高等工程數學

上冊

編著者 袁定培

東華書局印行

高等工程數學

上　册

編著者

袁　定　培

東華書局印行

中華民國五十八年十一月初版
中華民國六十七年 十月六版

大學用書 高等工程數學（全二冊）

上冊 定價 平裝 新臺幣 玖 拾 元整
精裝 新臺幣壹百貳拾元整
（外埠酌加運費匯費）

編著者 袁 定 培

發行人 卓 鑫 淼
出版者 臺灣東華書局股份有限公司
臺北市博愛路一〇五號
電話：3819470 郵撥：6481
印刷者 中 臺 印 刷 廠
臺中市公園路三十七號

行政院新聞局登記證 局版臺業字第零柒貳伍號
（58004）

劉　　序

民國五十三年，袁定培教授訪問美國加州大學，及加州理工學院，參與兩校力學研究，深感數學在近代工程研究上應用日廣而愈深，且國內又缺乏合適教本，是以在加州一年，工作之餘，即開始編撰此書，而筆者適亦講授同樣課程，獲得切磋機會。

工程數學教本內容每因作者而異，雖有若干"標準"教材，但深度和範圍也各不相同。袁教授認為目前國內一般學生，閱讀外文課本往往不如中文教材方便；外國工程數學書籍，多將應用問題納入實驗課程，並未加以特別注重；且市面流行原文教本亦各有短長，因此綜合取材，宜特別重視應用和舉例，由於機械，電機研究使用數學較多，加上作者十年教學經驗及心得，自然注重這兩類重要問題，但一般工程上的例子也能兼顧，習題固多，範圍亦廣。全書二冊，正適合國內學者需要。

中華民國五十七年九月

劉　炯　炎

加州大學

上册自序

工程數學所包括之範圍，至爲廣泛，有關之原文書籍，亦甚繁多。欲求一包羅萬象，巨細靡遺者，殊屬不易，事實上，即令可能，勢將卷帙浩繁。故著者對於題材之取捨，莫不煞費周章，結果仍難免有遺珠之憾。爲儘可能包含各類重要課題，且不使篇幅過於累贅起見。本書決定分爲上下兩册，足符二至三學期教學或參考之用。

有關工程數學之原文書籍雖多，而完善之中文課本，則極爲缺乏，但一般讀者因英文根柢較差，研讀時頗感吃力，故彌補是項缺點，亦爲本書編撰之主要動機。

本書編者對工程數學有十年以上之教學經驗及心得，深知學生心理及需要，對於各種工程及物理方面之應用問題(包括例題及習題)，蒐羅至爲豐富，闡釋不厭求詳，務使讀者能獲充分之了解，是爲本書之一大特色。

本書上册共分九章，每章各有其獨立之特性，教師可斟酌學生之實際需要緩急，自行訂定講授之先後秩序。大致而言，第一、二、三、三章介紹常微分方程式之正規解法及一般應用，第五章則特別強調導致次階微分方程式之機械及電氣系統之相似對應性，並求得其詳解及物理意義。此四章似以合成一組較爲適當。第四章之有限差分及差分方程式，係介紹數值分析之基本概念及方法，自另成一獨立課題。第九章之無限級數，如與第六章之符立爾級數合併講授，其效果當更顯著(但無此必要)。又符立爾積分，係由符立爾級數演變而來，而拉氏變換，則由符立爾變換式所導出，故按第六、七兩章之先後秩序排列，較爲合理。此外第八章之偏微分方程式，係繼常微分方程式以後之一獨立而極重要之題目。

在本書中，編者常隨時摻以個人心得，例如第 6-7 節中循環函數之連續性，與其符立爾級數收斂速度之關係；第 7-8 節中奇特函數之應用；以及第 8-7 節中利用多次拉氏變換運算法，求解偏微分方程式等，頗具實用之價值。

本書二册，適合大學及獨立工學院二至三學期工程數學教學及參考之用，需先對微積分，普通物理，及工程力學等具有穩固之基礎。根據作者之教學經驗，大學第一年微積分，普通物理及第二年上學期微分方程及工程力學修畢後，最早應在第二年下學期（或三年上學期）開授本課，較爲適宜。此外本書因內容相當豐富深入，故亦能適合各工程研究所第一年工程或應用數學補充或參考教材之用。

本書承蒙現任美國洛杉磯加州大學工學院副教授，刻在成功大學擔任客座教授之劉炯炎博士撰序推介，編者深感榮幸。

本書編撰期間，曾請戴崇山先生編解單號習題答案（證明題不在內），許基財先生繪圖，並由內子玖君協助校對，小女小菁、美南等繕稿，通力合作，遂使上册得以提前完成，特致謝意。

中華民國五十七年十二月

編者序於臺南市成功大學

高等工程數學

上冊目錄

〔註〕 本書全部單號習題答案,及中英文名詞對照表,均列下冊附錄

第一章

首階常微分方程式

(Ordinary differential equations of the first order)

1-1 基本觀念及定義

一可自由變化之數值，稱為自變數 (Independent variable) 隨自變數而決定其值者，稱為函數 (Function)，或因變數 (Dependent variable)。表達一函數及(或)其導數 (Derivative)，和自變數間相互關係之方程式，稱為微分方程式。

微分方程式，按其性質，可區分為下列數種：

(a) 僅包含一個自變數之函數，其有關之微分方程式，稱為常微分方程式。式中之導數，均係全導數 (Total derivative)。例如：$y'=\frac{dy}{dx}=\cos x$，y 為函數，x 為自變數。

(b) 凡包含兩個或更多自變數之函數，其有關之微分方程式，稱為偏微分方程式(Partial differential equation)。其中之導數，均係偏導數 (Partial derivative)。例如：$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，$u$ 為函數，x 及 y 為自變數。

(c) 凡兩個或更多之函數或因變數，均隨一個自變數而變化時，其有關之微分方程式組，稱為聯立微分方程式(Simultaneous differential equations)。例如：

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}+5x+\frac{dy}{dt}+4y&=e^{-t}\\ \frac{dx}{dt}+2x+\frac{dy}{dt}+y&=3\end{aligned}\right\}$$

x 及 y 為函數，t 為自變數。

此外，微分方程式又可按方次區分爲兩大類：

(a) 線性微分方程式 (Linear differential equation)。其中所有之函數及其導數，均係一次方者。例如：

$ay''+by'+cy=0$ a, b, c 均爲常數。

(b) 非線性微分方程式 (Non-Linear differential equation)。其中之函數及其導數，有高於一次方，或相互之乘積項者。例如：$y''+3y'y+4y=0$ 及 $y''+\sin y=0$ 均爲非線性，前者因有 $3y'y$ 項，後者則因 $\sin y$ 爲 y 之非線性函數。

微分方程式之階次 (Order)，係以該方程式內所包含之最高階次導數爲基準。例如：

$\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0$ 爲一四階線性偏微分方程式。

由微分方程式所求出原函數及其自變數間之關係，是即該微分方程式之解答。

線性微分方程式之解法較易，且大部分均可以已知函數或級數表之。而非線性微分方程式，除特殊情形外，其一般解法，均極困難，且非普通之已知函數，所可表達，通常情形，僅能求出其約值而已。

一次微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=f(x)$ 之解爲 $y=\int f(x)dx+C$，C 爲一任意之積分常數。

一般而言，微分方程式之獨立解答 (Independent solutions) 及其所包含任意常數之數目，等於其階次之數目，惟亦有例外之特殊情形。例如：微分方程式 $\left|\dfrac{dy}{dx}\right|+|y|=0$ 僅有之解答爲 $y\equiv 0$，而微分方程式 $\left|\dfrac{dy}{dx}\right|+1=0$ 則根本無解，故亦無任意常數。但以上二者均不能視爲正規之微分方程式，亦無實際上之價値。又如一微分方程式之解 $a\cos^2 x+b\sin^2 x+c\cos 2x$，看似有三個解答及任意常數 a, b, c。但若化成 $a\cos^2 x+b\sin^2 x+c(\cos^2 x-\sin^2 x)=(a+c)\cos^2 x+(b-c)\sin^2 x=d\cos^2 x+e\sin^2 x$ 後，實際上只有兩個獨立之解 $\cos^2 x$ 和

$\sin^2 x$, 連同兩個任意常數 $d=a+c$, $e=b-c$, 因 $\cos 2x$ 可包含在 $\sin^2 x$ 及 $\cos^2 x$ 之內而非獨立之解。

以上所述 n 階微分方程式包含 n 個任意常數之解答, 稱爲該方程式之通解(General solution), 又如該微分方程式之任何解答, 均可由指定通解中之任意常數值以得之, 則此項解答, 又可稱爲全解 (Complete solution)。

求出通解中之任意常數值, 使適合某項已知條件時, 吾人卽可獲一特解 (Particular solution)。

凡不可能包含於通解內之解答, 被稱爲奇解 (Singular solution)。

尋求特解之工作, 在應用問題中, 極具重要性, 此可於本書以後各章中詳論之。反之, 奇解在此類問題中, 極爲罕見, 且亦無關重要。故微分方程式之通解及全解, 實具有相同之意義。

【例一】 試證 $y=ae^{-2x}+be^{3x}$ 爲微分方程式 $y''-y'-6y=0$ 之解; a, b 爲任意常數。

【解】 微分之後, 代入原式: $y'=-2ae^{-2x}+3be^{3x}$, $y''=4ae^{-2x}+9be^{3x}$

$$\therefore\ y''-y'-6y=(4ae^{-2x}+9be^{3x})-(-2ae^{-2x}+3be^{3x})-6(ae^{-2x}+be^{3x})$$
$$=0a+0b=0$$

故此微分方程式, 可適合於任意常數 a, b。

【例二】 已知通解 $y=ae^{x}+b\cos x$, 求原微分方程式。

【解】 $y=ae^{x}+b\cos x$ ························· (1)

微分通解得: $y'=ae^{x}-b\sin x$ ························· (2)

$y''=ae^{x}-b\cos x$ ························· (3)

(1)+(3): $y+y''=2ae^{x}$, $\therefore\ a=\dfrac{y+y''}{2e^{x}}$ ························· (4)

(1)−(3): $y-y''=2b\cos x$, $\therefore\ b=\dfrac{y-y''}{2\cos x}$ ························· (5)

以(4), (5)代入(2)式: $y'=\left(\dfrac{y+y''}{2e^{x}}\right)e^{x}-\left(\dfrac{y-y''}{2\cos x}\right)\sin x$

故得: $(1+\tan x)y''-2y'+(1-\tan x)y=0$ ························· (6)

卽爲所求之微分方程式。

雖然(6)式是以(1)式作其通解之次階微分方程式, 但並非具有(1)式爲解答之惟一微分方程式。例如將(3)y式再微分兩次後, 卽得: $y''''=ae^{x}+b\cos x$

此一結果,恰與(1)式相等,是故(1)式必亦能適合此簡單之微分方程式:

$$y''''=y \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7)$$

因(7)式係屬四階,其通解必含有四個任意常數,而(1)式僅有二任意常數,自不能成爲式(7)之通解。吾人可藉驗證方法,(得知(7)式之通解或全解可寫成下式:

$$y=ae^{x}+b\cos x+ce^{-x}+d\sin x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (8)$$

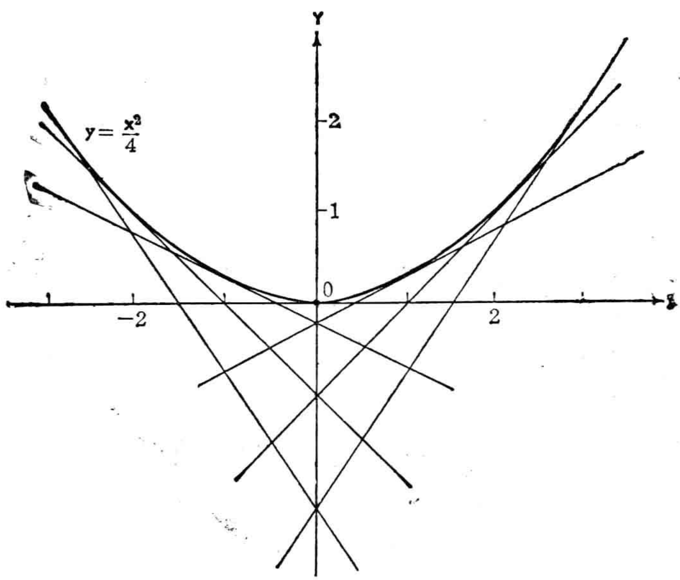
又如吾人已知微分方程式 $y'^2-xy'+y=0$ ………………………… (9)*

之通解爲: $y=cx-c^2$ ……………………………………………(10)

但(10)式並非(9)式之全解,因另有一奇解:

$$y=\frac{x^2}{4} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (11)$$

亦恰可適合(9)式也。利用圖解方法,(10)式係構成一組環切於(11)式拋物線(Parabola)之直線系,因(10)式及(11)式聯解所得之交點僅有一個: $cx-c^2=\frac{x^2}{4}$,或 $\left(\frac{x}{2}-c\right)^2=0$, $x=2c$。復令(10)式中之 $y=0$, 得$x=c$。故任一切點之



1-1 圖 方程式(9)之奇解及特解

*讀者應注意(9)式爲一非線性微分方程式,且不在應用問題中出現。

横坐標，恰等於該切線在 x 軸上之截距（x-intercept）之兩倍。

習　題　1-1

就以下各微分方程式逐一說明其階次，種類（常微分或偏微分）及性質（線性或非線性）：

1. $y''+3(y')^2+4y=0$
2. $y''+(a+b\cos 2x)y=0$
3. $y''+y'+\cos y=0$
4. $y'''+6y''+4y'+y=e^x$
5. $\dfrac{d(xy')}{dx}+x^2y=0$
6. $u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}$
7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$
8. $\dfrac{\partial^2\left(x^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

證實下列各題中之微分方程式，有其附後之解答式，並繪出其部份曲線：

9. $y''-4y'+4y=0$　　$y=ae^{2x}+bxe^{2x}$
10. $y''+4y=0$　　$y=a\cos 2x+b\sin 2x$
11. $(\cos 2x)y'+(2\sin 2x)y=2$　　$y=a\cos 2x+\sin 2x$
12. $y''+2y'+2y=0$　　$y=e^{-x}(a\cos x+b\sin x)$
13. $2xydy=(y^2-x)dx$　　$y^2=ax-x\ln x$
14. $(xy-x^2)dy=y^2dx$　　$y=ae^{y/x}$
15. $y''+(y')^2+1=0$　　$y=\ln\sin(x-a)+b$

求出以下列各函數作爲通解之有關微分方程式：

16. $y=ae^{-t}+be^t$
17. $y=ae^{-t}+be^t+ce^{2t}$
18. $y=ae^{3t}+bte^{3t}$
19. $y=2ax+bx^2$
20. $y=e^{-x}+be^{3x}$
21. $y=a\ln bx$
22. 設某一微分方程式之通解爲與 x 軸相切於原點之一組拋物線，試求此微分方程式。
23. 設某一微分方程式之通解，代表與拋物線 $2y=x^2$ 相切之一組切線，試求原微分方程式。
24. 證實 $y=ax^2$ 及 $y=b(x-1)^2$（a, b 係任意常數）均適合於下列微分方程式：$(x^2-x)y''-(2x-1)y'+2y=0$，及 $2yy''=(y')^2$，但 $y=ax^2+b(x-1)^2$ 僅適合於上列之第一式，何故？

1-2 可分離變數方程式 (Separable equations)

若干首階微分方程式，可用代數方法，化成下列形式時，

$$f(x)dx=g(y)dy \cdots\cdots (1)$$

則稱爲變數可以分離之微分方程式。因(1)式中 dx 及 dy 之係數分別爲 x, y 之函數 $f(x)$ 及 $g(y)$ 之故。此類方程式之解法，極爲簡單，只須將(1)式等號兩端分別積分，即可求出其答案：

$$\int f(x)dx=\int g(y)dy+C\ (C\text{ 爲任意積分常數})\cdots(2)$$

有時 (2) 式在積分時，可能無法以基本已知函數表示 $\int f(x)dx$ 或 $\int g(y)dy$ 之結果，遇此情形，吾人必須藉數值或圖解積分方法 (Numerical or graphical integration)，以求出函數大約之答數。

【例一】 求解 $y'=-\dfrac{4x}{9y}$。

【解】 分離變數後可得： $9ydy=-4xdx$

兩端積分之得， $\dfrac{9}{2}y^2=-2x^2+K$

或，
$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=C \qquad \left(C=\frac{K}{18}\right)$$

此解表示一組以原點爲中心之橢圓曲線 (Ellipses)。

【例二】 試求解 $(x^2+1)y'+y^2+1=0 \cdots\cdots (3)$

【解】 分離變數得： $\dfrac{dx}{1+x^2}+\dfrac{dy}{1+y^2}=0$

積分之，
$$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=c \cdots\cdots (4)$$

取(4)式之正切函數：

$$\tan[\tan^{-1}x+\tan^{-1}y]=\frac{x+y}{1-xy}=\tan c=k$$

或，
$$x+y=k(1-xy) \cdots\cdots (5)$$

(4)或(5)式均爲(3)式之通解。

【例三】 求解方程式 $dx+xydy=y^2dx+ydy \cdots\cdots (6)$

【解】 歸納 dx 及 dy 之係數後得:

$$(1-y^2)dx=y(1-x)dy$$

通除以 $(1-x)(1-y^2)$ 即可分離其變數如下式:

$$\frac{dx}{1-x}=\frac{ydy}{1-y^2}$$

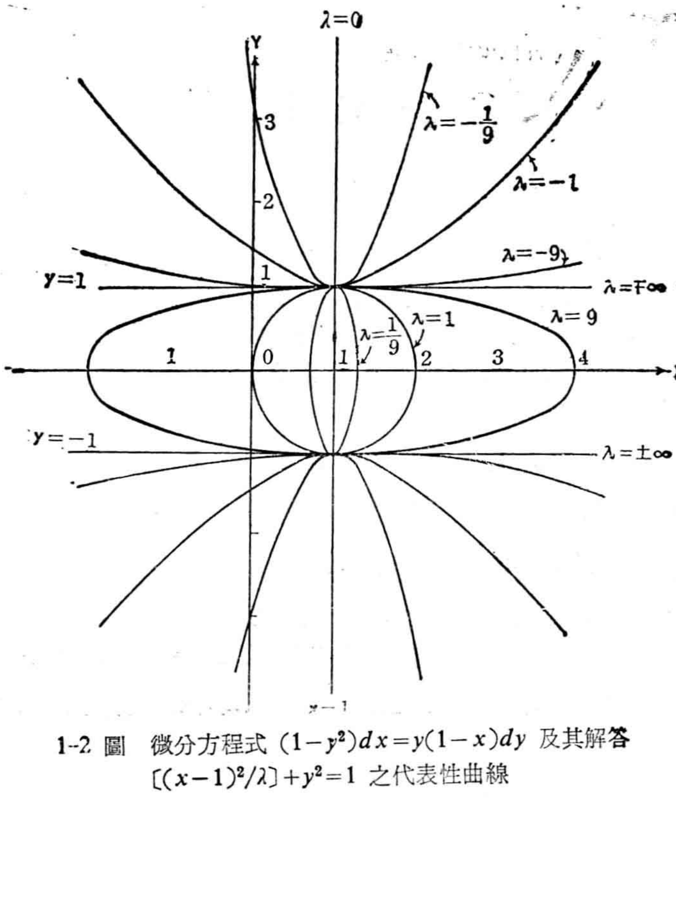
積分之, $$2\ln|1-x|=\ln|1-y^2|+c$$

或, $$\ln\frac{|1-x|^2}{|1-y^2|}=c,\qquad \frac{|1-x|^2}{|1-y^2|}=e^c=k^2$$

其中 $k^2=e^c$ 必為正實數值,最後取消絕對值符號可得:

$$(1-x)^2=\pm k^2(1-y^2)$$

或, $$(1-x)^2=\lambda(1-y^2) \quad\cdots\cdots\cdots (7)$$



1-2 圖　微分方程式 $(1-y^2)dx=y(1-x)dy$ 及其解答 $[(x-1)^2/\lambda]+y^2=1$ 之代表性曲線

(7)式卽成爲(6)式之通解或全解，其曲線如圖所顯式，可分若干部分：

（一） 當 λ 等於正實數時（$\lambda>0$），(7)式代表橢圓曲線。

（二） 當 λ 等於負實數時（$\lambda<0$），(7)式係代表雙曲線(Hyperbola)。

（三） 當 λ 等於零($\lambda=0$)時，(7)式變成直線 $x=1$。

（四） 當 λ 之值，，接近於無窮大（$\lambda=\pm\infty$）時，(7)式成爲：

$$1-y^2=(1-x)^2/\lambda=0,\quad \text{或},\ y=\pm 1.$$

前已說明在各類應用問題中，某一微分方程式之通解求出後，常須另適合若干特殊條件，是卽求其特解，以決定任意常數之值。例如吾人如欲求本例題中通過$(-1,3)$一點之解答曲線，卽可將 $x=-1, y=3$ 之值代入(7)式：

$$(1+1)^2=\lambda(1-3^2) \qquad \therefore\ \lambda=-\frac{1}{2}$$

故特解爲：$(1-x)^2=-\dfrac{1}{2}(1-y^2)$，或，$y^2=1+2(x-1)^2$。

習 題 1-2

1. 試解釋爲何第 1-2 圖中有無限個曲線通過 $(1,1)$ 及 $(1,-1)$ 兩點，但其他任意一點則僅有一個曲線通過？

先求下列各微分方程式之通解，再求適合其附帶條件之特解：

2. $dx+ydy=x^2ydy \qquad (x=2, y=0)$
3. $y^2dx-xdy=xy(dy-ydx) \qquad (x=1, y=1)$
4. $(xy^2-x)dx=(y+x^2y)dy \qquad (x=0, y=2)$
5. $x^2ydx=(1+x)dy \qquad (x=1, y=1)$
6. $\dfrac{dx}{dy}=y(6x^2+5x+1) \qquad (x=0, y=1)$
7. $ye^{x+y}dy=dx \qquad (x=0, y=1)$
8. $\dfrac{dy}{dx}=(1-y^2)\tan x \qquad (x=0, y=3)$
9. $xy^2dy-y^3dx+y^2dy=dx \qquad (x=-1, y=0)$
10. 試證利用 $v=ax+by+c$（a, b, c, 均爲常數）之關係，將因變數 y 轉變之後，類似 $\dfrac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$ 形式之微分方程式，均可變成可分離變數 v 和 x 之微分方程式。