高教版考试用书
www.eduexam.com.cn

2013

考研数学大纲配套1000题

● 全国硕士研究生入学统一考试辅导用书编委会

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高教版考试用书
www.eduexam.com.cn

考研
数学大纲
配套1000题

2013

2013 KAOYAN SHUXUE
DAGANG PEITAO 1000 TI

● 全国硕士研究生入学统一考试
辅导用书编委会
● 主 编 王 莉
● 编 者 梁帮助 孙利民
张新军 朱 杰

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书由经验丰富的考研辅导专家根据全面调整后的《2013年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》、《2013年全国硕士研究生入学统一考试数学考试参考书》（原《大纲解析》升级版）编写，将大纲和大纲解析中的考点、重点和难点与试题结合，使考生在学习《大纲》、《考试参考书》后通过难易适度的练习题达到检测复习效果、巩固基础、掌握重点、提高解题能力的目的，真正实现记、练、用的结合。

复习建议

在开始复习的时候，最好把本书对照《2013年全国硕士研究生入学统一考试数学考试参考书》复习，看一章即做一章相应的练习，以检测复习效果，帮助理解和掌握考点。本书可贯穿复习始终，前期可以作为同步训练，后期用于强化训练。

图书在版编目（CIP）数据

2013 考研数学大纲配套 1000 题/全国硕士研究生入学统一考试辅导用书编委会编. --北京：高等教育出版社，2012.9

ISBN 978-7-04-035934-3

Ⅰ.①2… Ⅱ.①全… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 188683 号

策划编辑 刘 佳　责任编辑 雷旭波 张耀明　封面设计 王 洋　版式设计 于 婕
责任校对 金 辉　责任印制 张泽业

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	中国农业出版社印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	26	版　　次	2012 年 9 月第 1 版
字　　数	630 千字	印　　次	2012 年 9 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	48.00 元

物 料 号　35934-00

前　　言

为了帮助有志于报考硕士学位研究生的广大同学全面、系统、深入、高效地复习数学课程，提高考研应试能力，并为今后研究生学业奠定坚实的数学基础，作者根据教育部考试中心最新颁布的《数学考试大纲》，结合作者多年在全国各地辅导班的授课经验，以作者的考研辅导讲义为蓝本，切实考虑到考研学子的不同需求，编写了**《考研数学复习教程》(包括高等数学、线性代数、概率论与数理统计等分册)**、**《考研数学基础过关500题》**、**《考研数学大纲配套1000题》**、**《考研数学10年真题解析》**以及**《考研数学全真模拟10套卷》**等系列丛书。其中**《考研数学基础过关1000题》**适宜于复习前期配合教材使用——夯实基础；**《考研数学复习教程》**与**《考研数学大纲配套1000题》**适宜于复习中期攻坚阶段使用——强化解题定式训练，培养解题能力；**《考研数学10年真题解析》**与**《考研数学全真模拟10套卷》**适宜于后期使用——模拟演练、巩固提高。考生可根据自己的具体情况选用。

本书**《考研数学大纲配套1000题》**的结构及特点如下：

一、常考问题与方法技巧——本部分是本书的精华也是本书最大的特色：在对历年试题研读的基础上，详细归纳总结了每部分考过的以及可能考到的各类问题，抛开其表面形式，剖析出其本质特征，给出了每类问题的快捷有效的处理方法，并注重每类问题的各种变式，使读者能够见到题目就知从哪入手，并快速准确求解。

二、单元检测——本部分按照考研试卷“选择题”、“填空题”、“解答题”的题型顺序精选编排了适量的经典习题，其中一部分是作者亲自命制的。这些题目几乎涵盖了考研数学所涉及的所有问题，难易程度十分贴近考研真题，有的略高于真题，而且考查的知识点尽量不重复，望读者完成。

本书适用于考研数学的各个卷种，包括数学一、数学二、数学三以及农学门类联考数学等，其内容上的差异，书中有详细标注，请读者阅读时注意。

在编写本书过程中，作者参考了许多教材和有关著作，引用了其中的一些例子，恕不一一列出，在此谨向有关作者致谢。

鉴于作者水平有限，书中疏漏之处在所难免，恳请同行专家和读者批评指正。

作者

2012年8月

目　录

第一部分　高等数学

第二部分　线性代数

第三部分　概率论与数理统计

第一部分　高等数学

第一章　函数、极限与连续

一、常考问题与方法技巧

1. 考查函数各种特性的问题

方法技巧

考查函数$f(x)$的各种特性，即单调性、奇偶性、周期性、有界性等. 对于单调性，可利用$f'(x)$的符号判定(利用定义判定函数单调性的题目，考研一般不会考). 对于奇偶性和周期性，一般用定义或运算性质及相关的结论进行判定. 对于有界性，简单情形可将函数取绝对值，然后进行放缩，一般情况下则是利用函数的连续性和求区间端点处的极限来判定. 当然，若能求出$f(x)$在区间I上的最大(小)值，也可知$f(x)$在I上有上(下)界.

例 1.1　下列命题中错误的是

(A) 定义在区间$(-l,l)$ $(l>0)$内的任何函数均可表示为一个奇函数和一个偶函数之和.

(B) 一个奇函数与一个偶函数构成的复合函数必为偶函数.

(C) 周期函数为有界函数.

(D) 严格单调的函数必具有反函数.

解　对于选项(A)，对任何定义在$(-l,l)$内的函数$f(x)$，若令$g(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$，$h(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$，易证$g(x)$为奇函数，$h(x)$为偶函数，且$f(x)=g(x)+h(x)$，可排除(A).

对于选项(B)，若$f(u)$为奇函数，$g(x)$为偶函数，则$f[g(-x)]=f[g(x)]$，即$f[g(x)]$为偶函数；又若$f(u)$为偶函数，$g(x)$为奇函数，则$f[g(-x)]=f[-g(x)]=f[g(x)]$，即$f[g(x)]$亦为偶函数，故可排除(B).

对于选项(C)，若取$f(x)=\tan x$，则$f(x)$为周期函数，但$f(x)$是无界函数，应选(C).

例 1.2　函数$f(x)=\dfrac{(e^x-1)\sin(x-1)\arctan\frac{1}{x}}{x(x-1)^2(x-2)^3}$的有界区间是

(A) $(-1,0)$.　　(B) $(0,1)$.　　(C) $(1,2)$.　　(D) $(2,3)$.

分析　函数$f(x)$在备选答案中的各开区间内是连续的，为此只需求出$f(x)$在各区间端点处的极限或单侧极限，就可确定$f(x)$在哪个区间上有界.

解　$f(x)$在$x=-1$和$x=3$处连续，又因

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=-\frac{\pi}{16}\sin 1,\ \lim_{x\to0^+}f(x)=\frac{\pi}{16}\sin 1,$$
$$\lim_{x\to1}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to2}f(x)=\infty,$$

故$f(x)$在$(-1,0)$内有界，应选(A).

注　若$f(x)$在开区间(a,b)内连续，且极限$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$与$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$都存在，则$f(x)$在$(a,b)$内有界.

例 1.3　设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内是连续的偶函数，证明$F(x)=\int_0^x(x-t)f(t)\,dt$也是偶函数.

分析　利用偶函数的定义和定积分的换元积分法加以证明.

证　因$f(x)$为偶函数,则$f(-x)=f(x)$,所以

$$F(-x)=\int_0^{-x}(-x-t)f(t)\,\mathrm{d}t \xlongequal{t=-u} \int_0^{x}(-x+u)f(-u)\,\mathrm{d}(-u)$$
$$=\int_0^{x}(x-u)f(u)\,\mathrm{d}u=F(x),$$

即$F(x)$为偶函数.

2. 求极限问题

方法技巧

极限问题的表现形式很多,如数列的极限、函数的极限及其各种变式,包括讨论函数的连续性、可导性以及级数的收敛性等问题中,其关键运算都是求极限. 这些形式繁多的极限问题其实只有两大类:未定式与非未定式(大多数是未定式),求解的基本思路是先确定所求极限的类型,然后选用相应的方法.

解题定式　见到求极限问题,就要先定型后定法,求解过程中随时要"四化"——见到无穷小因子就用等价无穷小量简化;见到幂指函数就"指数对数化",即$u^v=e^{v\ln u}$;见到无理式的"0"因子或"$\infty-\infty$"因子就有理化;见到非零极限因子就"淡化"(极限不为零的因子随时求出来).

(1) 未定式极限问题

类型1 "$\frac{0}{0}$"型	[具体方法] ① 洛必达法则. 这是求解"$\frac{0}{0}$"型未定式极限的基本方法,但一定要先"四化"处理. ② 泰勒公式. 适用于所求极限中含有e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$, $\ln(1+x)$, $\arctan x$等情形,尤其当洛必达法则失效时更要记得使用泰勒公式. ③ 导数定义. 适用于含抽象函数$f(x)$的增量比,且已知$f(x)$可导或在某点可导的情形. ④ 重要极限以及变量代换.

例 1.4　求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x^3}-1}{x\ln(1+2x^2)}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\dfrac{1+\cos x}{2}\right)^x-1}{x\ln(1+x^2)}$;

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln[\cos(x-1)]}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}$.

分析　这四个极限都是"$\frac{0}{0}$"型未定式,可利用等价无穷小量替换和洛必达法则求之.

解　(1) 因为当$u\to0$时,$\sqrt{1+u}-1\sim\dfrac{u}{2}$,$\ln(1+u)\sim u$,故

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x\ln(1+2x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{-\dfrac{x^3}{2}}{x\cdot2x^2}=-\frac{1}{4}.$$

(2) 因为当$u\to0$时,

$$e^u-1\sim u,\ \ln(1+u)\sim u,\ \cos u-1\sim-\frac{u^2}{2},$$

又$\left(\dfrac{1+\cos x}{2}\right)^x=e^{x\ln\frac{1+\cos x}{2}}$,故

$$\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^x-1}{x\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x\ln\frac{1+\cos x}{2}}-1}{x\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{x\ln\frac{1+\cos x}{2}}{x\cdot x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{2}\right)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\cos x-1}{2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^2}{4}}{x^2}=-\frac{1}{4}.$$

（3）因
$$(x^x)'=(e^{x\ln x})'=e^{x\ln x}(\ln x+1)=x^x(\ln x+1),$$
由洛必达法则，得

$$\lim_{x\to1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{1-x^x(\ln x+1)}{-1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{-x^x(\ln x+1)^2-x^x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=2.$$

（4）由洛必达法则得

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln[\cos(x-1)]}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{\cos(x-1)}[-\sin(x-1)]}{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{\cos\frac{\pi}{2}x}$$

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{\cos(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}=-\frac{4}{\pi^2}.$$

注　本题也可利用等价无穷小量替换先处理一下分子，再用洛必达法则. 请读者思考.

例 1.5　求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x(x-t)\sin t^2\mathrm{d}t}{(x^2-x^3)(1-\sqrt{1-x^2})}$.

分析　这个极限涉及变限积分，由于被积函数中含 x，要先将其分离；分母则用等价无穷小量替换.

解　因
$$\int_0^x(x-t)\sin t^2\mathrm{d}t=x\int_0^x\sin t^2\mathrm{d}t-\int_0^x t\sin t^2\mathrm{d}t,$$
由等价无穷小量替换和洛必达法则，可得

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x(x-t)\sin t^2\mathrm{d}t}{(x^2-x^3)(1-\sqrt{1-x^2})}=\lim_{x\to0}\frac{x\int_0^x\sin t^2\mathrm{d}t-\int_0^x t\sin t^2\mathrm{d}t}{x^2(1-x)\cdot\frac{x^2}{2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\int_0^x\sin t^2\mathrm{d}t-\int_0^x t\sin t^2\mathrm{d}t}{\frac{x^4}{2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\sin t^2\mathrm{d}t}{2x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{6x^2}=\frac{1}{6}.$$

例 1.6　a,b,c 为何值时，下式成立？

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{\sin x-ax}\int_b^x\frac{t^2\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}=c.$$

分析　这是一个求极限中的参数问题，要逐步分析参数应满足的条件.

解　注意到左边的极限中，无论 a 为何值，总有分母趋于零，因此要想极限存在，分子必须为无穷小量，于是可知必有 $b=0$. 当 $b=0$ 时，由洛必达法则得

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{\sin x-ax}\int_0^x\frac{t^2\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{(\cos x-a)\sqrt{1+x^2}},$$

由上式可知，当 $x\to0$ 时，若 $a\neq1$，则此极限存在，且其值为 0；若 $a=1$，则

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{\sin x-x}\int_0^x\frac{t^2\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{(\cos x-1)\sqrt{1+x^2}}=-2.$$

综上所述,得到如下结论:要使题中极限式成立,必有

$$a\neq1,b=0,c=0 \text{ 或 } a=1,b=0,c=-2.$$

例 1.7 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[2x+\ln(1-2x)]}$.

分析 利用泰勒公式求解.

解 因为

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4),$$

$$\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4),$$

$$\ln(1-2x)=-2x-\frac{1}{2}(-2x)^2+o(x^2)=-2x-2x^2+o(x^2),$$

所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[2x+\ln(1-2x)]}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)-\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)\right]}{x^2[2x-2x-2x^2+o(x^2)]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{-2x^4+o(x^4)}=\frac{1}{24}.$$

例 1.8 已知极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\arctan x-\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{x^n}=c\neq0$,试确定常数 n 和 c 的值.

分析 这是求极限中的参数问题,可以利用洛必达法则或泰勒公式计算.

解法 1 由洛必达法则,得

$$\lim_{x\to0}\frac{2\arctan x-\ln\frac{1+x}{1-x}}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{1+x^2}-\frac{2}{1-x^2}}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to0}\frac{-4x^2}{nx^{n-1}(1-x^4)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-4}{nx^{n-3}(1-x^4)}=c\neq0,$$

故有

$$n=3,c=-\frac{4}{3}.$$

解法 2 由泰勒公式,有

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

故

$$2\arctan x-\ln\frac{1+x}{1-x}=2\arctan x-\ln(1+x)+\ln(1-x)=-\frac{4}{3}x^3+o(x^3),$$

由此可得

$$n=3,c=-\frac{4}{3}.$$

例 1.9 设函数$f(x)$在 $x=0$ 的某邻域内连续,且$f(0)=0$, $f'(0)=2$,求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1-\cos x)}{1-\sqrt{\cos x}}$.

分析 这是“$\dfrac{0}{0}$”型未定式,由题设条件可知应将所求极限转化为函数$f(x)$在 $x=0$ 处导数的定义式,而分母则要有理化.

解
$$\lim_{x\to0}\frac{f(1-\cos x)}{1-\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to0}\frac{f(1-\cos x)(1+\sqrt{\cos x})}{1-\cos x}=2\lim_{x\to0}\frac{f(1-\cos x)}{1-\cos x}$$
$$=2\lim_{x\to0}\frac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}=2f'(0)=4.$$

例 1.10　设 $f(x)$ 具有连续导数,求极限 $\lim\limits_{a\to0^+}\dfrac{1}{a^2}\displaystyle\int_{-a}^{a}[f(t+a)-f(t-a)]\mathrm{d}t$.

分析　这是"$\dfrac{0}{0}$"型未定式,若用洛必达法则,由于极限式涉及积分的被积函数中含有 a,所以需要先换元,比较麻烦,为此可以先考虑利用积分中值定理.

解　由积分中值定理可知,存在 $\xi\in[-a,a]$,使
$$\int_{-a}^{a}[f(t+a)-f(t-a)]\mathrm{d}t=2a[f(\xi+a)-f(\xi-a)],$$
再由微分中值定理可知,存在 $\eta\in(\xi-a,\xi+a)$,使
$$f(\xi+a)-f(\xi-a)=2af'(\eta).$$
由夹逼定理可知,当 $a\to0^+$ 时,$\xi\to0,\eta\to0$,故
$$\lim_{a\to0^+}\frac{1}{a^2}\int_{-a}^{a}[f(t+a)-f(t-a)]\mathrm{d}t=4\lim_{a\to0^+}f'(\eta)=4\lim_{\eta\to0}f'(\eta)=4f'(0).$$

例 1.11　已知 $f(x)$ 在 $x=6$ 的某邻域内可导,且 $f(6)=0$,$\lim\limits_{x\to6}f'(x)=2012$,求极限 $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{\displaystyle\int_6^x\left[t\int_t^6f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t}{(6-x)^3}$.

分析　分子涉及变限积分,故利用洛必达法则.

解
$$\lim_{x\to6}\frac{\displaystyle\int_6^x\left[t\int_t^6f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t}{(6-x)^3}=\lim_{x\to6}\frac{x\displaystyle\int_x^6f(u)\mathrm{d}u}{-3(6-x)^2}=-2\lim_{x\to6}\frac{\displaystyle\int_x^6f(u)\mathrm{d}u}{(6-x)^2}$$
$$=-2\lim_{x\to6}\frac{-f(x)}{-2(6-x)}=\lim_{x\to6}\frac{-f'(x)}{-1}=2012.$$

例 1.12　求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^{\sin x}}{\sin x-x\cos x}$.

分析　这是"$\dfrac{0}{0}$"型未定式,直接利用洛必达法则不易求出其极限,可以考虑先将分子变形,并利用等价无穷小量替换,然后再利用洛必达法则.

解　因 $x\to0$ 时,
$$\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^{\sin x}=\mathrm{e}^{\sin x}(\mathrm{e}^{\tan x-\sin x}-1)\sim\mathrm{e}^{\tan x-\sin x}-1\sim\tan x-\sin x,$$
故
$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^{\sin x}}{\sin x-x\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin x-x\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{\sin x-x\cos x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\dfrac{x^2}{2}}{\sin x-x\cos x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x^3}{\sin x-x\cos x}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{3x^2}{x\sin x}=\frac{3}{2}.$$

例 1.13　求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x[\sin x-\sin(\sin x)]}{x^4}$.

分析　先利用变量代换,再利用泰勒公式或洛必达法则.

解　令 $\sin x=t$，则当 $x\to0$ 时，$t\to0$，又 $\arcsin t\sim t$，故

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x[\sin x-\sin(\sin x)]}{x^4}=\lim_{t\to0}\frac{t(t-\sin t)}{(\arcsin t)^4}=\lim_{t\to0}\frac{t(t-\sin t)}{t^4}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t-\sin t}{t^3}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{t^3}{6}+o(t^3)}{t^3}=\frac{1}{6}.$$

类型 2　“$\frac{\infty}{\infty}$”型	[具体方法] ① 洛必达法则. 这是求解“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式极限的基本方法. 注意，分子、分母求导前要先“四化”处理. ② 找分子、分母的最高幂次项，同除之.

例 1.14　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(\tan 7x)}{\ln(\sin 2x)}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(1+t^2)e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{x}$，其中 $f(x)$ 连续，且周期为 T $(T>0)$，$\int_0^T f(x)\,dx=A$ $(A\neq0)$.

分析　这三个极限都是“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式.（1）和（2）题可以直接利用洛必达法则，（3）题则要利用周期函数的积分性质和夹逼定理求解.

解　(1)

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(\tan 7x)}{\ln(\sin 2x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\tan 7x}\cdot\sec^2 7x\cdot7}{\frac{1}{\sin 2x}\cdot\cos 2x\cdot2}=\lim_{x\to0^+}\frac{7\sin 2x}{2\tan 7x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{7\cdot2x}{2\cdot7x}=1.$$

(2)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(1+t^2)e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x^2)e^{x^2}}{(1+2x^2)e^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{1+2x^2}=\frac{1}{2}.$$

(3) 对充分大的 $x>0$，必存在 n 使 $nT\leqslant x<(n+1)T$，则

$$\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^{nT}f(t)\,dt+\int_{nT}^x f(t)\,dt=n\int_0^T f(t)\,dt+\int_0^{x-nT}f(t)\,dt$$

$$=nA+\int_0^{x-nT}f(t)\,dt.$$

因为 $f(x)$ 连续，所以 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ 在 $[0,T]$ 上连续，从而 $F(x)$ 有界，即存在 $M>0$，使 $\left|\int_0^{x-nT}f(t)\,dt\right|\leqslant M$，因此

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{x-nT}f(t)\,dt}{x}=0.$$

又

$$\frac{nA}{(n+1)T}\leqslant\frac{nA}{x}\leqslant\frac{nA}{nT},$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nA}{(n+1)T}=\lim_{n\to\infty}\frac{nA}{nT}=\frac{A}{T},$$

由夹逼定理知 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{nA}{x}=\dfrac{A}{T}$，故

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nA}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{x-nT}f(t)\,dt}{x}=\frac{A}{T}.$$

类型3 “$\infty-\infty$”型	［具体方法］ 将其恒等变形或利用变量代换先化为“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型，再求解.“$\infty-\infty$”型未定式只有三种表现形式，相应的处理方法如下： ① 分式差：通分. ② 根式差：有理化. ③ 既非分式差，也非根式差：令 $x=\frac{1}{t}$；或利用泰勒公式处理其中的“0”部分（如果有的话）.

例1.15 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{a}{x}-\left(\frac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right]\ (a\neq0)$；　　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$；

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$.

解 （1）$\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{a}{x}-\left(\frac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right]=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{a}{x}-\frac{\ln(1+ax)}{x^2}\right]+a^2\lim\limits_{x\to0}\ln(1+ax)$

$$=\lim_{x\to0}\frac{ax-\ln(1+ax)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{a-\frac{a}{1+ax}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{a^2x}{2x(1+ax)}=\frac{a^2}{2}.$$

（2）令 $x=\frac{1}{t}$，则

$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{t\to0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t-\left[t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right]}{t^2}=\frac{1}{2}.$$

（3）令 $x=\frac{1}{t}$，则

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})=\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{t}$$

$$\xlongequal{\text{有理化}}\lim_{t\to0^+}\frac{2t}{t(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t})}=1.$$

或

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})\xlongequal{\text{有理化}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=1.$$

例1.16 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$.

分析 先做变量代换 $x=\frac{1}{t}$，再利用泰勒公式求解.

解　令 $x=\frac{1}{t}$,则

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]=\lim_{t\to0^+}\frac{\left(1-t+\frac{t^2}{2}\right)e^t-\sqrt{1+t^6}}{t^3}.$$

因为分母为 t^3,只需将分子展开到 3 阶. 由泰勒公式得

$$e^t=1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+o(t^3),$$

$$\sqrt{1+t^6}=1+\frac{t^6}{2}+o(t^6)=1+o(t^3),$$

故

$$原式=\lim_{t\to0^+}\frac{\left(1-t+\frac{t^2}{2}\right)\left[1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+o(t^3)\right]-1+o(t^3)}{t^3}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{t^3}{6}+o(t^3)}{t^3}=\frac{1}{6}.$$

例 1.17　设 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=c$,求 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+1)-f(x-1)]$.

分析　当 $c\neq0$ 时,这也是一个"$\infty-\infty$"型未定式,可以利用微分中值定理及夹逼定理求解.

解　由微分中值定理,存在 $\xi\in(x-1,x+1)$,使

$$f(x+1)-f(x-1)=2f'(\xi).$$

注意到当 $x\to\infty$ 时,$\xi\to\infty$,从而

$$\lim_{x\to\infty}[f(x+1)-f(x-1)]=\lim_{x\to\infty}2f'(\xi)=\lim_{\xi\to\infty}2f'(\xi)=2c.$$

例 1.18　设 $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x+\sqrt{ax^2-bx+1})=\frac{1}{2}$,则 $a=$____,$b=$____.

解　令 $x=\frac{1}{t}$,则

$$\lim_{x\to-\infty}(3x+\sqrt{ax^2-bx+1})=\lim_{t\to0^-}\left(\frac{3}{t}+\sqrt{\frac{a}{t^2}-\frac{b}{t}+1}\right)=\lim_{t\to0^-}\frac{3-\sqrt{a-bt+t^2}}{t}$$

$$\xlongequal{a=9}\lim_{t\to0^-}\frac{3-\sqrt{9-bt+t^2}}{t}=3\lim_{t\to0^-}\frac{1-\sqrt{1-\frac{b}{9}t+\frac{t^2}{9}}}{t}$$

$$=3\lim_{t\to0^-}\frac{\frac{bt}{18}-\frac{t^2}{18}}{t}=\frac{b}{6}=\frac{1}{2}\quad\left(t\to0\text{ 时},1-\sqrt{1-\frac{b}{9}t+\frac{t^2}{9}}\sim\frac{bt}{18}-\frac{t^2}{18}\right),$$

故　$a=9,b=3$.

类型 4　"$\infty\cdot0$"型	[具体方法] ① 恒等变形成"$\frac{0}{0}$"或"$\frac{\infty}{\infty}$"型,"四化"处理,再用洛必达法则. ② 用等价无穷小量替换或泰勒公式处理其中的"0"部分.

例 1.19　求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\cot x\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}x^3\left(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\sin\frac{2}{x}\right)$.

解　(1)
$$\lim_{x\to 0}\cot x\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\tan x\sin x}\text{（等价无穷小量替换）}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\text{（泰勒公式）}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

(2) 令 $\frac{1}{x}=t$，则
$$\lim_{x\to\infty}x^3\left(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\sin\frac{2}{x}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t}{t^3}\text{（泰勒公式）}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{t-\frac{t^3}{6}+o(t^3)-\frac{1}{2}\left[2t-\frac{(2t)^3}{6}+o(t^3)\right]}{t^3}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3}{2}+o(t^3)}{t^3}=\frac{1}{2}.$$

例 1.20　$\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{x}\right)=$________.

解
$$\lim_{x\to 0}\cot x\left(\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x\tan^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sec^2 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\tan^2 x}{3x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{3x^2}=-\frac{1}{3}.$$

应填 $-\frac{1}{3}$.

例 1.21　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$.

分析　这是一个“$\infty\cdot 0$”型未定式，若化为“$\frac{\infty}{\infty}$”型不易求解，可以将其取对数，然后做变量替换化为“$\frac{0}{0}$”型.

解　令 $y=e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$，则
$$\ln y=x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x.$$

因为
$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right]\quad\left(\text{令 } x=\frac{1}{t}\right)$$
$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}$$
$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{-t}{1+t}}{2t}=-\frac{1}{2},$$

故
$$\lim_{x\to+\infty}e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=e^{-\frac{1}{2}}.$$