初等数学

代 数

江苏省工科院校《初等数学》编写组

一九七三年七月

恩格斯语录

和其他一切科学一样，数学是从人的需要中产生的：是从丈量土地和测量容积，从计算时间和制造器皿产生的。

列宁语录

一切科学的（正确的、郑重的、非瞎说的）抽象，都更深刻、更正确、更完全地反映着自然。

毛主席语录

理论的基础是实践，又转过来为实践服务。

毛主席语录

教育必须为无产阶级政治服务，必须同生产劳动相结合。

我们的教育方针，应该使受教育者在德育、智育、体育几方面都得到发展，成为有社会主义觉悟的有文化的劳动者。

学生也是这样，以学为主，兼学别样，即不但学文，也要学工、学农、学军，也要批判资产阶级。学制要缩短，教育要革命，资产阶级知识分子统治我们学校的现象，再也不能继续下去了。

本书常用数学符号

符号	意义
$\because$	因为
$\therefore$	所以
$\neq$	不等于
$\approx$	近似等于
$>$	大于
$<$	小于
$\geqslant$	大于或等于
$\leqslant$	小于或等于
$\pm$	加或减
$\mp$	减或加
$/\!/$	平行于
$\perp$	垂直于
$\underline{\underline{/\!/}}$	平行且等于
$\cong$	全等于
$\backsim$	相似于

目　录

第一部分　数及其运算

第一章　数的分解

第二章　分　数

第三章　正数和负数

第二部分　代　数

第一章　整　式

第二章　因式分解

第三章　分　式

第四章　一元一次方程

第五章　一次方程组

第十章　指数和对数

第十一章　数　列

第一部分　数及其运算

数和数的运算是从哪里来的？是某些人凭空从头脑里想出来的吗？不是。恩格斯指出：**"数和形的概念不是从其他任何地方，而是从现实世界中得来的。"**原始人类初期，并没有数的概念，后来由于生产和生活上需要计数，从而产生了自然数1、2、3、4、……。但是自然数是一个一个地累积而形成的，把这个累积的经验加以推广，就得到了加法运算，同时也产生了它的逆运算——减法。在加法运算中，常常遇到相同的自然数相加的情况。例如，有15个组，每组都是8个人，共多少人？这就是15个8相加，人们慢慢觉得这样来计算实在太麻烦了，于是引进了乘法运算，同时又产生了它的逆运算——除法。

在进行减法运算时，常遇到恰巧能减尽的情形。例如，有五头羊，第一次宰了两头，第二次宰了三头，两次就宰光了，没有剩余了。这种没有剩余的情形，人们用数"0"来表示，0和一切自然数合在一起，组成了整数。

随着生产的发展，整数还不能满足需要。例如，测量长度；分配耕地和食物等，并不是在任何情况下它的结果都可以用整数来表示，于是促进了小数和分数的产生和发展。

在实践中人们还常常碰到具有相反意义或方向相反的量。例如，收入五元与支出五元；向东行四里与向西行四里等，用整数和分数只能表达这些量的大小，但不能区分其相反的意义，为了准确地用数来表示它们，又引进了正负数的

概念。值得指出的是，我国是世界上使用正负数最早的国家。

综合上述，可见：数是从现实世界中得来的，是物质世界的反映；数的运算，是人类长期经验的积累，是社会实践的产物。反过来，数及其运算的不断扩充又促进了生产的发展。

“在生产斗争和科学实验范围内，人类总是不断发展的，自然界也总是不断发展的，永远不会停止在一个水平上。”劳动人民，创造了数和数的运算方法，并不断地丰富它的内容，至今人们对于数的认识和应用已远远地超过整数、分数和正负数的范围了。为了使同志们学好数学及其他科学知识，今后更好地为社会主义建设服务，在这里，我们有重点地复习一下数的分解、分数和正负数这三部分内容，在复习的基础上希能提高一步，以期能比较熟练地掌握数的概念和数的运算。

第一章　数的分解

§1. 数的整除

在整数范围内，一个数被另一个数来除，有两种可能情况：一种是除尽了而没有余数，另一种是除不尽而有余数。没有余数的情况通常叫做整除。例如10能被5整除。

如果甲数能被乙数整除，那末，甲数叫做乙数的倍数，乙数叫做甲数的约数。例如，12÷3＝4，这就是说，12能被3整除，所以，12是3的倍数，3是12的约数。

能被2整除的数，叫做偶数或双数。例如0、2、4、6、8、……都是偶数。

不能被2整除的数，叫做奇数或单数。例如1、3、5、7、……都是奇数。

一个数是不是另一个数的倍数，有时不必试除，而根据数的某些特征就可以判断。例如：

1. 如果一个数的个位数是偶数，那末这个数一定是2的倍数。例如18、712、6010等都是2的倍数。

2. 如果一个数的个位数是5或0，那末这个数一定是5的倍数。例如15、820、2025等都是5的倍数。

3. 如果一个数的各位数字的和能被3整除，那末这个数一定是3的倍数（证明从略）。例如51、126、2007等都是3的倍数，事实上，51÷3＝17，126÷3＝42，2007÷3＝669.

§2. 质数和分解质因数

任何一个数，都能被 1 和它本身整除。如果一个数只能被 1 和它本身整除，那末这个数叫做质数。例如 2 、 7 、13 等都是质数。

100 以内的质数有：

2 、 3 、 5 、 7 、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47、53、59、61、67、71、73、79、83、89、97.

在乘法算式 $6\times3=18$ 中，被乘数 6 和乘数 3 都叫做积 18 的因数，其中因数 3 是质数，叫做质因数。

如果一个数不是质数，用试除的方法，可以把它写成几个质因数的连乘积。例如 $15=3\times5$ ， $18=2\times3\times3$ ．把一个数写成几个质因数连乘的形式，叫做分解质因数。

例1 把 30 分解质因数。

解： $\because\ 30\div2=15$ ，

$15\div3=5$ ，

即 $30=15\times2$ ，

$15=5\times3$ ，

$\therefore\ 30=5\times3\times2$ ．

用草式算法如下：

$$\begin{array}{r|l} 2 & 30 \quad \cdots\cdots \text{用质数 2 去除} \\ \hline 3 & 15 \quad \cdots\cdots \text{用质数 3 去除} \\ \hline & \ \ 5 \quad \cdots\cdots \text{质数，不必再除。} \end{array}$$

$\therefore\quad 30=2\times3\times5$ ．

例2 把 8874 分解质因数。

解：

$$\begin{array}{r|l} 2 & \underline{8874} \\ 3 & \underline{4437} \\ 3 & \underline{1479} \\ 17 & \underline{493} \\ & \ \ 29 \end{array}$$

$\therefore 8874=2\times3\times3\times17\times29$.

§3. 最大公约数和最小公倍数

一、最大公约数

任何一个数都有两个以上的约数，例如：

18 的约数有 ①、②、③、⑥、9、18；

30 的约数有 ①、②、③、5、⑥、10、15、30.

上面的1、2、3、6既是18的约数，又是30的约数。像这样的两个或几个数公有的约数，叫做公约数。公约数中最大的那一个数，叫做最大公约数。上例中，6就是18和30的最大公约数。

把18、30及其最大公约数6分解质因数：

$$18=2\times3\times3,$$

$$30=2\times3\times5,$$

$$6=2\times3.$$

可见，18和30的最大公约数就是它们公共的质因数2和3的乘积。所以，求两个数的最大公约数时，只要把这两个数分解质因数，取其公共的质因数连乘起来便是。

例1 求126和36的最大公约数。

解：把126和36分解质因数：

$$
\begin{array}{r|l}
2 & 126 \\ \hline
3 & 63 \\ \hline
3 & 21 \\ \hline
 & 7
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
2 & 36 \\ \hline
3 & 18 \\ \hline
3 & 6 \\ \hline
 & 2
\end{array}
$$

即 $126=2\times3\times3\times7$，

$36=2\times3\times3\times2$.

公共的质因数是 2、3、3.

∴ 126 和 36 的最大公约数是 $2\times3\times3=18$.

用简式算法如下：

$$
\begin{array}{r|ll}
2 & 126 & 36 \\ \hline
3 & 63 & 18 \\ \hline
3 & 21 & 6 \\ \hline
 & 7 & 2
\end{array}
\begin{array}{l}
\cdots\cdots\text{用公约数 2 去除} \\
\cdots\cdots\text{用公约数 3 去除} \\
\cdots\cdots\text{用公约数 3 去除} \\
\cdots\cdots\text{没有大于 1 的公约数，不必再除。}
\end{array}
$$

∴ 126 和 36 的最大公约数是 $2\times3\times3=18$.

求三个数的最大公约数的方法完全类似。

如果两个数的最大公约数是 1，那末这两个数叫做互质数。例如 5 和 12 是互质数。如果几个数里的任何两个都是互质数，那末这几个数是互质数。例如 2、5、9 是互质数。

二、最小公倍数

一个数的倍数有无限多个，例如：

10 的倍数有 10、20、30、40、50、60、70、80、90、……；

15 的倍数有 15、30、45、60、75、90、105、…….

上面的30、60、90、……既是10的倍数，又是15的倍数。像这样的两个或几个数公有的倍数，叫做公倍数。公倍数中那个最小的数，叫做最小公倍数。上例中，30就是10和15的最小公倍数。

把10和15及其最小公倍数30分解质因数：

$$10=2\times5,$$
$$15=3\times5,$$
$$30=2\times3\times5.$$

可见，10和15的最小公倍数是它们的公共质因数5和其余的质因数2、3的连乘积。所以，求两个数的最小公倍数时，只要分解这两个数的质因数，凡公共的质因数各取下一个，其余的都取，再连乘起来便是。

例2　求54和30的最小公倍数。

解：把54和30分解质因数：

$$\begin{array}{r|l} 2 & 54 \\ \hline 3 & 27 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 30 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array}$$

即　$54=2\times3\times3\times3,$

$30=2\times3\times5.$

公共的质因数是2、3，各取下一个，其余的质因数3、3、5全部取下，连乘得：

$2\times3\times3\times3\times5=270$ 是54和30的最小公倍数。

用简式算法如下：

$$\begin{array}{r|ll} 2 & 54 & 30 \\ \hline 3 & 27 & 15 \\ \hline & 9 & 5 \end{array}$$

9　5……互质数，不必再除。

∴ 54 和 30 的最小公倍数是 $2\times3\times9\times5=270$.

总起来说，求两个数的最大公约数和最小公倍数的方法如下：先用这两个数的公约数去除各数，得商后，再用两个商的公约数去除各商，如此继续下去，直至两个商为互质数的时候为止。各除数的连乘积是所求之最大公约数；各除数与最后的商的连乘积是所求之最小公倍数。

求三个数的最小公倍数，可先求出其中两个数的最小公倍数，再将所得的结果与第三个数求最小公倍数。

例3　求 12、18、20 的最小公倍数。

解：先求 12、18 的最小公倍数：

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 12 & 18 \\ \hline 3 & 6 & 9 \\ \hline & 2 & 3 \end{array}$$

∴ 12、18 的最小公倍数是 $2\times3\times2\times3=36$.

再求 36 和 20 的最小公倍数：

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 36 & 20 \\ \hline 2 & 18 & 10 \\ \hline & 9 & 5 \end{array}$$

∴ 36、20 的最小公倍数是 $2\times2\times9\times5=180$.

故 12、18、20 的最小公倍数是 180 .

两种特殊情况：

1. 几个数里，如果其中的一个是其他各数的倍数时，则该数就是这几个数的最小公倍数。例如，48 是 24 和 8 的倍数，所以 48 就是 48 、24、8 的最小公倍数。

2. 互质数的最小公倍数是这些数的连乘积。例如 2 、5 、9 是互质数，所以它们的最小公倍数是 $2\times5\times9=90$.

习　题

1. 指出下列各数中，哪些是 2 的倍数？哪些是 5 的倍数？哪些是 3 的倍数？

18、27、34、52、60、69、176、315、560、1952、2808、7311.

2. 写出下列各数所有的约数：

26、45、88、315、501.

3. 背诵 30 以内的质数，并把下列各数分解质因数：

216、720、924、639、1050、1125、609、7000、8136.

4. 求下列各组数的最大公约数：

64、45；72、63；102、170；252、450；
12、18、30；32、128、512；105、350、455.

5. 指出下列各组数是不是互质数：

7、18；17、43；21、102；23、115；
13、30；5、8、19；7、9、26.

6. 求下列各组数的最小公倍数：

72、36；75、15；7、9；13、22；132、99；
105、18；18、36、72；4、5、7；15、36、54；
5、25、115；63、126、52.