21世纪大学公共数学系列教材

微积分

● 主编　范周田　张汉林

Math

中国人民大学出版社

21世纪大学公共数学系列教材

微积分

主编 范周田 张汉林

参编 董庆华 黄秋梅

Math

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

微积分/范周田，张汉林主编. —北京：中国人民大学出版社，2013.2
21世纪大学公共数学系列教材
ISBN 978-7-300-17083-1

Ⅰ.①微… Ⅱ.①范… ②张… Ⅲ.①微积分-高等学校-教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第034458号

21世纪大学公共数学系列教材
微积分
主编　范周田　张汉林
Weijifen

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京昌联印刷有限公司		
规　　格	185 mm×260 mm　16开本	**版　　次**	2013年3月第1版
印　　张	15.5 插页1	**印　　次**	2013年3月第1次印刷
字　　数	352 000	**定　　价**	29.00元

内容简介

《微积分》教材是博采众家之长，以教育数学的理论为指导，结合作者多年的教学实践，在长期的教材建设的基础上以全新的视点重新编写而成.

本书以无穷小的比较作为直观概念和严格极限理论的桥梁，化解微积分入门学习的主要障碍，对重点的概念或定理的表述更加科学，更加平易直观，精心挑选了一些经济学中的重点概念和方法融入教材，并对这些概念进行了数学上的再加工，使其表述更简单、准确同时易于接受和理解，注重突出数学思想方法在实际中的应用.

本书内容包括预备知识、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、无穷级数、多元微积分、微分方程与差分方程. 本书各节末均配有习题，各章末配有综合习题.《微积分全程辅导》与本书配套，其中包括教材中所有习题的详解和不同层次的教学要求.

本书可作为高等院校经济、管理等专业的数学教材，也可作为自学、考研的参考书.

作者

2012 年冬

序

微积分太难了！这可能是很多大学生对微积分的感觉。对人文、社科和经管专业的大学生来说，可能更是难上加难。这主要是由于很多教材把微积分的“基础”——“极限”的知识讲得太难以理解了。开学的前几次课就把学生的学习兴趣打压下来了，后面便只能照本宣科，或拿结论做题，完全不能理解微积分的精髓。

而这本微积分教材从无穷小入手，首先抓住微积分的牛鼻子，进而引入极限的一般概念，以无穷小的比较作为直观概念和严格理论的桥梁，降低学习难度，使微积分变得更“亲切”了。

本书的另一亮点是插入了大量的微积分先驱简介，让读者不仅更好地了解数学思想，也能学习到很多数学文化。

能否让微积分变得更简单，关键在于概念和定理能否表述得既严格又简单，本书做到了这一点。

希望读者能从本书中找到学习微积分的乐趣。

中国科学院　院士

林群

2012年12月20日于北京

前 言

微积分是大学教育中最重要的公共基础课程，具有周期长、课时多、内容多、难点多等特点．一本好的教材应该用科学、平易的语言阐明微积分的主要内容，并且应该易教、易学．相对于数学技巧与数学证明，数学思想方法的学习与应用对经济、管理等专业的学习者更为重要．

《微积分》教材的写作充分借鉴了林群院士关于无穷小的微积分思想和张景中院士的教育数学理论，通过对微积分内容的透彻研究实现微积分知识的简单呈现．

本教材具有以下特点：

1. 化解障碍，平易衔接．极限理论是微积分理论的重要基础，也是微积分入门学习的主要障碍．我们从自变量的变化过程出发直观地介绍无穷小的基本概念，以无穷小的比较作为直观概念和严格极限理论的桥梁，这样的做法与初学者已有的知识水平和思维习惯相适应，降低了极限理论的学习难度，也能表达极限的数学语言的意境和作用．

2. 对重点的概念或定理的表述更加科学，更加平易直观．例如，对函数、导数、不定积分、多元微分等概念的表述更具实用性，复合函数的导数公式、牛顿-莱布尼茨公式和洛必达法则的证明等更加突出由特殊到一般的分析思想．

3. 精选重点，以点带面．通过广泛参阅国内外优秀微积分教材并结合教学经验，精心挑选了一些经济学中的重点概念和方法融入了教材，并对这些概念进行了数学上的再加工，使其表述更简单、准确同时易于接受和理解．这些重点概念的引入可以为学习者打开数学在经济学中应用的大门．

4. 突出数学的思想方法，用数学思想解决实际问题．例如，教材中借助求解常微分方程过程中经常使用的变量替换的思想，简化了二阶常系数线性微分方程的求解过程．书中插入的数学家简介有助于读者更好地了解数学思想．

在《微积分》的写作过程中，得到了多位专家的热心支持与无私帮助，在此一并感谢！

感谢林群院士，张景中院士！

感谢清华大学韩云瑞教授，北京航空航天大学李心灿教授，同济大学郭镜明教授！
感谢北京工商大学沙峯教授，北京联合大学李大矛教授！
对我们的同事及所有关心并支持我们的朋友一并表示感谢！
由于编者水平和时间所限，对书中不妥之处，敬请广大读者批评指正.

编者

2012 冬于北京工业大学

目　录

预备知识

为了方便阅读本书，我们把初等数学已经涉及并且和微积分密切相关的一些知识进行罗列或重新叙述，例如函数的概念、某些特殊形式的函数，以及基本初等函数的图形与性质等，以备读者参考、查阅.

一、区间与邻域

在一元微积分中，我们通常用 **N** 表示自然数集，**Z** 表示整数集，**Q** 表示有理数集，**R** 表示实数集. 区间和邻域都是实数集 **R** 的特殊子集，可以用集合的方式表示，形式如下：

开区间：$(a,b)=\{x|a<x<b\}$；闭区间：$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$；

半开半闭区间：$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$；

无穷区间：$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x<+\infty\}$，$(-\infty,b)=\{x|-\infty<x<b\}$，

$$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}.$$

x_0 的 δ 邻域($\delta>0$)：$U(x_0,\delta)=\{x|x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$或$U(x_0,\delta)=\{x||x-x_0|<\delta\}$是一个以 x_0 为中心、长度为 2δ 的对称开区间，区间半长 δ 称作邻域的半径.

x_0 的去心 δ-邻域：$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$.

去心邻域也称作空心邻域.

二、函　数

粗略地说，函数用来表示一个变量与另外一组变量之间的确定关系，即当这一组变量的取值都确定后，这个变量的取值也随之唯一确定，这一组中有几个变量就称函数是几元函

数. 我们主要讨论一元函数.

设 D 为实数集 $\mathbf{R}$ 的非空子集，如果对任意的 $x\in D$，都存在唯一的 $y\in\mathbf{R}$ 与之对应，则称 y 是 x 的一元函数，通常可以用 $y=f(x)$ 表示，并把 x 称为**自变量**，把 y 称为**因变量**，自变量的取值范围称为函数的定义域，因变量的取值范围称为函数的值域，分别记为 $dom(f)$ 和 $ran(f)$，或者简记为 D_f 和 R_f.

通常可以用集合、数据对应和图形表示函数，微积分中表示函数的最常见方式是显函数（解析表达式），如 $y=x^2+5x+3$，和由方程确定的隐函数，如 $x^3+y^3+xy=1$.

为了清楚地刻画出一个函数，除了函数的表达式外，还必须考察其定义域和值域. 如果函数是用于表达实际问题，那么它的定义域也由实际问题所确定. 例如，设半径为 r 的圆的面积为 S，则有函数关系

$$S=\pi r^2.$$

由于 r 表示半径，因此有 $r>0$.

微积分中许多时候不涉及函数的实际意义，只讨论函数的表达式. 在这种情况下，函数的定义域，即自变量的取值范围，是使表达式有意义的所有取值所构成的集合. 例如，函数 $y=\pi x^2$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

设 $y=f(x)$ 为一元函数. 如果对任意的 $y\in R_f$，都存在唯一的 $x\in D_f$，使得 $y=f(x)$，那么 x 就是 y 的函数，记之为 $x=f^{-1}(y)$，称为 $y=f(x)$ 的**反函数**. 例如，$y=\sqrt{x}$ 有反函数 $x=y^2$.

一般地说，不是任意的函数都有反函数. 例如，$y=x^2$，$-\infty<x<+\infty$ 就没有反函数.

$y=f(x)$ 存在反函数的充分必要条件是对任意的 $x_1,x_2\in D_f$，如果 $x_1\neq x_2$ 则 $f(x_1)\neq f(x_2)$. 特别地，单调的函数都有反函数.

需要注意的是，一个函数与其反函数的自变量与因变量是互换的. 函数 $y=f(x)$ 以 x 为自变量，而其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 以 y 为自变量. 例如，$y=\sin x$，$|x|\leqslant\frac{\pi}{2}$ 的反函数是 $x=\arcsin y$，而不是 $y=\arcsin x$. 在初等数学中，约定总是以 x 作自变量，所以才把 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$.

康托尔（Cantor，1845—1918），德国数学家，生于俄国圣彼得堡. 他是集合论的创建者，有人将集合的生日 1873 年 12 月 7 日作为现代数学时期的开端. 他构造了历史上有名的“康托尔集”、“康托尔序列”，提出了“连续统假设”以及康托尔定理. 他还是维数理论的开拓者，由于点集理论是一般拓扑学的基础，所以说康托尔是点集拓扑的奠基者.

一个函数在其定义域的不同部分可以有不同的表达式，即所谓的分段函数.

例 1　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

如图 1 所示，该分段函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\{-1,0,1\}$. 由符号函数的定义，对任意实数 x，都有：$x=|x|\operatorname{sgn}x$.

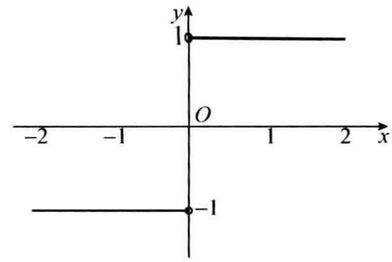


图 1

例 2 设分段函数

$$y=\begin{cases} x^2-1, & x\in[-1,0) \\ 2x, & x\in[0,1) \\ -2x+4, & x\in[1,2) \\ 0, & x\in[2,3] \end{cases}.$$

该函数的定义域为$[-1,3]$，如图 2 所示.

例 3 取整函数 对任意实数 x，用 $y=f(x)=[x]$表示不超过 x 的最大整数，称为取整函数，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为整数集 **Z**. 函数曲线呈阶梯状，又称为阶梯形曲线，如图 3 所示.

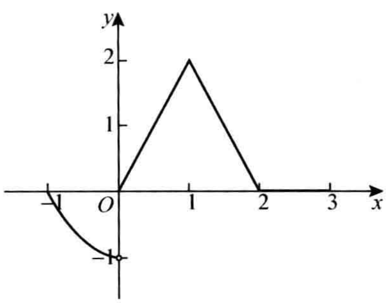


图 2

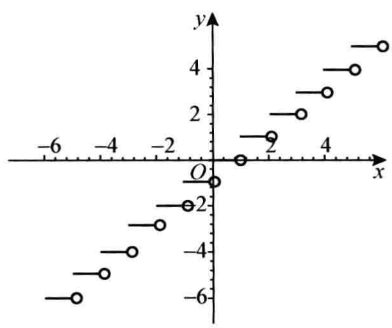


图 3

三、函数的性质

在微积分中，主要关心函数的几何性质，包括函数的单调性、奇偶性、周期性和有界性.

1. 函数的单调性

设 I 是函数 $y=f(x)$的定义域中的一个区间. 如果对任意的 $x_1>x_2\in I$，都有$f(x_1)>f(x_2)$，就称 $f(x)$在区间 I 上单调递增，简称单增. 如果对任意的 $x_1>x_2\in I$，都有$f(x_1)<f(x_2)$，就称 $f(x)$在区间 I 上单调递减，简称单减. 函数单调递增或单调递减的性质称为函数的单调性.

例 4 证明 $y=x^n$(n 为正整数)在$(0,+\infty)$上单调递增.

证明 对任意 $x_1>x_2>0$，都有

$$\frac{x_1^n}{x_2^n}=\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n=\underbrace{\frac{x_1}{x_2}\cdot\cdots\cdot\frac{x_1}{x_2}}_{n\text{个}\frac{x_1}{x_2}}>\frac{x_1}{x_2}>1,$$

即 $x_1^n>x_2^n$，所以，$y=x^n$ 在$(0,+\infty)$上单调递增.

更一般的结论是：$y=x^\mu$(μ 为正实数)在$(0,+\infty)$上单调递增.

2. 函数的奇偶性

函数的奇偶性分别指函数的图形关于坐标系原点对称和关于 y 轴对称. 因此,讨论函数 $y=f(x)$ 的奇偶性的前提是 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,即对任意 $x\in D$,都有 $-x\in D$.

设 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,如果对任意 $x\in D$,都有 $f(x)=f(-x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数;如果对任意 $x\in D$,都有 $f(x)=-f(-x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.

例如,$y=x^2,x\in(-\infty,+\infty)$ 是偶函数,而 $y=x^3,x\in(-\infty,+\infty)$ 是奇函数.

3. 函数的周期性

设 $y=f(x)$ 为函数. 如果存在正数 T,使得 $f(x)=f(x+T)$ 对定义域中的任意 x 都成立,则称 $y=f(x)$ 为周期函数,T 是一个周期.

通常情况下,我们关心周期函数的最小正周期,简称周期. 例如,正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 的周期是 2π,而正切函数 $y=\tan x$ 和余切函数 $y=\cot x$ 的周期是 π.

也有例外的情况,例如常数函数 $y\equiv C$ 是周期函数,任意正数都是它的周期,因此它没有最小正周期.

4. 函数的有界性

设 $f(x)$ 在 D 上有定义. 若存在常数 $M>0$,使得对一切 $x\in D$,都有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 D 上有界,也称 $f(x)$ 是 D 上的有界函数.

例如,由于 $|\sin x|\leqslant 1$,故 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界. 对有界函数也可以做如下定义:若存在常数 A、B,使得对一切 $x\in D$,都有 $A\leqslant f(x)\leqslant B$("$\leqslant$"可以换成"$<$"),则称 $f(x)$ 在 D 上有界. 例如,函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上有界,因 $0<\dfrac{1}{x}\leqslant 1,x\in(1,+\infty)$.

四、基本初等函数

对于基本初等函数,并没有十分明确的规定. 本书为了方便,除了较特殊的**常数函数** $y=C$ 外,把微积分中最常见的函数分为五类,称为**基本初等函数**,包括幂函数 $y=x^\mu,\mu\neq 0$;指数函数 $y=a^x,a>0,a\neq 1$;对数函数 $y=\log_a x,a>0,a\neq 1$;三角函数 $y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x$,以及反三角函数 $y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\mathrm{arccot}\, x$.

1. 幂函数 $y=x^\mu,\mu\neq 0$

幂函数的定义域稍显复杂,与 μ 的具体取值有关:当 μ 为正整数时,定义域为 $(-\infty,+\infty)$;当 μ 为负整数时,定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;其他情况详见表 1,其中 p,q 是正整数.

表 1　　幂函数的定义域

函数	$y=x^\mu(\mu\neq 0)$				
μ	$\mu=\dfrac{q}{2p}$	$\mu=\dfrac{q}{2p+1}$	$\mu=-\dfrac{q}{2p}$	$\mu=-\dfrac{q}{2p+1}$	μ 为无理数
定义域	$[0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$

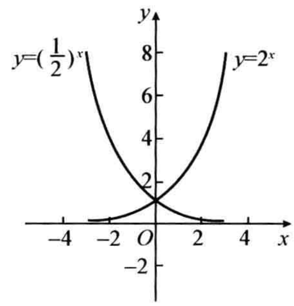
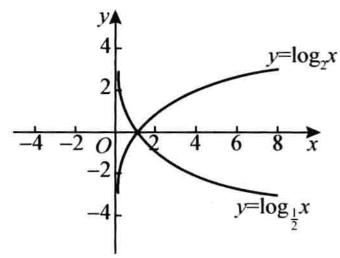
由表 1 可见,对于任意实数 $\mu\neq 0$,幂函数 $y=x^\mu$ 在 $(0,+\infty)$ 上都有定义. 当 $\mu>0$ 时,

$y=x^{\mu}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单增，当 $\mu<0$ 时，$y=x^{\mu}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单减.

2. 指数函数与对数函数

指数函数与对数函数的图形与性质见表 2.

表 2　　指数函数与对数函数

函数	指数函数 $y=a^x, a>0, a\neq 1$	对数函数 $y=\log_a x, a>0, a\neq 1$
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$
值域	$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
图形 $(a=2$ 与 $a=\frac{1}{2})$		
单调性	当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 单调递增； 当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 单调递减.	当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 单调递增； 当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 单调递减.

当 $a=\mathrm{e}$ 时，相应的指数函数为 $y=\mathrm{e}^x$，相应的对数函数为 $y=\ln x$，又称为**自然对数**. 其底数 $\mathrm{e}=2.718\,281\,828\,459\,045\,23\cdots$ 是一个无理数，e^x 和 $\ln x$ 在微积分中使用频率很高.

3. 三角函数与反三角函数

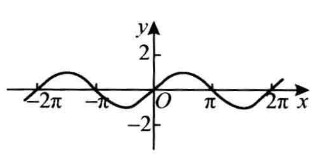
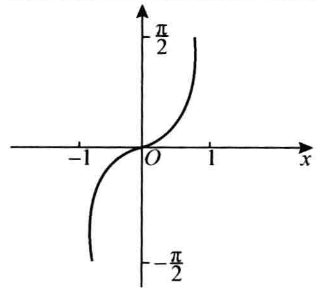
初等数学中，最重要的三角函数公式有两个：

$$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y,$$
$$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y.$$

微积分中需要的三角函数公式都可以由这两个公式推导出来.

三角函数与反三角函数的图形与性质见表 3～表 6.

表 3　　正弦函数与反正弦函数

函数	正弦函数 $y=\sin x$	反正弦函数主值 $y=\arcsin x$
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$
值域	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
图形		

续前表

函数	正弦函数 $y=\sin x$	反正弦函数主值 $y=\arcsin x$
奇偶性	$y=\sin x$ 为奇函数,图形关于原点对称	$y=\arcsin x$ 为奇函数,图形关于原点对称
周期性	最小正周期 2π	非周期函数
单调性	在$\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$上单增; 在$\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$上单减.	单调递增

表 4　　余弦函数与反余弦函数

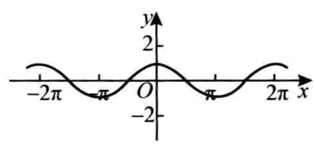
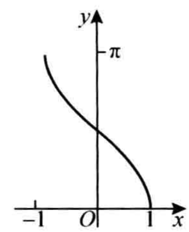
函数	余弦函数 $y=\cos x$	反余弦函数主值 $y=\arccos x$
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$
值域	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
图形		
奇偶性	$y=\cos x$ 为偶函数,图形关于 y 轴对称	$y=\arccos x$ 非奇非偶
周期性	最小正周期 2π	非周期函数
单调性	在$(2k\pi,\pi+2k\pi)$上单减; 在$(-\pi+2k\pi,2k\pi)$上单增.	单调递减

表 5　　正切函数与反正切函数

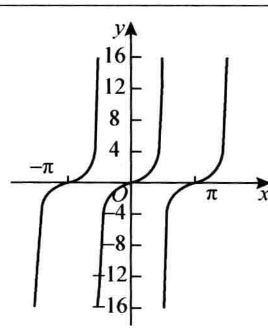
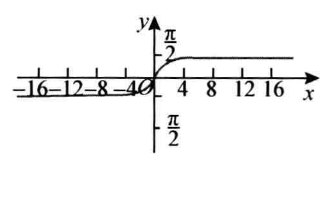
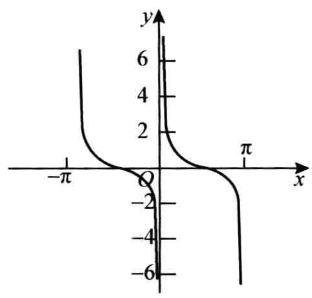
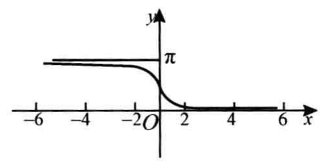
函数	正切函数 $y=\tan x$	反正切函数主值 $y=\arctan x$
定义域	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$	$(-\infty,+\infty)$
值域	$(-\infty,+\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
图形		
奇偶性	$y=\tan x$ 为奇函数,图形关于原点对称	$y=\arctan x$ 为奇函数,图形关于原点对称
周期性	最小正周期 π	非周期函数
单调性	在每个周期内都单增	单调递增

表 6　　余切函数与反余切函数

函数	余切函数 $y=\cot x$	反余切函数主值 $y=\operatorname{arccot} x$
定义域	$x\neq k\pi$	$(-\infty,+\infty)$
值域	$(-\infty,+\infty)$	$(0,\pi)$
图形		
奇偶性	$y=\cot x$ 为奇函数，图形关于原点对称	$y=\operatorname{arccot} x$ 非奇非偶
周期性	最小正周期 π	非周期函数
单调性	在每个周期内都单减	单调递减

五、初等函数

类似于实数，函数之间也可以进行加、减、乘、除的四则运算. 此外，函数还可以做复合运算.

设有函数 $f(u)$，$g(x)$，把 $g(x)$ 代入 $f(u)$ 中，即令 $u=g(x)$，如果得到的表达式 $y=f[g(x)]$ 有意义，就称其为 f 与 g 的复合函数，称 u 为中间变量. 例如，$y=\arcsin u$ 与 $u=\ln x$ 可以复合为 $y=\arcsin\ln x$，定义域为 $x\in\left[\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right]$，而 $y=\arcsin u$ 与 $u=\sqrt{4+x^2}$ 不能复合，因为 $y=\arcsin\sqrt{4+x^2}$ 的定义域是空集.

如此定义的函数复合运算可以推广至任意有限层. 例如 $y=f(u)$，$u=g(v)$，$v=h(s)$，有复合函数

$$y=f[g[h(s)]].$$

简单的复合函数就是把基本初等函数的自变量 x 换成函数 $f(x)$，即

$$[f(x)]^{\alpha},a^{f(x)},\log_a f(x),\sin f(x),\cos f(x),\tan f(x),\cot f(x),$$
$$\arcsin f(x),\arccos f(x),\arctan f(x),\operatorname{arccot} f(x),$$

其中 $f(x)\neq x$. 更复杂的复合函数则可以通过多层复合得到.

形如 $f(x)^{g(x)}$（$f(x)>0$ 且 $f(x)\neq 1$）的函数称为幂指函数，因为它兼具幂函数和指数函数的特点. 幂指函数也是复合函数，我们有 $f(x)^{g(x)}=\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$.

由常数函数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算所得到的函数