■ 高等学校教材

线性代数

■ 蔺小林 侯再恩 任小红 白云霄 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

线性代数

Xianxing Daishu

蔺小林　侯再恩　任小红　白云霄　编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书依照工科类本科线性代数课程教学基本要求编写，编写过程中遵循“满足教学基本要求、适当减少理论推导、增强实际问题应用”的原则，采用学生易于接受的方式，科学、系统地介绍线性代数的基本知识。本书起点低，适用性强，涵盖了研究生入学考试数学考试大纲有关线性代数的基本内容。

本书内容包括行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换等六章。每章后配有适量习题，书后附有部分习题参考答案，方便学生学习。

本书可作为高等院校工科类各专业线性代数课程教材，也可供自学者和科技工作者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数／蔺小林等编. -- 北京：高等教育出版社,2013.6

ISBN 978-7-04-035718-9

Ⅰ.①线… Ⅱ.①蔺… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 027179 号

策划编辑 张长虹 责任编辑 田 玲 封面设计 王凌波 版式设计 余 杨
插图绘制 宗小梅 责任校对 刘春萍 责任印制 张福涛

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 北京七色印务有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 15.75
字 数 290 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
版 次 2013 年 6 月第 1 版
印 次 2013 年 6 月第 1 次印刷
定 价 23.40 元

物 料 号 35718-00

前　言

在计算机科学飞速发展的今天，许多非线性问题都可以高精度线性化，大型线性问题的可解性也正在加快实现，线性代数正是解决这些问题的有力工具。因此，线性代数课程在线性方程组求解的理论方面、实际问题的应用方面以及数学文化的教育方面都有重要的作用。

线性代数是高等院校工科类各专业重要的基础课之一，学生对线性代数基本理论掌握得是否扎实，直接关系到后继课程学习的效果。线性代数的学习对学生其他能力的培养和塑造也起着非常重要的作用。帮助学生更好地学习这门课，是我们义不容辞的责任。本教材的编排从教学的需求出发，突出了以下几个特点：

1. 基本内容完整。本书基本内容包括行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换等。全书内容简明易懂、结构简洁，每节有较多的典型例题，每章后面配有适量习题，书后有部分习题参考答案，能满足一般高等院校学生学习线性代数课程的需求。另外，附录中还提供了三套期末测试试题，供学生期末复习使用。

2. 重视实际应用。在部分章节中（如第一章 §7，第二章 §5，第三章 §4 和第五章 §8 等），我们适当地增加了一些应用问题，体现线性代数在实际问题中的一些应用。这些实际问题涉及经济、交通、遗传学、密码学和人口迁移等。

3. 结合应用计算。本书在附录中简要介绍了 MATLAB 在线性代数计算中的一些基本应用，内容简明，叙述清楚，易于学生学习和练习。

限于编者水平，书中难免会有不妥或错误之处，敬请读者批评、指正。

编　者

2012 年 3 月

目　　录

第一章　行　列　式

行列式的概念最早出现在解线性方程组的过程中. 19 世纪以后,行列式理论得到了进一步的发展和完善. 现在行列式理论是线性代数的重要组成部分,它在数学的许多分支中都有着非常广泛的应用. 本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及计算方法,最后给出用行列式求解 n 元线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

§1　二阶与三阶行列式

一、二元线性方程组与二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. & (2) \end{cases}$$

为消去未知数 x_2,式(1)$\times a_{22}$ - 式(2)$\times a_{12}$得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2;$$

为消去未知数 x_1,式(2)$\times a_{11}$ - 式(1)$\times a_{21}$得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,所求方程组的解为

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{3}$$

(3)式中的分子分母都是四个数分两对相乘再相减而得,其中分母 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$是由该二元线性方程组的四个系数确定的. 把这四个系数按照它们在方程组中的位置,排成二行二列(横排称行,竖排称列)的数表:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{4}$$

表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$称为数表(4)所确定的二阶行列式,并记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \tag{5}$$

其中数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$叫做行列式的元素,元素 a_{ij}的第一个下标 i 叫做行标,表

明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 叫做列标，表明该元素位于第 j 列. 位于第 i 行、第 j 列的元素称为行列式(5)的 (i,j) 元.

由上述定义可知，二阶行列式是由四个数按一定的规律运算所得的代数和. 这个规律性在行列式的记号中就是对角线法则，如图 1－1，把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为主对角线，a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为副对角线，于是二阶行列式便是主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积.

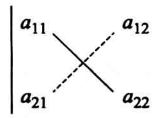

图 1－1

利用行列式的概念，(3)式中的分子分母也可写成二阶行列式.

若记

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

那么(3)式可以写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

注意这里的分母 D 是由方程组(1)，(2)的系数所确定的行列式(称为系数行列式)，x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}, a_{21} 所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}, a_{22} 所得的二阶行列式.

例 1　求解二元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 4. \end{cases}$$

解　由于

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-2) \times 1 = 3 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-2) \times 4 = 9,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 1 \times 1 = 3,$$

因此

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{9}{3} = 3,\quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{3}{3} = 1.$$

二、三阶行列式

定义 设有 9 个数排列成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{6}$$

表达式 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$ 为数表(6)所确定的三阶行列式,记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

上述定义表明三阶行列式含有 6 项,每一项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号,其运算的规律性遵循图 1-2 所示的对角线法则:沿实线上三个元素的乘积冠以正号,沿虚线上三个元素的乘积冠以负号,它们的代数和就是三阶行列式的值.

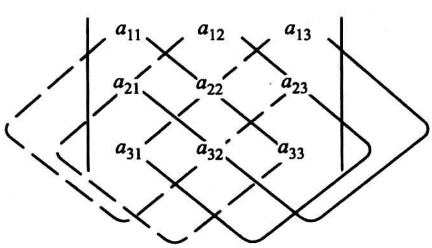

图 1-2

例 2 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则,有

$$\begin{aligned}D&=1\times1\times(-1)+3\times3\times3+2\times2\times(-2)-\\&\quad 3\times1\times2-2\times3\times1-(-1)\times3\times(-2)\\&=-1+27-8-6-6-6=0.\end{aligned}$$

例 3 求解方程

$$\begin{vmatrix}3 & 1 & x\\ 4 & x & 0\\ 1 & 0 & x\end{vmatrix}=0.$$

解 方程左端的三阶行列式

$$D=3x^2+0+0-x^2-0-4x=2x^2-4x,$$

由 $2x^2-4x=0$ 解得 $x=0$ 或 $x=2$.

§2 n 阶行列式的定义

一、排列与逆序数

定义 1 把正整数 $1,2,\cdots,n$ 排成没有重复数字的一列称为一个 n 级排列(简称排列),常用 $i_1i_2\cdots i_n$ 表示.

n 级排列的种数是 $n(n-1)\cdots2\cdot1=n!$.

例如,1234 和 4231 都是 4 级排列,而 34512 是一个 5 级排列.

定义 2 在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中,若数 $i_s>i_t$,则称数 i_t 与 i_s 构成一个逆序. 一个排列中所有逆序的总数称为该排列的逆序数,记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列.

根据定义 2,可按如下方法计算排列的逆序数:

设在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中比 $i_k(k=1,2,\cdots,n)$ 大的且排在 i_k 前面的数共有 t_k 个,则 i_k 的逆序的个数为 t_k(t_k 也称为数 i_k 的逆序数),而该排列中所有正整数的逆序之和就是这个排列的逆序数,即

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{k=1}^{n}t_k.$$

例 1 计算排列 32514 的逆序数.

解　3 排在首位,故其逆序数为 0;

2 的前面比 2 大的数有 1 个,故其逆序数为 1;

5 的前面比 5 大的数有 0 个,故其逆序数为 0;

1 的前面比 1 大的数有 3 个,故其逆序数为 3;

4 的前面比 4 大的数有 1 个,故其逆序数为 1.

将上述结果列为下表:

排列	3	2	5	1	4
逆序数 t_k	0	1	0	3	1

于是这个排列的逆序数为 $\tau(32514)=0+1+0+3+1=5$.

例 2　判断排列 12345 和排列 36715284 的奇偶性.

解　与例 1 类似,有

排列	1	2	3	4	5
t_k	0	0	0	0	0

所以 $\tau(12345)=0$,排列 12345 是偶排列,此排列也称为自然排列.

排列	3	6	7	1	5	2	8	4
t_k	0	0	0	3	2	4	0	4

所以 $\tau(36715284)=0+0+0+3+2+4+0+4=13$,此排列是奇排列.

二、n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义,先来研究三阶行列式的结构. 三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

观察可得:

(ⅰ)三阶行列式共有 $6=3!$ 项.

(ⅱ)(1)式右端每一项恰是取自不同行不同列的三个元素的乘积. 每一项中三个元素的行标排列相同,是自然排列 123;列标排列均为一个 3 级排列,3 级

排列的种数为3! =6,对应(1)式右端6项.因此(1)式右端的任一项除正负号外可以写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$.

(ⅲ)各项的正负号与列标排列的奇偶性有关:列标排列是偶排列,该项取正号;列标排列是奇排列,该项取负号.

带正号的三项列标排列是123,231,312,均为偶排列;

带负号的三项列标排列是132,213,321,均为奇排列.

因此各项所带的正负号可以表示为 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$,其中 $\tau(j_1j_2j_3)$ 为列标排列 $j_1j_2j_3$ 的逆序数.

综上所述,三阶行列式可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对所有3级排列 $j_1j_2j_3$ 求和.

仿此,可以得到 n 阶行列式定义如下:

定义3 设有 n^2 个数,排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积,并冠以符号 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$,得到形如

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{2}$$

的项,其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是正整数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 为这个排列的逆序数.由于这样的排列共有 $n!$ 个,因而形如(2)式的项共有 $n!$ 项.所有这 $n!$ 项的和

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

称为 n 阶行列式,记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

简记为 $\det(a_{ij})$,其中 a_{ij} 为行列式 D 的 (i,j) 元.

按此定义的二阶、三阶行列式,与§1中用对角线法则定义的二阶、三阶行

列式显然是一致的. 注意当 $n=1$ 时, 一阶行列式 $|a|=a$, 不要和绝对值记号相混淆.

三、一些特殊行列式的计算公式

1. 对角行列式(除主对角线上元素以外,其他元素全为零)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证明 考察 $D=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中可能不为零的项. a_{1j_1} 取自第1行, 而第1行中可能不为零的元素只有 a_{11}, 故 $j_1=1$, 同理可得 $j_2=2, j_3=3, \cdots, j_n=n$. 即该行列式中可能不为零的项只有一项 $(-1)^{\tau(123\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$, 所以 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

2. 上三角形行列式(主对角线以下的元素全为零)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证明 由于 $j_i>i$ 时, $a_{ij_i}=0$, 故 D 中可能不为零的元素 a_{ij_i}, 其下标应有 $j_i\leqslant i$, 即 $j_1\leqslant 1, j_2\leqslant 2, \cdots, j_n\leqslant n$.

在所有排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中, 能满足上述关系的排列只有一个自然排列 $12\cdots n$, 所以 D 中可能不为零的项只有一项 $(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{12}\cdots a_{nn}=(-1)^0a_{11}a_{12}\cdots a_{nn}$, 所以

$$D=a_{11}a_{12}\cdots a_{nn}.$$

3. 下三角形行列式(主对角线以上的元素全为零)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证明同2.

4. 其他形式

(1) $$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1},$$

其中未写出的元素全为零；

(2) $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & ⋰ & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1};$$

(3) $$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & ⋰ & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

以上三式请读者证明之.

§3　对　　换

上节给出了 n 阶行列式的定义，本节先讨论对换的概念及其与排列的奇偶性的关系，在此基础上给出 n 阶行列式的变形定义.

在排列中，将任意两个元素对调，其余元素不动，这种做出新排列的方式称为对换. 将两个相邻元素对换称为相邻对换.

定理 1　任一排列经一次对换后，排列改变奇偶性.

证明　先证相邻对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$，对换 a 与 b，变为 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$，显然 $a_1,\cdots,a_l,b_1,\cdots,b_m$ 这些元素的逆序数经过对换并不改变，而 a,b 两元素的逆序数变化情况为：

当 $a<b$ 时，经过对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变；

当 $a>b$ 时，经过对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1.

所以排列 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$ 与排列 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$，对换 a 与 b 变为排列 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$，相当于将排列 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$ 先做 m 次相邻对换变为排列 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m c_1\cdots c_n$ 后，再做 $m+1$ 次相邻对换变成 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$. 总之经 $2m+1$（奇数）次相邻对换，排列 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$ 变成排列 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$，所以两排列的奇偶性不同.

推论 1　奇排列变成自然排列的对换次数为奇数，偶排列变成自然排列的对换次数为偶数.

推论 2　n 个正整数（$n>1$）的 n 级排列中奇偶排列的个数相等.

证明　n 级排列的总数为 $n!$. 设其中奇排列为 p 个，偶排列为 q 个. 若对每

个奇排列都做同一对换,比如将每个奇排列的前 2 个数字对换,就得到 p 个偶排列,故 $p\leqslant q$;同理可得 $q\leqslant p$. 所以 $p=q=\frac{n!}{2}$.

定理 2　n 阶行列式也可以定义为

$$D=\sum(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

证明　按行列式定义有

$$D=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

令

$$D_1=\sum(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}. \tag{1}$$

考察(1)式右端的一般项

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(12\cdots n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

注意到交换此一般项中两元素的位置,相当于同时进行一个行标的对换和一个列标的对换,故交换位置前后,一般项的行标排列与列标排列的逆序数之和的奇偶性不变. 经一次这样的交换是如此,经过多次交换亦如此. 于是,我们总可以通过对(1)式中的一般项 $(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(12\cdots n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$ 作有限次两元素的位置交换,使其行标由排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 变为自然排列 $12\cdots n$,此时其列标排列由自然排列变为新的排列 $j_1j_2\cdots j_n$,且 $(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(12\cdots n)}=(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$,即 $(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}=(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$,因此

$$D_1=\sum(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=D.$$

推论 3　n 阶行列式也可以定义为

$$D=\sum(-1)^{s}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},$$

其中 s 为行标排列与列标排列的逆序数之和,即

$$s=\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n).$$

例 1　在六阶行列式中,下列两项各应带什么符号?

(1) $a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$;　　(2) $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$.

解　(1) 按 §2 定义 3 计算列标排列 162435 的逆序数

$$\tau=0+0+1+1+2+1=5,$$

所以 $a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$ 前应带负号.

(2) 按定理 2 计算:

$$a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}=a_{21}a_{42}a_{53}a_{34}a_{65}a_{16},$$

行标排列 245361 的逆序数

$$\tau=0+0+0+2+0+5=7,$$

所以 $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$ 前应带负号.

或按定理 2 的推论 3 计算:

行标排列 251463 的逆序数 $\tau=0+0+2+1+0+3=6$，

列标排列 136254 的逆序数 $\tau=0+0+0+2+1+2=5$.

所以 $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$前应带负号.

§4　行列式的性质

显然当 $n\geqslant 3$ 时，直接利用 n 阶行列式的定义计算行列式是很繁琐的. 为了简化行列式的计算，下面我们介绍 n 阶行列式的性质.

一、行列式的性质

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的转置行列式.

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

证明　记 $D=\det(a_{ij})$，$D^{\mathrm{T}}=\det(b_{ij})$，则 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，按定义

$$D^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}.$$

由 §3 定理 2 有

$$D=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn},$$

因此 $D^{\mathrm{T}}=D$.

由性质 1 可知，行列式中的行与列具有相同的地位，行列式的性质对行成立的对列也成立，反之对列成立的对行也成立.

为简明起见，先引入以下记号：

以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示行列式的第 i 列；

交换行列式的 i,j 两行记作 $r_i\leftrightarrow r_j$，交换行列式的 i,j 两列记作 $c_i\leftrightarrow c_j$；

行列式的第 i 行（或列）乘以 k，记作 $r_i\times k$（或 $c_i\times k$）；

行列式的第 i 行（或列）提出公因子 k，记作 $r_i\div k$（或 $c_i\div k$）；

以数 k 乘行列式的第 j 行（或列）加到第 i 行（或列）上，记作 r_i+kr_j（或 c_i+kc_j）.

性质 2　交换行列式的两行（列），行列式变号.

证明　设 $D=\det(a_{ij})\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}D_1=\det(b_{ij})$，则

$$b_{ip}=a_{jp},\quad b_{jp}=a_{ip},\quad b_{kp}=a_{kp}\quad(k\neq i,j),$$

于是