



高教版考试用书  
www.eduexam.com.cn

2013

# 考研 数学大纲 配套1000题

凭书后增值服务卡  
享超值服务

- 公共课在线测试题
- 名师答疑服务
- 在线课程试听
- 优惠订手机报及课程
- 最新权威图书资讯

● 全国硕士研究生入学  
统一考试辅导用书编委会



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS



高教版考试用书  
www.eduexam.com.cn

# 考研 数学大纲 配套1000题



2013

2013 KAOYAN SHUXUE  
DAGANG PEITAO 1000 TI

- 全国硕士研究生入学统一考试  
辅导用书编委会
- 主 编 王 莉
- 编 者 梁帮助 孙利民  
张新军 朱 杰



高等教育出版社·北京  
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

## 内容简介

本书由经验丰富的考研辅导专家根据全面调整后的《2013年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》、《2013年全国硕士研究生入学统一考试数学考试参考书》(原《大纲解析》升级版)编写,将大纲和大纲解析中的考点、重点和难点与试题结合,使考生在学习《大纲》、《考试参考书》后通过难易适度的练习题达到检测复习效果、巩固基础、掌握重点、提高解题能力的目的,真正实现记、练、用的结合。

## 复习建议

在开始复习的时候,最好把本书对照《2013年全国硕士研究生入学统一考试数学考试参考书》复习,看一章即做一章相应的练习,以检测复习效果,帮助理解和掌握考点。本书可贯穿复习始终,前期可以作为同步训练,后期用于强化训练。

## 图书在版编目(CIP)数据

2013 考研数学大纲配套 1000 题/全国硕士研究生入学统一考试辅导用书编委会编. --北京:高等教育出版社, 2012. 9

ISBN 978-7-04-035934-3

I. ①2… II. ①全… III. ①高等数学-研究生-入学考试-习题集 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 188683 号

策划编辑 刘 佳 责任编辑 雷旭波 张耀明 封面设计 王 洋 版式设计 于 婕  
责任校对 金 辉 责任印制 张泽业

出版发行 高等教育出版社  
社 址 北京市西城区德外大街 4 号  
邮政编码 100120  
印 刷 中国农业出版社印刷厂  
开 本 787mm×1092mm 1/16  
印 张 26  
字 数 630 千字  
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598  
网 址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.landracom.com>  
<http://www.landracom.com.cn>  
版 次 2012 年 9 月第 1 版  
印 次 2012 年 9 月第 1 次印刷  
定 价 48.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 35934-00

# 前 言

为了帮助有志于报考硕士学位研究生的广大同学全面、系统、深入、高效地复习数学课程,提高考研应试能力,并为今后研究生学业奠定坚实的数学基础,作者根据教育部考试中心最新颁布的《数学考试大纲》,结合作者多年在全国各地辅导班的授课经验,以作者的考研辅导讲义为蓝本,切实考虑到考研学子的不同需求,编写了《考研数学复习教程》(包括高等数学、线性代数、概率论与数理统计等分册)、《考研数学基础过关 500 题》、《考研数学大纲配套 1000 题》、《考研数学 10 年真题解析》以及《考研数学全真模拟 10 套卷》等系列丛书。其中《考研数学基础过关 1000 题》适宜于复习前期配合教材使用——夯实基础;《考研数学复习教程》与《考研数学大纲配套 1000 题》适宜于复习中期攻坚阶段使用——强化解题定式训练,培养解题能力;《考研数学 10 年真题解析》与《考研数学全真模拟 10 套卷》适宜于后期使用——模拟演练,巩固提高。考生可根据自己的具体情况选用。

本书《考研数学大纲配套 1000 题》的结构及特点如下:

一、常考问题与方法技巧——本部分是本书的精华也是本书最大的特色:在对历年试题研读的基础上,详细归纳总结了每部分考过的以及可能考到的各类问题,抛开其表面形式,剖析出其本质特征,给出了每类问题的快捷有效的处理方法,并注重每类问题的各种变式,使读者能够见到题目就知从哪入手,并快速准确求解。

二、单元检测——本部分按照考研试卷“选择题”、“填空题”、“解答题”的题型顺序精选编排了适量的经典习题,其中一部分是作者亲自命制的。这些题目几乎涵盖了考研数学所涉及的所有问题,难易程度十分贴近考研真题,有的略高于真题,而且考查的知识点尽量不重复,望读者完成。

本书适用于考研数学的各个卷种,包括数学一、数学二、数学三以及农学门类联考数学等,其内容上的差异,书中有详细标注,请读者阅读时注意。

在编写本书过程中,作者参考了许多教材和有关著作,引用了其中的一些例子,恕不一一列出,在此谨向有关作者致谢。

鉴于作者水平有限,书中疏漏之处在所难免,恳请同行专家和读者批评指正。

作者  
2012 年 8 月

## 郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010)58581897 58582371 58582231

反盗版举报传真 (010)82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法律事务部

邮政编码 100120

购书请拨打读者服务部电话：(010) 58581115/58581116/58581117/  
58581118

特别提醒：“中国教育考试网”<http://www.eduexam.com.cn>是高教版考试用书专用网站。网站本着真诚服务广大考生的宗旨，为考生提供名师导航、下载中心、在线练习、在线考试、图书订购、在线视频、考试手机报等多项增值服务。高教版考试用书配有本网站的增值服务卡，该卡为高教版考试用书正版书的专用标识，广大读者可凭此卡上的卡号和密码登录网站获取增值信息，并以此辨别图书真伪。

# 目 录

## 第一部分 高等数学

<b>第一章 函数、极限与连续</b> .....	1	3. 关于不定积分的综合题 .....	70
一、常考问题与方法技巧 .....	1	4. 关于定积分概念及性质的问题 .....	71
1. 考查函数各种特性的问题 .....	1	5. 关于变限积分的问题 .....	72
2. 求极限问题 .....	2	6. 利用基本积分公式及积分法计算	
3. 关于无穷小量阶的问题 .....	15	定积分的问题 .....	77
4. 判断函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续与		7. 几种重要类型被积函数的积分 .....	79
间断的问题 .....	18	8. 定积分证明问题 .....	82
5. 利用闭区间上连续函数的性质证明		9. 反常积分问题 .....	85
相关问题 .....	21	10. 求平面图形面积问题 .....	86
二、单元检测 .....	22	11. 求旋转体的体积及侧(表)面积问题 .....	88
<b>第二章 一元函数微分学</b> .....	29	12. 求平面曲线弧长问题 .....	89
一、常考问题与方法技巧 .....	29	13. 物理应用问题 .....	89
1. 考查导数、微分概念的问题 .....	29	二、单元检测 .....	90
2. 导数与微分的计算问题 .....	33	<b>第四章 向量代数与空间解析几何</b> .....	97
3. 求高阶导数的问题 .....	37	一、常考问题与方法技巧 .....	97
4. 利用导数求平面曲线的切线方程、法线		1. 向量及其运算问题 .....	97
方程问题 .....	42	2. 求平面与直线方程问题 .....	97
5. 利用罗尔定理证明中值问题 .....	43	3. 平面、直线的位置关系问题 .....	99
6. 利用拉格朗日中值定理证明中值问题 .....	45	4. 空间曲线、曲面与二次曲面问题 .....	100
7. 利用柯西中值定理证明中值问题 .....	47	二、单元检测 .....	100
8. 利用泰勒公式证明中值问题 .....	48	<b>第五章 多元函数微分学</b> .....	103
9. 函数的单调性、单调区间及极值问题 .....	49	一、常考问题与方法技巧 .....	103
10. 函数曲线的凹凸区间、拐点及渐近		1. 关于多元函数连续性、可导性及可	
线问题 .....	53	微性问题 .....	103
11. 方程实根(函数零点,两曲线交点)		2. 求多元复合函数的偏导数或全微分	
问题 .....	55	问题 .....	105
12. 不等式的证明问题 .....	57	3. 求由方程确定的隐函数的偏导数、	
13. 曲率与曲率半径的计算 .....	59	全微分问题 .....	108
14. 导数在经济中的应用(数学三要求) .....	60	4. 求多元函数无条件极值问题 .....	112
二、单元检测 .....	61	5. 求多元函数条件极值问题 .....	114
<b>第三章 一元函数积分学</b> .....	67	6. 求多元函数在闭区域上的最值问题 .....	116
一、常考问题与方法技巧 .....	67	7. 求方向导数与梯度问题 .....	117
1. 关于原函数与不定积分的基本概念		8. 求空间曲面的切平面与法线方程、空间	
性问题 .....	67	曲线的切线与法平面方程 .....	118
2. 不定积分的计算问题 .....	69	二、单元检测 .....	119

<b>第六章 多元函数积分学</b> .....	125	1. 判定数项级数收敛性问题 .....	156
一、常考问题与方法技巧 .....	125	2. 数项级数的相关证明题 .....	160
1. 考查二重积分的性质问题 .....	125	3. 数项级数求和问题 .....	161
2. 交换积分次序问题 .....	125	4. 求幂级数的收敛半径、收敛区间和 收敛域问题 .....	163
3. 利用基本方法计算二重积分问题 .....	127	5. 求幂级数的和函数与数项级数求和 问题 .....	167
4. 被积函数为分段函数或隐含分段函 数的二重积分问题 .....	131	6. 求函数的幂级数展开式问题 .....	171
5. 二重积分综合题 .....	134	7. 考查狄利克雷收敛定理问题 .....	175
6. 三重积分的计算问题 .....	135	8. 求函数的傅里叶级数展开式问题 .....	177
7. 重积分的应用问题 .....	138	二、单元检测 .....	178
8. 第一类曲线积分计算问题 .....	140	<b>第八章 常微分方程</b> .....	186
9. 第二类曲线积分计算问题 .....	141	一、常考问题与方法技巧 .....	186
10. 第一类曲面积分计算问题 .....	146	1. 求解一阶微分方程问题 .....	186
11. 第二类曲面积分计算问题 .....	147	2. 一阶常系数线性差分方程问题 .....	192
12. 曲线积分与曲面积分的应用问题 .....	149	3. 可降阶的高阶微分方程问题 .....	193
二、单元检测 .....	150	4. 求解高阶常系数线性微分方程问题 .....	194
<b>第七章 无穷级数</b> .....	156	二、单元检测 .....	199
一、常考问题与方法技巧 .....	156		

## 第二部分 线性代数

<b>第一章 行列式</b> .....	207	3. 考查数值型向量(组)的线性表示及 等价性问题 .....	237
一、常考问题与方法技巧 .....	207	4. 考查抽象型向量(组)的线性表示 问题 .....	240
1. 关于余子式、代数余子式问题 .....	207	5. 向量组的极大线性无关组与秩的 问题 .....	241
2. 数值型行列式的计算问题 .....	208	6. 考查向量空间的基、过渡矩阵以及 坐标等问题 .....	243
3. 抽象型行列式的计算问题 .....	211	二、单元检测 .....	245
4. 克拉默法则应用问题 .....	212	<b>第四章 线性方程组</b> .....	252
二、单元检测 .....	212	一、常考问题与方法技巧 .....	252
<b>第二章 矩阵</b> .....	216	1. 考查线性方程组解的判定、性质与结构 问题 .....	252
一、常考问题与方法技巧 .....	216	2. 有关基础解系的论证问题 .....	254
1. 有关矩阵基本运算的问题 .....	216	3. 数值型线性方程组求解问题 .....	256
2. 求数值型矩阵的逆矩阵问题 .....	219	4. 抽象型线性方程组求解问题 .....	259
3. 求抽象型矩阵的逆矩阵问题 .....	222	5. 求两个线性方程组的公共解的问题 .....	262
4. 讨论(证明)矩阵可逆性问题 .....	223	6. 讨论两个线性方程组解的关系问题 .....	263
5. 解矩阵方程问题 .....	225	二、单元检测 .....	265
6. 有关初等变换和初等矩阵问题 .....	227	<b>第五章 矩阵的特征值和特征向量</b> .....	273
7. 有关矩阵秩的问题 .....	228	一、常考问题与方法技巧 .....	273
二、单元检测 .....	229	1. 求数值型矩阵的特征值、特征向量 问题 .....	273
<b>第三章 向量</b> .....	233		
一、常考问题与方法技巧 .....	233		
1. 判别数值型向量组的线性相关性 问题 .....	233		
2. 判别抽象型向量组的线性相关性 问题 .....	234		

2. 求抽象型矩阵的特征值、特征向量问题 .....	275
3. 特征值、特征向量的逆问题 .....	276
4. 矩阵相似对角化问题 .....	279
5. 矩阵相似的判定问题 .....	280
6. 实对称矩阵的特征值、特征向量及相似对角化问题 .....	282
7. 特征值和特征向量的应用问题 .....	284
二、单元检测 .....	286

<b>第六章 二次型</b> .....	293
一、常考问题与方法技巧 .....	293
1. 考查二次型的秩及正、负惯性指数等基本概念性问题 .....	293
2. 化二次型为标准形问题 .....	294
3. 考查二次型或对称矩阵的正定性问题 .....	297
二、单元检测 .....	298

### 第三部分 概率论与数理统计

<b>第一章 随机事件与概率</b> .....	304
一、常考问题与方法技巧 .....	304
1. 考查随机事件的关系与运算及其逆问题 .....	304
2. 利用四种模型求概率问题 .....	308
3. 利用概率的公式、性质求概率问题 .....	314
二、单元检测 .....	317
<b>第二章 随机变量及其概率分布</b> .....	320
一、常考问题与方法技巧 .....	320
1. 考查随机变量的概率分布(分布律、概率密度、分布函数)的概念性问题及确定其中未知的参数 .....	320
2. 求随机变量的概率分布问题 .....	321
3. 利用已知概率分布求概率问题 .....	322
二、单元检测 .....	328
<b>第三章 多维随机变量及其分布</b> .....	333
一、常考问题与方法技巧 .....	333
1. 求二维随机变量的概率分布(联合分布、边缘分布、条件分布)及其中未知参数问题 .....	333
2. 利用已知二维概率分布求概率问题 .....	343
3. 求二维随机变量函数的分布问题 .....	346
二、单元检测 .....	354
<b>第四章 随机变量的数字特征</b> .....	359

一、常考问题与方法技巧 .....	359
1. 求随机变量的数学期望与方差问题 .....	359
2. 求随机变量函数的数学期望与方差问题 .....	363
3. 求协方差、相关系数及讨论随机变量相关性问题的 .....	368
4. 随机变量的不相关与独立 .....	371
5. 数字特征的应用 .....	376
二、单元检测 .....	378
<b>第五章 大数定律与中心极限定理</b> .....	381
常考问题与方法技巧 .....	381
1. 利用切比雪夫不等式估算概率问题 .....	381
2. 考查大数定律的问题 .....	382
3. 考查中心极限定理的问题 .....	384
<b>第六章 数理统计</b> .....	385
一、常考问题与方法技巧 .....	385
1. 求统计量的分布问题 .....	385
2. 求统计量的数字特征问题 .....	388
3. 求参数的点估计问题(矩法估计和最大似然估计) .....	389
4. 估计量的评选标准 .....	393
5. 区间估计(均值、方差的置信区间) .....	397
6. 假设检验 .....	398
二、单元检测 .....	400



# 第一部分 高等数学

## 第一章 函数、极限与连续

### 一、常考问题与方法技巧

#### 1. 考查函数各种特性的问题

##### 方法技巧

考查函数 $f(x)$ 的各种特性,即单调性、奇偶性、周期性、有界性等.对于单调性,可利用 $f'(x)$ 的符号判定(利用定义判定函数单调性的题目,考研一般不会考).对于奇偶性和周期性,一般用定义或运算性质及相关的结论进行判定.对于有界性,简单情形可将函数取绝对值,然后进行放缩,一般情况下则是利用函数的连续性和求区间端点处的极限来判定.当然,若能求出 $f(x)$ 在区间 $I$ 上的最大(小)值,也可知 $f(x)$ 在 $I$ 上有上(下)界.

例 1.1 下列命题中错误的是

- (A) 定义在区间 $(-l, l)$  ( $l > 0$ )内的任何函数均可表示为一个奇函数和一个偶函数之和.
- (B) 一个奇函数与一个偶函数构成的复合函数必为偶函数.
- (C) 周期函数为有界函数.
- (D) 严格单调的函数必具有反函数.

解 对于选项(A),对任何定义在 $(-l, l)$ 内的函数 $f(x)$ ,若令 $g(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$ ,  $h(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ ,易证 $g(x)$ 为奇函数, $h(x)$ 为偶函数,且 $f(x) = g(x) + h(x)$ ,可排除(A).

对于选项(B),若 $f(u)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数,则 $f[g(-x)] = f[g(x)]$ ,即 $f[g(x)]$ 为偶函数;又若 $f(u)$ 为偶函数, $g(x)$ 为奇函数,则 $f[g(-x)] = f[-g(x)] = f[g(x)]$ ,即 $f[g(x)]$ 亦为偶函数,故可排除(B).

对于选项(C),若取 $f(x) = \tan x$ ,则 $f(x)$ 为周期函数,但 $f(x)$ 是无界函数,应选(C).

例 1.2 函数 $f(x) = \frac{(e^x - 1) \sin(x-1) \arctan \frac{1}{x}}{x(x-1)^2(x-2)^3}$ 的有界区间是

- (A)  $(-1, 0)$ .      (B)  $(0, 1)$ .      (C)  $(1, 2)$ .      (D)  $(2, 3)$ .

分析 函数 $f(x)$ 在备选答案中的各开区间内是连续的,为此只需求出 $f(x)$ 在各区间端点处的极限或单侧极限,就可确定 $f(x)$ 在哪个区间上有界.

解  $f(x)$ 在 $x = -1$ 和 $x = 3$ 处连续,又因

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{16} \sin 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\pi}{16} \sin 1,$$
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \infty,$$

故 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内有界,应选(A).

注 若 $f(x)$ 在开区间 $(a, b)$ 内连续,且极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 都存在,则 $f(x)$ 在 $(a, b)$ 内有界.

例 1.3 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是连续的偶函数,证明 $F(x) = \int_0^x (x-t)f(t) dt$ 也是偶函数.

**分析** 利用偶函数的定义和定积分的换元积分法加以证明.

**证** 因  $f(x)$  为偶函数, 则  $f(-x)=f(x)$ , 所以

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_0^{-x} (-x-t)f(t) dt \stackrel{t=-u}{=} \int_0^x (-x+u)f(-u) d(-u) \\ &= \int_0^x (x-u)f(u) du = F(x), \end{aligned}$$

即  $F(x)$  为偶函数.

## 2. 求极限问题

### 方法技巧

极限问题的表现形式很多, 如数列的极限、函数的极限及其各种变式, 包括讨论函数的连续性、可导性以及级数的收敛性等问题中, 其关键运算都是求极限. 这些形式繁多的极限问题其实只有两大类: 未定式与非未定式(大多数是未定式), 求解的基本思路是先确定所求极限的类型, 然后选用相应的方法.

**解题定式** 见到求极限问题, 就要先定型后定法, 求解过程中随时要“四化”——见到无穷小因子就用等价无穷小量简化; 见到幂指函数就“指数对数化”, 即  $u^v = e^{v \ln u}$ ; 见到无理式的“0”因子或“ $\infty - \infty$ ”因子就有理化; 见到非零极限因子就“淡化”(极限不为零的因子随时求出来).

### (1) 未定式极限问题

#### 类型 1 “ $\frac{0}{0}$ ”型

[具体方法]

- ① 洛必达法则. 这是求解“ $\frac{0}{0}$ ”型未定式极限的基本方法, 但一定要先“四化”处理.
- ② 泰勒公式. 适用于所求极限中含有  $e^x, \sin x, \cos x, (1+x)^m, \ln(1+x), \arctan x$  等情形, 尤其当洛必达法则失效时更要记得使用泰勒公式.
- ③ 导数定义. 适用于含抽象函数  $f(x)$  的增量比, 且已知  $f(x)$  可导或在某点可导的情形.
- ④ 重要极限以及变量代换.

**例 1.4** 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x \ln(1+2x^2)};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^x - 1}{x \ln(1+x^2)};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-x^x}{1-x+\ln x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln[\cos(x-1)]}{1-\sin \frac{\pi}{2}x}.$$

**分析** 这四个极限都是“ $\frac{0}{0}$ ”型未定式, 可利用等价无穷小量替换和洛必达法则求之.

**解** (1) 因为当  $u \rightarrow 0$  时,  $\sqrt{1+u}-1 \sim \frac{u}{2}, \ln(1+u) \sim u$ , 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x \ln(1+2x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{2}}{x \cdot 2x^2} = -\frac{1}{4}.$$

(2) 因为当  $u \rightarrow 0$  时,

$$e^u - 1 \sim u, \ln(1+u) \sim u, \cos u - 1 \sim -\frac{u^2}{2},$$

又  $\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^x = e^{x \ln \frac{1+\cos x}{2}}$ , 故

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^x - 1}{x \ln(1+x^2)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln \frac{1+\cos x}{2}} - 1}{x \ln(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln \frac{1+\cos x}{2}}{x \cdot x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\cos x - 1}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x - 1}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{4}}{x^2} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(3) 因

$$(x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1),$$

由洛必达法则,得

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^x}{1 - x + \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^x (\ln x + 1)}{-1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^x (\ln x + 1)^2 - x^x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 2.$$

(4) 由洛必达法则得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln[\cos(x-1)]}{1 - \sin \frac{\pi}{2} x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\cos(x-1)} [-\sin(x-1)]}{-\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} x} = \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{\cos \frac{\pi}{2} x} \\ &= \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(x-1)}{-\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} x} = -\frac{4}{\pi^2}. \end{aligned}$$

注 本题也可利用等价无穷小量替换先处理一下分子,再用洛必达法则.请读者思考.

例 1.5 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t) \sin t^2 dt}{(x^2 - x^3)(1 - \sqrt{1 - x^2})}$ .

分析 这个极限涉及变限积分,由于被积函数中含  $x$ ,要将其分离;分母则用等价无穷小量替换.

解 因  $\int_0^x (x-t) \sin t^2 dt = x \int_0^x \sin t^2 dt - \int_0^x t \sin t^2 dt$ ,

由等价无穷小量替换和洛必达法则,可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t) \sin t^2 dt}{(x^2 - x^3)(1 - \sqrt{1 - x^2})} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x \sin t^2 dt - \int_0^x t \sin t^2 dt}{x^2(1-x) \cdot \frac{x^2}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x \sin t^2 dt - \int_0^x t \sin t^2 dt}{\frac{x^4}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{6x^2} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

例 1.6  $a, b, c$  为何值时,下式成立?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x - ax} \int_b^x \frac{t^2 dt}{\sqrt{1+t^2}} = c.$$

分析 这是一个求极限中的参数问题,要逐步分析参数应满足的条件.

解 注意到左边的极限中,无论  $a$  为何值,总有分母趋于零,因此要想极限存在,分子必须为无穷小量,于是可知必有  $b=0$ . 当  $b=0$  时,由洛必达法则得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x - ax} \int_0^x \frac{t^2 dt}{\sqrt{1+t^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(\cos x - a) \sqrt{1+x^2}},$$

由上式可知,当  $x \rightarrow 0$  时,若  $a \neq 1$ ,则此极限存在,且其值为 0;若  $a = 1$ ,则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x - x} \int_0^x \frac{t^2 dt}{\sqrt{1+t^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(\cos x - 1) \sqrt{1+x^2}} = -2.$$

综上所述,得到如下结论:要使题中极限式成立,必有

$$a \neq 1, b = 0, c = 0 \text{ 或 } a = 1, b = 0, c = -2.$$

**例 1.7** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2 [2x + \ln(1-2x)]}$ .

**分析** 利用泰勒公式求解.

**解** 因为

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4), \\ e^{-\frac{x^2}{2}} &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4), \\ \ln(1-2x) &= -2x - \frac{1}{2}(-2x)^2 + o(x^2) = -2x - 2x^2 + o(x^2), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2 [2x + \ln(1-2x)]} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right]}{x^2 [2x - 2x - 2x^2 + o(x^2)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^4}{12} + o(x^4)}{-2x^4 + o(x^4)} = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

**例 1.8** 已知极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arctan x - \ln \frac{1+x}{1-x}}{x^n} = c \neq 0$ , 试确定常数  $n$  和  $c$  的值.

**分析** 这是求极限中的参数问题,可以利用洛必达法则或泰勒公式计算.

**解法 1** 由洛必达法则,得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arctan x - \ln \frac{1+x}{1-x}}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1-x^2}}{nx^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4x^2}{nx^{n-1}(1-x^4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4}{nx^{n-3}(1-x^4)} = c \neq 0, \end{aligned}$$

故有

$$n = 3, c = -\frac{4}{3}.$$

**解法 2** 由泰勒公式,有

$$\begin{aligned} \arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + o(x^3), \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \\ \ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3), \end{aligned}$$

故

$$2 \arctan x - \ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \arctan x - \ln(1+x) + \ln(1-x) = -\frac{4}{3}x^3 + o(x^3),$$

由此可得

$$n = 3, c = -\frac{4}{3}.$$

**例 1.9** 设函数  $f(x)$  在  $x=0$  的某邻域内连续,且  $f(0)=0, f'(0)=2$ , 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-\cos x)}{1-\sqrt{\cos x}}$ .

**分析** 这是“ $\frac{0}{0}$ ”型未定式,由题设条件可知应将所求极限转化为函数  $f(x)$  在  $x=0$  处导数的定义式,而分母则要有理化.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-\cos x)}{1-\sqrt{\cos x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-\cos x)(1+\sqrt{\cos x})}{1-\cos x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-\cos x)}{1-\cos x} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x} = 2f'(0) = 4. \end{aligned}$$

**例 1.10** 设  $f(x)$  具有连续导数, 求极限  $\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{a^2} \int_{-a}^a [f(t+a) - f(t-a)] dt$ .

**分析** 这是“ $\frac{0}{0}$ ”型未定式, 若用洛必达法则, 由于极限式涉及积分的被积函数中含有  $a$ , 所以需要先换元, 比较麻烦, 为此可以先考虑利用积分中值定理.

**解** 由积分中值定理可知, 存在  $\xi \in [-a, a]$ , 使

$$\int_{-a}^a [f(t+a) - f(t-a)] dt = 2a[f(\xi+a) - f(\xi-a)],$$

再由微分中值定理可知, 存在  $\eta \in (\xi-a, \xi+a)$ , 使

$$f(\xi+a) - f(\xi-a) = 2af'(\eta).$$

由夹逼定理可知, 当  $a \rightarrow 0^+$  时,  $\xi \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$ , 故

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{a^2} \int_{-a}^a [f(t+a) - f(t-a)] dt = 4 \lim_{a \rightarrow 0^+} f'(\eta) = 4 \lim_{\eta \rightarrow 0} f'(\eta) = 4f'(0).$$

**例 1.11** 已知  $f(x)$  在  $x=6$  的某邻域内可导, 且  $f(6)=0, \lim_{x \rightarrow 6} f'(x)=2012$ , 求极限  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\int_6^x \left[ t \int_t^6 f(u) du \right] dt}{(6-x)^3}$ .

**分析** 分子涉及变限积分, 故利用洛必达法则.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\int_6^x \left[ t \int_t^6 f(u) du \right] dt}{(6-x)^3} &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x \int_x^6 f(u) du}{3(6-x)^2} = -2 \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\int_x^6 f(u) du}{(6-x)^2} \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 6} \frac{-f(x)}{-2(6-x)} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{-f'(x)}{-1} = 2012. \end{aligned}$$

**例 1.12** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{\sin x - x \cos x}$ .

**分析** 这是“ $\frac{0}{0}$ ”型未定式, 直接利用洛必达法则不易求出其极限, 可以考虑先将分子变形, 并利用等价无穷小量替换, 然后再利用洛必达法则.

**解** 因  $x \rightarrow 0$  时,

$$e^{\tan x} - e^{\sin x} = e^{\sin x} (e^{\tan x - \sin x} - 1) \sim e^{\tan x - \sin x} - 1 \sim \tan x - \sin x,$$

故

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{\sin x - x \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin x - x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x (1 - \cos x)}{\sin x - x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{x^2}{2}}{\sin x - x \cos x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin x - x \cos x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x \sin x} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

**例 1.13** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x [\sin x - \sin(\sin x)]}{x^4}$ .

**分析** 先利用变量代换, 再利用泰勒公式或洛必达法则.

解 令  $\sin x = t$ , 则当  $x \rightarrow 0$  时,  $t \rightarrow 0$ , 又  $\arcsin t \sim t$ , 故

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x [\sin x - \sin(\sin x)]}{x^4} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(t - \sin t)}{(\arcsin t)^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(t - \sin t)}{t^4} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^3}{6} + o(t^3)}{t^3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

### 类型 2 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型

[具体方法]

① 洛必达法则. 这是求解“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式极限的基本方法. 注意, 分子、分母求导前要先“四化”处理.

② 找分子、分母的最高幂次项, 同除之.

例 1.14 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\tan 7x)}{\ln(\sin 2x)}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (1+t^2)e^{t^2} dt}{xe^{x^2}};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x}, \text{ 其中 } f(x) \text{ 连续, 且周期为 } T (T > 0), \int_0^T f(x) dx = A (A \neq 0).$$

分析 这三个极限都是“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式. (1)和(2)题可以直接利用洛必达法则, (3)题则要利用周期函数的积分性质和夹逼定理求解.

$$\begin{aligned} \text{解 (1)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\tan 7x)}{\ln(\sin 2x)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\tan 7x} \cdot \sec^2 7x \cdot 7}{\frac{1}{\sin 2x} \cdot \cos 2x \cdot 2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{7 \sin 2x}{2 \tan 7x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{7 \cdot 2x}{2 \cdot 7x} = 1. \end{aligned}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (1+t^2)e^{t^2} dt}{xe^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+x^2)e^{x^2}}{(1+2x^2)e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2}{1+2x^2} = \frac{1}{2}.$$

(3) 对充分大的  $x > 0$ , 必存在  $n$  使  $nT \leq x < (n+1)T$ , 则

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt &= \int_0^{nT} f(t) dt + \int_{nT}^x f(t) dt = n \int_0^T f(t) dt + \int_0^{x-nT} f(t) dt \\ &= nA + \int_0^{x-nT} f(t) dt. \end{aligned}$$

因为  $f(x)$  连续, 所以  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  在  $[0, T]$  上连续, 从而  $F(x)$  有界, 即存在  $M > 0$ , 使  $\left| \int_0^{x-nT} f(t) dt \right| \leq M$ , 因此

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{x-nT} f(t) dt}{x} = 0.$$

又

$$\frac{nA}{(n+1)T} \leq \frac{nA}{x} \leq \frac{nA}{nT},$$

且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nA}{(n+1)T} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nA}{nT} = \frac{A}{T},$$

由夹逼定理知  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nA}{x} = \frac{A}{T}$ , 故

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nA}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{x-nT} f(t) dt}{x} = \frac{A}{T}.$$

**类型3** “ $\infty - \infty$ ”  
型

[具体方法] 将其恒等变形或利用变量代换先化为“ $\frac{0}{0}$ ”或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型,再求解.“ $\infty - \infty$ ”型未定式只有三种表现形式,相应的处理方法如下:

- ① 分式差:通分.
- ② 根式差:有理化.
- ③ 既非分式差,也非根式差:令  $x = \frac{1}{t}$ ;或利用泰勒公式处理其中的“0”部分(如果有的话).

**例 1.15** 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{a}{x} - \left( \frac{1}{x^2} - a^2 \right) \ln(1+ax) \right] \quad (a \neq 0); \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x - x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right];$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}).$$

解 (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{a}{x} - \left( \frac{1}{x^2} - a^2 \right) \ln(1+ax) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{a}{x} - \frac{\ln(1+ax)}{x^2} \right] + a^2 \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+ax)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \ln(1+ax)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \frac{a}{1+ax}}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 x}{2x(1+ax)} = \frac{a^2}{2}.$$

(2) 令  $x = \frac{1}{t}$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x - x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \left[ t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \right]}{t^2} = \frac{1}{2}.$$

(3) 令  $x = \frac{1}{t}$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+t} - \sqrt{1-t}}{t}$$

$$\stackrel{\text{有理化}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2t}{t(\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t})} = 1.$$

或

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}) \stackrel{\text{有理化}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}}} = 1.$$

**例 1.16** 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6+1} \right]$ .

分析 先做变量代换  $x = \frac{1}{t}$ , 再利用泰勒公式求解.

解 令  $x = \frac{1}{t}$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1} \right] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\left( 1 - t + \frac{t^2}{2} \right) e^t - \sqrt{1 + t^6}}{t^3}.$$

因为分母为  $t^3$ , 只需将分子展开到 3 阶. 由泰勒公式得

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3),$$

$$\sqrt{1 + t^6} = 1 + \frac{t^6}{2} + o(t^6) = 1 + o(t^3),$$

故

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\left( 1 - t + \frac{t^2}{2} \right) \left[ 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3) \right] - 1 + o(t^3)}{t^3} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{t^3}{6} + o(t^3)}{t^3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

例 1.17 设  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = c$ , 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+1) - f(x-1)]$ .

分析 当  $c \neq 0$  时, 这也是一个“ $\infty - \infty$ ”型未定式, 可以利用微分中值定理及夹逼定理求解.

解 由微分中值定理, 存在  $\xi \in (x-1, x+1)$ , 使

$$f(x+1) - f(x-1) = 2f'(\xi).$$

注意到当  $x \rightarrow \infty$  时,  $\xi \rightarrow \infty$ , 从而

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+1) - f(x-1)] = \lim_{x \rightarrow \infty} 2f'(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} 2f'(\xi) = 2c.$$

例 1.18 设  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + \sqrt{ax^2 - bx + 1}) = \frac{1}{2}$ , 则  $a = \underline{\quad}$ ,  $b = \underline{\quad}$ .

解 令  $x = \frac{1}{t}$ , 则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + \sqrt{ax^2 - bx + 1}) &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \left( \frac{3}{t} + \sqrt{\frac{a}{t^2} - \frac{b}{t} + 1} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{3 - \sqrt{a - bt + t^2}}{t} \\ &\stackrel{a=9}{=} \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{3 - \sqrt{9 - bt + t^2}}{t} = 3 \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{b}{9}t + \frac{t^2}{9}}}{t} \\ &= 3 \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\frac{bt}{18} - \frac{t^2}{18}}{t} = \frac{b}{6} = \frac{1}{2} \quad \left( t \rightarrow 0 \text{ 时}, 1 - \sqrt{1 - \frac{b}{9}t + \frac{t^2}{9}} \sim \frac{bt}{18} - \frac{t^2}{18} \right), \end{aligned}$$

故  $a=9, b=3$ .

#### 类型 4 “ $\infty \cdot 0$ ” 型

[具体方法]

- ① 恒等变形成“ $\frac{0}{0}$ ”或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型, “四化”处理, 再用洛必达法则.
- ② 用等价无穷小量替换或泰勒公式处理其中的“0”部分.

例 1.19 求下列极限:

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \cot x \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$ ;

(2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left( \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \sin \frac{2}{x} \right)$ .



$$\begin{aligned}
 \text{解 (1)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cot x \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \tan x \sin x} \quad (\text{等价无穷小量替换}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad (\text{泰勒公式}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

(2) 令  $\frac{1}{x} = t$ , 则

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left( \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \sin \frac{2}{x} \right) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - \frac{1}{2} \sin 2t}{t^3} \quad (\text{泰勒公式}) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \frac{t^3}{6} + o(t^3) - \frac{1}{2} \left[ 2t - \frac{(2t)^3}{6} + o(t^3) \right]}{t^3} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^3}{2} + o(t^3)}{t^3} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

例 1.20  $\lim_{x \rightarrow 0} \cot x \left( \frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cot x \left( \frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x \tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sec^2 x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\tan^2 x}{3x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{3x^2} = -\frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

应填  $-\frac{1}{3}$ .

例 1.21 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2}$ .

分析 这是一个“ $\infty \cdot 0$ ”型未定式, 若化为“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型不易求解, 可以将其取对数, 然后做变量替换化为“ $\frac{0}{0}$ ”型.

$$\text{解} \quad \text{令 } y = e^{-x} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2}, \text{ 则} \quad \ln y = x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) - x.$$

$$\begin{aligned}
 \text{因为} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln y &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) - x \right] \quad (\text{令 } x = \frac{1}{t}) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+t} - 1}{2t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-t}{1+t} = -\frac{1}{2},
 \end{aligned}$$

$$\text{故} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2} = e^{-\frac{1}{2}}.$$