理。这个“混”,便是非形式化的意思,数学教育中采用非形式化方法,至少有以下四点理由:

数学在不断发展,而学生的学习年限是有限的,一部分内容不得不用非形式化方法处理。例如中学里讲微积分,如用 $\epsilon-N$, $\epsilon-\delta$ 的形式语言显然不行。只能借助直观的非形式化方法。

中小小学年龄特点的限制。坐标是重要工具,小学里就应出现,如果拘泥于形式,必须从实数,不可公度线段,数轴再到坐标系,那就太迂了。

概念理解的需要。例如概率是一种很平凡朴素的概念，无非是日常生活中“可能性”的量化，如果非要从事件集，等可能事件，排列组合，一步一步讲起来，就会使生动活泼的观念淹没在形式演绎的海洋里。

创造性的数学思维往往是非形式的，单靠形式演绎是走不远的。中国传统数学并没有严格证明，牛顿的微积分更没有形式化，但它们创造了新的数学。

总之，数学课程中的形式化和非形式化处理，在形成数学素质上有相同的重要性，我们应当发挥我国数学教育在形式化方面的长处，并善于将二者结合起来，非形式化的数学也是数学。我国目前的大多数教师还不能接受这一点，但此事势在必行，与其被迫接受，不如主动采用。

九 一句老话，把学习数学的主动权交给学生

我国的数学教学方法，主要是让学生模仿。一般说来，这无可厚非，但是这种“跟随型”的训练法，对培养学生的创造能力、独立思考能力是不利的。

西方笑话中有一道著名的测验题，其内容是：“一条船上，有75头牛，34头羊，问船长几岁？”我们曾在浙江一个小学四年级班上作测验，45名学生中，只有5个人说此题不能做，多数回答是41岁，其次为109岁，再次是 $(75+34) \div 2 = 54.5$ 岁（据报告，美国学生回答是41岁的占10%）。

学生总认为教师出的题目都是可以做的，独立思考能力被压缩了。我国目前的流行提法是：教师是教学的主导，学生是学习的主体。提法很全面，但学生主体的能动作用则远未发挥，升学压力使学生成了反应灵敏的模仿解题机器。这里想再次提到日本，他们也有严重的升学考试竞争，但补习学校承担了升学竞争压力，学校

中的教学受教育立法保护,教师主要按教育规律办事.我们期待中国的某些领导部门、社会组织不再向学校施加升学压力,用教育立法来保证学校的正常秩序.

让我们再重复几句名言:“数学教师不能充当数学知识施舍者的角色.”“没有人能教会学生,数学素质是学生数学活动中获得的.”“教师和教科书不应该是至高无上的权威”.总之,让我们再重复一句老话:“把学习数学的主动权交给学生!”

十 紧迫课题:计算器进入课堂

70年代以来,计算机科学的发展和个人计算机的普及,已对中学数学教学产生了深刻影响.21世纪是信息时代,使用计算机是公民的日常生活需要,这已是毋庸置疑的事实.

但是,我国的经济发展水平和教育经费水平,还不能在目前讨论计算机在我国普及的问题.数学教育如何与计算机相结合,要留待下一个十年才能解决.摆在我们面前的一个紧迫课题则是如何在数学教学中使用计算器的问题.

说使用计算器会使数学计算能力退化,就像说坐汽车会使人类的走路能力退化一样的可笑.我国家庭的收入已完全能够负担起孩子的计算器购置费用,大多数学校配置一批高级计算器也不困难,那么我们为什么不去利用呢?

至少,初级中学统计时总应该使用计算器了罢!

至少,我们应该组织一些试验,开发计算器的教育功能罢!

至少,我们总应该开会,正式地研究一下计算器与数学教育的关系罢!我们总不能麻木下去.时间不等人.