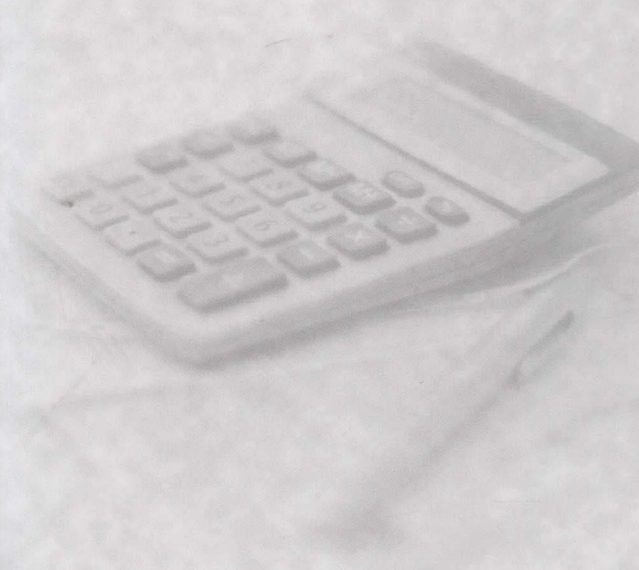
21世纪高等院校教材

管理统计

程龙生 主编



科学出版社

21世纪高等院校教材

管理统计

主　编　程龙生
副主编　钟晓芳　包文彬
江文奇　安智宇

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书结合高等院校经济管理类专业的特点，系统地介绍了概率论和数理统计的基本思想、基本方法及其应用。全书分10章：第1～5章介绍了概率论的基本理论和方法，包括概率论基础、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征和大数定律及中心极限定理等内容；第6～9章介绍了数理统计的有关知识和方法，包括样本及抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析等内容；最后一章特别介绍了SPSS软件的应用。本书内容涵盖了《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》中有关概率与统计的所有知识点。

本书可作为高等院校管理类、经济类专业本科生、研究生教材，也可供企事业单位工程技术人员和科技工作者阅读、参考。

图书在版编目(CIP)数据

管理统计/程龙生主编．—北京：科学出版社，2013
21世纪高等院校教材
ISBN 978-7-03-037773-9

Ⅰ.①管…　Ⅱ.①程…　Ⅲ.①经济统计学-高等学校-教材　Ⅳ.①F222

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第124127号

责任编辑：兰　鹏　张　凯/责任校对：张怡君
责任印制：阎　磊/封面设计：蓝正设计

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市安泰印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2013年7月第　一　版　开本：787×1092　1/16
2013年7月第一次印刷　印张：18
字数：427 000

定价：38.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

管理统计学是一门以概率论为基础，以统计方法为工具，研究社会和经济管理的应用科学。它研究如何有效地分析和解释反映社会和经济管理实践的数据，以期认识数据的规律性及内在的社会和经济含义。管理统计学现在已被广泛应用于产品及服务质量改进、过程控制、顾客与市场分析、各类资源管理、风险分析、投资效益评估、经济指标分析和预测等方面，为管理者进行正确决策提供科学的依据。

全书共分为10章，其中第1～5章为概率论的基本理论和方法，该部分系统地介绍了概率论的基本概念、一维和多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征以及大数定律和中心极限定理；第6章介绍了随机样本的概念、常用抽样分布及其性质，这一章是联系概率论和后续数理统计的纽带；第7、8章介绍了两类重要的统计推断方法：参数估计和假设检验，其中第7章着重介绍了总体参数的点估计和区间估计方法，第8章着重介绍了单个正态总体均值和方差的假设检验、两个正态总体均值差和方差比的假设检验、总体比例的假设检验、分布拟合检验以及秩和检验等；第9章介绍了两种常用的数理统计方法，即方差分析与回归分析；第10章介绍了常用的统计软件SPSS软件的应用。

本书参照经济管理的学科背景，从知识点引入例题、习题、案例等方面，对概率论及数理统计初步的有关知识和方法进行了系统介绍，这将更适合经济管理类本科生理解和掌握概率统计相关内容。与国内同类教材相比，本书有较强的经济管理专业特色，同时又增加了统计软件的应用，此外，本书内容涵盖了《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》中有关概率与统计的所有知识点，这也符合本科生的考研需求。该书凝聚了编著者多年来从事应用统计研究、教学与实践的成果与经验。本书具有如下特色：

(1) 系统性。本书既系统论述了管理统计的基本理论和方法，又介绍了概率论及统计方法在经济管理相关领域中的应用。

(2) 新颖性。本书借鉴国外的一些优秀教材的写法，在每一章的开头部分引入实践中的统计，以真实的案例、浅显易懂的语言，激发读者的兴趣。

(3) 先进性。本书介绍的案例以经济管理案例为主，在每一章节的最后特别加入了案例分析这一环节，同时摒弃了晦涩难懂的统计公式的推导，更加适合经济管理类专业的学生。

(4) 实践性。本书以实际案例为导向，强化实际应用能力，全程案例辅助理解，做到学以致用，同时以软件应用为导向，强化解决问题的能力。

本书可作为高等院校管理类、经济类和一般工科专业本科生、研究生教材，全书共需4个学分(64个学时)，第1～8章前半部分大约需要3个学分(48学时)，第9章大约需要1个学分(16学时)，第10章作为配套软件应用指导，可以选讲。本书也可供企事业单位

工程技术人员和科技工作者阅读、参考。

本书由南京理工大学经济与管理学院的五位老师合作编写，具体分工是：第 1 章和第 9 章：包文彬；第 2 章和第 8 章：钟晓芳；第 3 章和第 7 章：程龙生；第 4 章和第 10 章：江文奇；第 5 章和第 6 章：安智宇。同时也对为本书的出版付出大量辛勤劳动的研究生和编辑一并致谢！

我们全体作者诚恳地希望广大师生和读者对本书提出宝贵意见，以便进一步加以改进。

编著者谨识

2013 年 4 月 28 日

目　录

第1章 概率论基础

实践中的概率

某公司计划投资兴建一个休闲娱乐中心，项目投资约为1亿元，项目建设为期两年。在项目建成后，每年需投入流动资金500万元以维持正常运转。由于项目收益取决于客流量及平均每位顾客的消费量，因此其盈利能力具有不确定性。为了提高公司决策的科学性，公司对是否进行该项目的建设进行了市场调查和项目的经济可行性研究。结论是：如果该休闲娱乐中心每日的上座率能够达到70%以上，那么该项目就可盈利。该项目所在地离城市中心较远，该项目能盈利吗？这个项目值得投资吗？

企业的经营决策经常需要在一些不确定性的基础上进行。例如，如果我们降低产品价格，销售额将增加的概率是多少？某种新的工艺提高生产率的概率是多少？某一新投资将有利可图的概率是多少？在金融市场上，也存在许多的不确定性，如明天股票市场上涨还是下跌？银行贷款坏账发生的可能性是多大？一个月后汇率上升的概率是多少？

为了回答这些问题，有必要对这种不确定性现象进行系统的研究，利用概率论，可以帮助决策者进行各种决策分析，利用所得到的大量信息，可以大大降低决策的风险程度，使企业避免重大的经济损失。

在自然界和人类的社会经济生活中发生的现象可以分为两类：一类现象是人们可以准确预言其在一定条件下必然发生或不发生的现象。例如，太阳东升西落；在无外力作用下，运动的物体将仍保持匀速直线运动；在一个标准大气压下，纯净水在100℃时会沸腾；在利率不变的条件下，存入银行的资金收益是不变的；等等，这类现象称为确定性现象。另一类现象是在一定条件下，人们无法预言将会出现哪一种结果，如企业的投资是否可以按时收回，明天股票的涨跌，显像管的寿命，一个项目的投资收益率等，这种现象称为不确定性现象或随机现象。

虽然随机现象在一次观察或试验中可能发生也可能不发生，但大量的重复观察或实验会呈现某种规律性。例如，虽然每个项目的投资收益率是随机的，但大量同类项目的投资收益率呈现出一定规律性，因而项目管理中，某类项目就有基准的投资收益率；个别显像管的寿命是随机的，但大量实验发现显像管的寿命有一定的分布规律性；虽然个股的涨跌是随机的，但大量数据表明股票的价格与其经营业绩紧密相关等。概率论就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门学科，为企业在不确定条件下的生产经营管理提供科学的决策依据。

1.1 随机试验

在概率论中，人们通常将对随机现象的一次观察或进行的一次试验，称为随机试验（简称试验）。但严格意义下的随机试验应该满足以下三个条件：

(1) 试验可在相同条件下重复进行；

(2) 试验的所有结果事先是明确的，且不止一个；

(3) 每次试验总会出现也仅会出现这些结果中的一个，但试验前不能确切知道这次试验会出现哪一个结果。

随机试验我们用 E 来表示。

例如，在一批产品中抽取一件检验，合格或者不合格，可反复进行，抽到的合格品是非负整数的任意一个，但试验前无法确定究竟会出现哪种结果；某人买一只股票，收益可能无限大，却也有可能损失所有本金，每次投资都会出现损失或收益，但投资前并不知道会出现哪种结果，这些都是随机试验；其次还有一小时内到百货商店来的顾客数，观察市场上对某种商品的未来需求量，掷一枚硬币可能会出现“正面”或“反面”的不同结果等都是随机试验。

1.2 样本空间和随机事件

1.2.1 样本空间

对于每一个随机试验 E，虽然试验前不能知道该次试验会出现哪个结果，但试验可能出现结果集合是已知的。我们把随机试验 E 所有可能出现的结果的集合称为 E 的样本空间，记作 S，而样本空间中的每一个结果(也即试验的每一个结果)，称为样本点，记作 e。

抽取一件产品检验，其样本空间为 $S=\{$合格，不合格$\}$，检验 n 个产品中合格品的数量，其样本空间为 $S=\{0,1,2,\cdots,n\}$；用 m 元钱进行投资，投资收益的样本空间为 $S=\{r \mid -\infty \leqslant r < \infty\}$

1.2.2 随机事件

在研究随机现象中，人们往往关心满足某种条件的那些样本点组成的集合。例如，某笔贷款，银行关心的是其是否会发生损失，一批产品是否合格，一亩地的产量是否会高于 500kg 等。

一般地，称随机试验中可能出现或可能不出现的事件称为随机事件，其是试验 E 的样本空间 S 的一个子集。随机事件常用字母 $A,B,C,\cdots$ 表示。随机试验中每个可能的结果 $\{e_i\}$ 称为该试验的一个基本事件，或称为该试验的一个样本点。

我们说一个事件发生，当且仅当这一子集中的一个样本点出现。

每次试验中必然发生的事件称为必然事件。由于样本空间 S 包括了所有的样本点，在每次试验中它必然发生，因而其为必然事件。将必然事件记为 S。

试验中不可能发生的事件(不含任何样本点集合)称为不可能事件,用字母$\varnothing$表示。

市场上对某一商品的需求量超过 500 件/周,其可能发生也可能不发生;银行的一笔贷款可能损失也可能不发生损失;工厂产品的次品率可能小于 1‰也可能不小于 1‰,其都是随机事件。

1.2.3　事件的关系及运算

事件是一个集合,因而集合的关系及运算性质均可用于事件。

设随机试验为 E,其样本空间为 S,而 $A,B,C,A_k(k=1,2,\cdots)$均表示事件。

1) 事件的包含与相等

如果在一个随机试验中,事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生,就称事件 B 包含事件 A,记作 $A\subset B$,见图 1.1。

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称 A 与 B 相等,记为 $A=B$。

如事件 A 表示"合格品数量不超过 100",事件 B 表示"合格品数量不超过 200 个",于是 $A\subset B$。

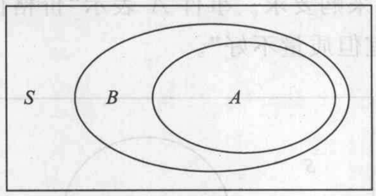


图 1.1　$A\subset B$

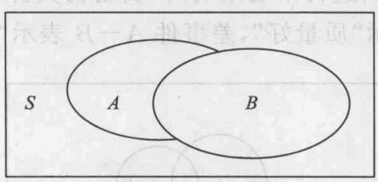


图 1.2　$A\cup B$

2) 事件的并(和)

如果在一次试验中,事件 A 或事件 B 至少发生一个,称为事件 A 与 B 的并,记作 $A\cup B$,见图 1.2。

若 $A_k,k=1,2,\cdots,n$ 中至少一个发生,则称其为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件,记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$;而称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_k,k=1,2,\cdots$的和事件。

例如,在库存管理问题中,事件 A 表示"A 产品存货不足",事件 B 表示"B 产品存货不足",于是用 $A\cup B$ 表示"产品 A 或产品 B 存货不足"。

3) 事件的交(积)

如果在一次试验中,事件 A 与事件 B 同时发生,称为事件 A 与事件 B 的交(积),记作 $A\cap B$ 或 AB,见图 1.3。

若 $A_k,k=1,2,\cdots,n$ 同时发生,则称其为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交(积)事件,记为 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$;$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$的积(交)事件。

接上例,若产品 A 和产品 B 同时不足,则用 $A\cap B$ 表示。

4) 互斥(互不相容)事件

若 A、B 两个事件不能同时发生,即 $AB=\varnothing$,则称 A 与 B 互斥,见图 1.4。

例如，事件 A 表示“某时贾某在 A 地进行市场调研”，事件 B 表示“某时贾某在 B 地进行市场调研”，一个人不可能同时出现在两个地方，于是 $AB=\varnothing$。

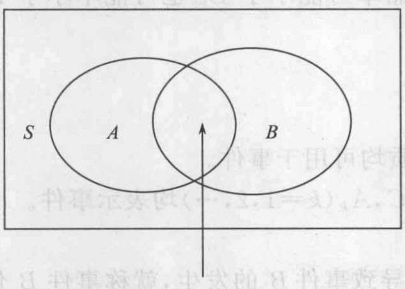


图 1.3　$A\cap B$

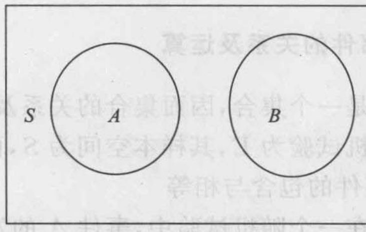


图 1.4　A 与 B 互斥

5) 事件的差

若 A 发生而 B 不发生的事件，称为 A 与 B 的差，记为 $A-B$，见图 1.5。

例如，进行市场采购时，货物物美价廉才符合采购要求。事件 A 表示“价格便宜”，事件 B 表示“质量好”，差事件 $A-B$ 表示“价格便宜但质量不好”。

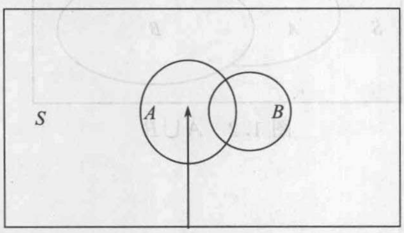


图 1.5　$A-B$

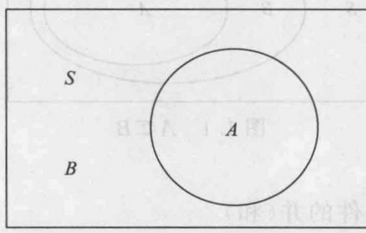


图 1.6　互逆事件

6) 对立(逆)事件

若一次试验中，A 与 B 有一个且仅有一个发生，则称事件 A 与 B 互为对立事件。那么 A 与 B 应同时满足 $A\cup B=S$ 且 $AB=\varnothing$。记 A 的对立事件为 $\bar{A}$。例如，一个产品要么合格，要么就不合格，不可能同时发生，见图 1.6。

当 $AB=\varnothing$ 时，$A\cup B=A+B$。

1.2.4　事件运算的性质

交换律：

$$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A$$

结合律：

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$$
$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$$

分配律：

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

德摩根律：

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

【例1.1】(财务管理问题)　某部门对某企业的账务进行查询，在一叠账本中任取3本，A_i 表示第 i 本查到是假账，利用事件关系表达下列事件：

(1) 3本都是假账：$A_1A_2A_3$；

(2) 至少有两本做了假账：$A_1A_2A_3 \cup \bar{A}_1A_2A_3 \cup A_1\bar{A}_2A_3 \cup A_1A_2\bar{A}_3$；

(3) 3本都没有做假：$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$；

(4) 至少有一本做了假账：$A_1 \cup A_2 \cup A_3$。

1.3　频率和概率

对一个随机事件，经常关心的不仅是它是否发生，而更关心的是其发生的概率有多大。例如，保险公司经常希望知道一笔保险需要赔付的可能性多大，赔付各种金额的概率有多少；银行经常关心的是一笔贷款损失的可能性多大，企业关心项目投资能够收益的可能性有多少，等等。因此，我们希望选择一个数来表示各事件发生的可能性大小。

1.3.1　频率

在相同条件下，进行了 n 次试验，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数，而称比值 n_A/n 为事件 A 发生的频率，记作 $f_n(A)$。

频率具有下列性质：

(1) $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；

(2) $f_n(S)=1, f_n(\varnothing)=0$；

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 两两互不相容，则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k)$$

频率表示了事件 A 发生的频繁程度，直观上看，事件 A 发生的可能性越大，其发生就应当越频繁。反之亦然。因此，频率是否可以表示事件 A 发生的概率呢？

历史上很多人进行了抛硬币试验，验证出现正面的频率大小，其结果如表1.1所示。

表1.1　抛硬币试验

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
德·摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
K·皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
K·皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

从数据来看，随着试验次数的增加，频率 $f_n(H)$ 越来越接近 0.5。

大量试验表明，当试验次数 n 不断增加时，频率 $f_n(A)$ 会逐渐稳定于一常数。这种频率的稳定性就是所谓的统计规律性，以其来表征事件 A 发生的概率应当是合适的。

1.3.2 概率

概率的公理化理论由苏联数学家柯尔莫哥洛夫(А. Н. Колмогоров)于 1933 年建立的。

定义 1.1(概率) 设 S 是随机试验 E 的样本空间，对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的概率(probability)，如果这个集合函数 $P(\cdot)$ 满足下面三条公理：

(1) 非负性：对于任一事件 A，都有 $P(A)\geqslant 0$；

(2) 归一性：对必然事件 S，$P(S)=1$；

(3) 可列可加性：设 $A_1,A_2,\cdots$ 为两两互不相容事件，则有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

由概率的公理化定义，可以得到概率的一些重要性质。

性质 1.1 $P(\varnothing)=0$

【证】 令 $A_k=\varnothing$，$k=1,2,\cdots$，则 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k=\varnothing$，且 $A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j$，$i,j=1,2,\cdots$，由公理化定义的可列可加性，得

$$P(\varnothing)=P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)=\sum_{k=1}^{\infty} P(\varnothing)$$

而由公理化定义 1.1(1)知，$P(\varnothing)\geqslant 0$，从而 $P(\varnothing)=0$。

性质 1.2 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，则

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

【证】 设 $A_k=\varnothing$，$k=n+1,n+2,\cdots$，则 $A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j$，$i,j=1,2,\cdots$，由公理化定义的可列可加性有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k)+0=\sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

性质 1.3 对任一事件 A，有

$$P(\bar{A})=1-P(A)$$

【证】 由于 $A\cup\bar{A}=S$，且 $A\cap\bar{A}=\varnothing$，根据性质 1.2，得

$$1=P(S)=P(A\cup\bar{A})=P(A)+P(\bar{A})$$

即 $P(\bar{A})=1-P(A)$。

性质 1.4 设 A、B 是两个事件，若 $A\subset B$，则

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

$$P(A) \leqslant P(B)$$

【证】 由于 $A \subset B$,则有 $B = A \cup (B-A)$,且 $A \cap (B-A) = \varnothing$,根据有限可加性,得

$$P(B) = P(A \cup (B-A)) = P(A) + P(B-A)$$

从而,

$$P(B-A) = P(B) - P(A)$$

而又因概率的非负性,可知 $P(B-A) = P(B) - P(A) \geqslant 0$,所以 $P(A) \leqslant P(B)$。

性质 1.5 对于任一事件 A,有

$$P(A) \leqslant 1$$

【证】 因为 $A \subset S$,根据性质 1.4,有

$$P(A) \leqslant P(S) \leqslant 1$$

性质 1.6 设 A、B 是两个事件,则有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$$

【证】 因为 $A \cup B = A \cup (B - AB)$,而 $A \cap (B-AB) = \varnothing$,$B \subset AB$,根据性质 1.2 和性质 1.4,得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B-AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

上式可推广到多个事件的场合。设 A、B、C 为三个事件,则有

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

一般地,设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个事件,则

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

1.4 古典概率模型

历史上对概率的研究起源于欧洲中世纪的赌博或机会游戏。16 世纪意大利学者开始研究掷骰子等赌博中的一些问题;17 世纪中叶,法国数学家帕斯卡、荷兰数学家惠更斯基于排列组合的方法,研究了较复杂的赌博问题,解决了“合理分配赌注问题”(即得分问题)。在这些问题中,有两个共同的特点,即只有有限个不同的结果可能出现,并且各种不同的结果出现的机会相同。

理论上,称具有下列两个特点的随机试验 E 为古典概型(等可能概型):

(1) 试验结果只有有限多个;

(2) 试验中每个结果出现的可能性是相同的。

用数学语言表示,即为

$$S = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$$

且

$$P(\{e_i\})=\frac{1}{n},\quad i=1,2,\cdots,n$$

设 A 是一事件，若其包含 k 个基本事件，即 $A=\{e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_k}\}$，则有

$$P(A)=P(\{e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_k}\})=P(\{e_{i_1}\})+P(\{e_{i_2}\})+\cdots+P(\{e_{i_k}\})=\frac{k}{n}$$

$$=\frac{A\text{ 中包含的样本点数}(A\text{ 的有利场合数})}{\text{样本空间中的样本点总数}}$$

上式即为古典概型中事件 A 概率的计算公式。

【例 1.2】(质量管理问题)　设有 N 件产品，其中有 M 件次品，今从其中任取 n 件，问恰好有 $k(k\leqslant M)$ 件次品的概率是多少？

【解】　在 N 件产品中任取 n 件，可能的取法有 C_N^n 种。设 A 表示任取的 n 件中恰好有 k 件次品这一事件，则 A 的有利场合数为 $C_M^k C_{N-M}^{n-k}$，因而

$$P(A)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

该式即为超几何分布的概率公式。

【例 1.3】(市场调研问题)　某公司对其旗下的某产品进行市场满意度测试，在 100 份问卷中，有 90 份对此产品是满意的，现从中随意抽取 5 份，求正好有 4 份是满意的概率。

【解】　由超几何分布公式，从 100 份问卷中任取 5 份的总取法有 $n=C_{100}^5$ 种。

设 A 事件为所取的 5 份中正好有 4 份是满意的这一事件，A 的有利场合数为 $k=C_{90}^4 C_{10}^1$，从而所求事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{C_{90}^4 C_{10}^1}{C_{100}^5}=0.3394$$

【例 1.4】(人力资源管理问题)　某公司进行人才招聘，共有应聘者 30 人，其中有 2 人是滥竽充数者，现从中招聘 5 人，求至少有一个滥竽充数者的概率。

【解】　30 人中任意选择 5 人的方法有 $n=C_{30}^5$ 种，设 A 表示任意挑选的 5 人中至少有一个滥竽充数者这一事件

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{C_{28}^5}{C_{30}^5}=0.1310$$

【例 1.5】(库存管理问题)　工厂对库存进行管理，库存有 a 只次品，b 只正品，它们外观没有任何差异。现将产品随机地一只只进行检验，求第 k 次拿到的产品是次品的概率。$(1\leqslant k\leqslant a+b)$

【解】　第一种解法：将 a 只次品和 b 只正品都看成是不同的。若将摸出的产品依次放在排列成一直线的 $a+b$ 个位置上，则可能的排列总数为 $(a+b)!$，而有利场合数为 $a\times(a+b-1)!$，这是因为第 k 次摸出次品有 a 种取法，而另外的 $a+b-1$ 次抽取相当于将其余 $a+b-1$ 个产品进行全排列。故所求概率为

$$p=\frac{a\times(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}$$

第二种解法：把 a 只次品看作是无区别的，把 b 只正品也看作是无区别的。将摸出的产品依次放在排列成一直线的 $a+b$ 个位置上。因若将 a 只次品的位置固定，其他位置必然放正品。而次品的位置有 C_{a+b}^{a} 中放法。而有利场合数为 C_{a+b-1}^{a-1}。因而所求的概率便为

$$p=\frac{C_{a+b-1}^{a-1}}{C_{a+b}^{a}}=\frac{a}{a+b}$$

从此题也可以看出，如果考虑顺序，则分子分母都要考虑顺序；如果不考虑顺序，则分子分母都不考虑。

【例 1.6】(市场营销问题)　假设有 k 种不同的产品即将面世，每个产品等可能地放入 N 个展柜中($k\leqslant N$)，试求下列事件的概率(设展柜的容积为有限)：

(1) 某指定的 k 个展柜中各有一个产品；

(2) 某指定的一个展柜恰有 m 个产品($m\leqslant k$)；

(3) 某指定的一个展柜没有产品；

(4) 恰有 k 个展柜中各有一个产品。

【解】　将 k 个产品放入 N 个展柜中，总的放法有 N^k。设所求的四个事件分别为 A_1,A_2,A_3,A_4。

(1) 事件 A_1 的有利场合数为 $k!$ 因而

$$P(A_1)=\frac{k!}{N^k}$$

(2) 事件 A_2 的有利场合数为 $C_k^m(N-1)^{k-m}$，即先从 k 个产品中任选 m 个放入指定的这个展柜中，其余的 $k-m$ 个产品每个产品的放法都有 $N-1$ 种。因而

$$P(A_2)=\frac{C_k^m(N-1)^{k-m}}{N^k}$$

(3) 事件 A_3 的有利场合数为$(N-1)^k$，即每个产品的放法只有 $N-1$ 种。因而

$$P(A_3)=\frac{(N-1)^k}{N^k}$$

(4) 事件 A_4 的有利场合数为 $C_N^k k!$，即先从 N 个展柜中选定 k 个展柜，并使每一个展柜中恰好有一个产品。从而

$$P(A_4)=\frac{C_N^k k!}{N^k}$$

该问题是一个经典的概率问题。假若将每个人的生日看成是产品，而将一年的 365 天看成是展柜，那么选取 k 个人，他们生日均不相同的概率为

$$p=\frac{C_{365}^k k!}{365^k}$$

$k=64$ 时，$p\approx 0.003$，即任取 64 个人，任何两人生日都不相同的概率接近于 0。

【例 1.7】(市场营销问题)　商场举办促销活动，消费一定金额的顾客可以从装有 0，1，2，3 这四个数字球的盒子中先后不放回地摸球三次，如果第一次不摸到 0，且最后一次

摸到偶数号球，则可以中奖，求某顾客按游戏规则能中奖的概率。

【解】 设 A 表示事件"第一次不摸到 0 且最后一次摸到偶数"，以 A_1 表示"最后一次摸到 0"，以 A_2 表示"第一次不摸到 0 且最后一次摸到 2"。所以

$$P(A_1)=\frac{3!}{4!}=\frac{1}{4},\quad P(A_2)=\frac{2\times 2}{4!}=\frac{1}{6}$$

而 $A=A_1\cup A_2$，且 $A_1\cap A_2=\varnothing$，所以

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$$

1.5 条件概率

1.5.1 定义

某一事件的发生常常会影响与之相关的事件的发生。例如，美国股票市场的涨跌会影响欧洲股票市场；股票涨跌会影响基金的收益；经济形势会对电影业产生影响等。我们经常关心的是，如果知道某一事件已经发生的条件下，与其相关的另一事件发生的可能性有多大。例如，在一批产品中任取一件，已知其为合格品，问其是优质品的概率；已知某人成绩及格，问其是优秀的概率等均为条件概率问题。

【例 1.8】(质量管理问题) 设 100 件产品中有 70 件一等品，20 件二等品，规定一、二等品均为合格品。从中任取一件，求：(1)取得一等品的概率；(2)已知取得的是合格品，求它是一等品的概率。

【解】 设 A 为取得一等品，B 为取得合格品，则由于 100 件产品中有 70 件一等品，因而

$$P(A)=\frac{70}{100}$$

因为 90 件合格品中有 70 件一等品，所以已经知道取得的一件产品是合格品的条件下，它是一等品的概率(记作 $P(A|B)$)

$$P(A\mid B)=\frac{70}{90}$$

从上例可以看出，给出一个事件 B 已经发生的条件下，A 事件发生的概率与不给出任何条件下 A 发生的概率是不同的。

对上式进行简单的变换，得

$$P(A\mid B)=\frac{70}{90}=\frac{\text{在 }B\text{ 发生的条件下 }A\text{ 包含的样本点数}}{\text{在 }B\text{ 发生的条件下样本点数}}$$

$$=\frac{AB\text{ 包含的样本点数}}{B\text{ 包含的样本点数}}$$

$$=\frac{AB\text{ 包含的样本点数 / 总数}}{B\text{ 包含的样本点数 / 总数}}$$