薛金星·教材全解 畅销20年
全国一亿读者首选

全国高等学校优秀教材配套用书
配北京大学数学系编《高等代数》第三版

大学教材全解

高等代数

（北大第三版）

考拉进阶《大学教材全解》编委会 编
刘建波◎主 编

同步辅导＋考研复习

讲透重点难点 | 详解教材习题 | 精析考研真题 | 提升考研能力

延边大学出版社

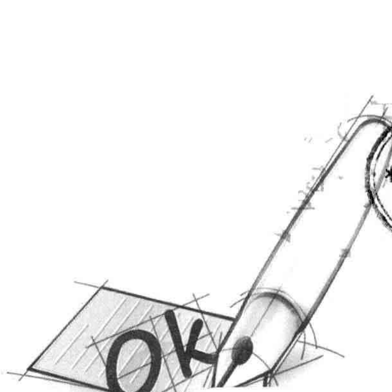
KOALAGOGO
考拉进阶

大学教材全解

高等代数

（北大第三版）

总策划：薛金星
主　编：刘建波
副主编：张艳艳　王新心
刘艳杰　张尚国



延边大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等代数 / 刘建波主编. -- 延吉：延边大学出版社, 2013.5
(大学教材全解)
ISBN 978-7-5634-5628-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①高等代数－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①015

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第108892号

大学教材全解：高等代数

延边大学出版社出版
（吉林省延吉市公园路977号）
北京泽宇印刷有限公司印刷
发行热线：010-61743009

开本：720×1000毫米 1/16
印张：23.5 字数：630千字
2013年8月第1版 2013年8月第1次印刷

ISBN 978-7-5634-5628-4
定价：26.80元

前言

“教材全解”系列图书十多年来一直是初高中学生的首选辅导材料，帮助千万学子取得了理想的成绩。《高等代数》是数学专业最重要的基础课程之一，是数学类专业硕士研究生考试的必考科目之一，为帮助数学类专业大学生学好《高等代数》课程，精心编写了《大学教材全解一高等代数》，希望通过“教材全解系列”全心全意、解疑解难的独有特色，帮助读者全面透彻地解析《高等代数》知识，真正做到学好教材、吃透教材，提升解题能力与数学思维水平，轻松达到各项考试的测试要求。

本书的章节内容与北京大学数学系编王萼芳石生明修订第三版教材保持一致，讲解顺序与课堂授课完全同步，非常符合读者的使用习惯。每章内容安排如下：

本章知识结构图解　以结构图的形式把一章的知识点串联起来，呈现给读者一个层次分明、结构清晰的知识网络及逻辑框架，帮助读者系统掌握并快速复习本章知识。

本章教材内容全解　解读教材的核心内容以及必须掌握的高频考点，使重、难点一目了然。与众不同的是，本书特别注重讲解知识点应用时易混淆、不易理解之处，以及做题过程中需要注意的事项，并列举与此知识点相关、在做题中广泛使用的核心结论，帮助读者学好、吃透本章节重要概念、定理(公理)、公式、性质等。

经典题型与解题方法归纳　以每章重点问题为主线，分类总结归纳题型，针对每个题型设有“题型解析”，帮助读者总结其相应的解题方法技巧和解答步骤，并精选典型例题，详细讲解。大部分例题配有“解题提示”“方法技巧”“特别提醒”等小栏目，希望通过具体应用使读者加深对基本概念的理解，并熟练掌握重要定理和解题方法的使用。

本部分题型全面，既有可以巩固本章知识点的基础题型，也有知识点涵盖面广、综合性稍强的常考题型。部分例题给出多种解法，以开拓读者思路，使读者能更扎实地掌握各个知识点，并且能熟练运用，进一步提高综合运用本章知识的能力及分析问题、解决问题的能力，满足读者在各种测试中获得高分或通过考研的更高需求。

历年考研真题精析　精选全国众高校硕士研究生入学考试真题，并进行详细解答。“真题评析”栏目对真题进行准确恰当的解读，帮助读者了解各章节在硕士研究生考试中涉及的考点、考查形式及注意事项，达到学好教材的同时对研究生入学考试也了如指掌这一目的。

本章课后习题全解　给出每章所有习题的详尽解答过程，针对不易找到解题思路的题目设有“解题提示”；针对经典题目设有“方法技巧”；针对部分题目解答过程中有易错易混的情况和需要特别注意的地方，设有“特别提醒”；部分题目的重要步骤和较难理解之处设有“注解”。部分典型题目一题多解，举一反三，以提升读者数学思维水平，提高对各知识点融会贯通的能力。

本章自测题及解析　精选各类考试的典型题目供读者对每章学习效果进行自我检测，并且给出了详细的解答过程。

本书内容贯彻了“教材全解系列”讲解细致、层次清晰、深入浅出的特点，并在此基础上突出了三大亮点：

1. 题型全、配有解题方法，例题经典、步骤详尽。

2. 精析各章考研考点，指点考研迷津。

3. 掌握知识和提升能力并行。

与市场上其他同类教辅书不同的是，无论是例题、考研题、教材习题还是自测题，本书都注重总结每个题型的特点、解法和步骤、注意事项等，将知识和应用完美结合，帮助读者实现既能掌握知识又能提高能力的愿望。

本书可作为数学类专业学生学习《高等代数》的辅导用书、考研复习用书，也可以作为教师教授《高等代数》这门课程的教学参考书。

由于编者水平所限，书中不妥或错误之处在所难免，敬请各位同行、读者批评指正。

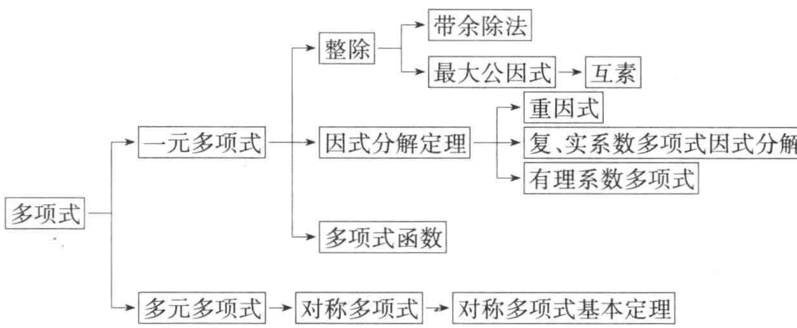
考拉进阶教育研究院

“大学教材全解”编委会

目录

第一章　多项式

本章知识结构图解



本章教材内容全解

§1　数　域

知识点　数域的定义

1. 包括0与1，且对加法、减法、乘法与除法(除数不为0)封闭的复数集的子集称为数域. 例如:全体有理数组成的集合、全体实数组成的集合、全体复数组成的集合都是数域，这三个数域分别用字母 **Q**,**R**,**C** 表示.

2. 除了上面提到的数域 **Q**,**R**,**C**,存在其他的数域，如 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$，所有具有形式 $a+\sqrt{2}b$ 的数(其中 a,b 是有理数)组成的集合. 在有理数域和实数域之间存在无穷多个数域.

3. 所有数域都包含有理数域，即有理数域是最小的数域.

§2　一元多项式

知识点　多项式的定义与运算(重点)

1. 定义的多项式是含有符号或文字 x 的形式表达式，x 可能是数，也可能是其他事物.

2. 零多项式是唯一不定义次数的多项式(有的教材上将零多项式的次数定义成负无穷). 非零常数 c 作为多项式，其次数为零，因此要注意零多项式和零次多项式的区别.

3. 两个多项式相等当且仅当它们的同次项系数全相等. 证明两个多项式相等的方法:

(1)利用定义，说明对应项系数相等;

(2)证明互相整除，再比较首项系数相等；

(3)反证法：寻求下面的次数定理之间的矛盾；

(4)利用多项式函数相等，这里注意只有零多项式才有无穷多个根.

4. 多项式的和(差)归结为对应项系数的和(差)；多项式的乘法归结为逐项相乘并合并同类项.

5. 次数定理：当 $f(x)\neq 0, g(x)\neq 0$ 时，还有如下结论：

(1)当 $f(x)\pm g(x)\neq 0$ 时，$\partial(f(x)\pm g(x))\leqslant \max(\partial(f(x)), \partial(g(x)))$；

(2)$f(x)g(x)\neq 0$，且$\partial(f(x)g(x))=\partial(f(x))+\partial(g(x))$.

§3 整除的概念

知识点1 带余除法(重点、难点)

1. 多项式对加法、减法、乘法都封闭，但是除法在多项式中并不封闭，也就是说，一个非零多项式 $g(x)$除 $f(x)$不一定能除尽，可能余式 $r(x)\neq 0$. 当要求 $r(x)$的次数比 $g(x)$的次数低时，这样的商式和余式是唯一的. 带余除法在后面的内容中是反复应用的.

2. 定理证明中使用了第二数学归纳法，这里第一数学归纳法不适用，因为对多项式的次数进行归纳假设时，不一定从 n 次降到 $n-1$ 次，可能低于 $n-1$ 次.

3. 带余除法包括了除尽和除不尽两种情况，即对两个多项式的可除关系进行了完全的概括. 并且，带余除法也是多项式同余关系和辗转相除的基础.

4. 综合除法

用多项式 $x-a$ 去除 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 时，所得的余式 $r(x)=c_0$ 及商式 $g(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0$，可以用下面的综合除法计算：

a	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
	$b_{n-1}=a_n$	$b_{n-2}=a_{n-1}+ab_{n-1}$	$b_{n-3}=a_{n-2}+ab_{n-2}$	$\cdots$	$b_0=a_1+ab_1$	$c_0=a_0+ab_0$

知识点2 整除(重点、难点)

1. 任一多项式都整除它自身；零次多项式整除任何多项式；任何多项式都整除零多项式；零多项式只能整除零多项式.

2. 如果两个多项式相互整除，那么其中一个是另一个的非零常数倍. 如果两个多项式首项系数相同，且相互整除，那么这两个多项式相等.

3. 两个多项式之间的整除关系不因数域的扩大而改变.

『温馨提示』这是由带余除法定理中的商式和余式的唯一性所确定的.

4. 证明整除性的常用方法

(1)利用定义及其性质；

(2)利用带余除法；

(3)利用多项式的标准分解式；

(4)利用因式定理；

(5)利用互素的性质.

§4 最大公因式

知识点1 最大公因式(重点)

1. 最大公因式存在定理(教材中的定理2)的证明,给出了求最大公因式的一种常用方法——辗转相除法.

2. $f(x),g(x)$的最大公因式$d(x)$可以表示成$f(x),g(x)$的一个组合,即存在$P[x]$中的多项式$u(x),v(x)$,使得$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$.

(1)这样的$u(x),v(x)$不是唯一的,实际上,对于任意的$h(x)\neq 0$,都有

$$d(x)=[u(x)+h(x)g(x)]f(x)+[v(x)-h(x)f(x)]g(x),$$

即$u_1(x)=u(x)+h(x)g(x),v_1(x)=v(x)-h(x)f(x)$也满足条件.

(2)反过来,由存在$P[x]$中多项式$u(x),v(x)$,使得$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$,不能推出$d(x)$是$f(x),g(x)$的最大公因式.此时必须附加上$d(x)$是$f(x),g(x)$的公因式(见教材P45习题8).

『温馨提示』两个多项式的最大公因式在可以相差一个非零常数倍的意义下是唯一确定的.

知识点2 互素(重点、难点)

1. 多项式$f(x),g(x)$互素的充分必要条件是有$P[x]$中的多项式$u(x),v(x)$,使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1.$$

『温馨提示』这个结论是判别两个多项式是否互素的一个重要方法.

2. 互素也不因数域的扩大而改变.

3. 互素相关的性质很重要,是各种考试关于多项式内容的重要考点之一.

§5 因式分解定理

知识点1 不可约多项式(重点)

1. 一个多项式是否不可约与其所在的数域密切相关.

2. 零多项式和零次多项式既不能说是可约的,也不能说是不可约的.

3. 不可约多项式$p(x)$与任一多项式$f(x)$之间只能有两种关系,或者$p(x)\mid f(x)$,或者$(f(x),g(x))=1$.

4. 不可约多项式$p(x)$整除一些多项式的乘积,那么$p(x)$至少整除这些多项式中的一个.

知识点2 因式分解及唯一性定理(重点、难点)

1. 因式分解及唯一性定理中的唯一性是在允许不可约因式相差一个非零常数和不计次序的前提下的.

『温馨提示』这个定理虽然在理论上有其基本重要性,但是它并没有给出一个具体的分解多项式的方法.实际上,没有普遍可行的分解一般多项式的方法.

2. 标准分解式中的不可约因式都是首项系数为1的,所有不可约因式次数的和为多项式的次数.

3. 多项式$f(x)$和$g(x)$的最大公因式$d(x)$就是那些同时在$f(x)$和$g(x)$的标准分解式中出现的不可约多项式方幂的乘积,所带的方幂的指数等于它在$f(x)$和$g(x)$中所带的方幂中较

小的一个.

§6 重因式

知识点 重因式的定义和判别(重点、难点)

1. 重因式是针对不可约多项式定义的.

2. 多项式的微商与数学分析中的多项式函数的求导法则是一样的,但是,多项式的微商只是一种形式的定义.

3. 借助微商可以给出关于重因式的一些判别法则:

(1)如果不可约多项式 $p(x)$是 $f(x)$的 k 重因式($k\geqslant 1$),那么 $p(x)$是微商 $f'(x)$的 $k-1$ 重因式. 但是,$f'(x)$的 $k-1$ 重因式 $p(x)$不一定是 $f(x)$的 k 重因式. 只有当 $p(x)$是 $f(x)$的因式且为 $f'(x)$的 $k-1$ 重因式时,$p(x)$才是 $f(x)$的 k 重因式.

(2)不可约多项式 $p(x)$是 $f(x)$的重因式的充分必要条件为 $p(x)$是 $f(x)$与 $f'(x)$的公因式. 从而,$f(x)$的重因式要在$(f(x),f'(x))$的不可约因式中去寻找.

『温馨提示』因此,判别一个多项式有没有重因式,可以通过代数运算——辗转相除法来解决,这个方法甚至可以说是机械的,可以借助计算机实现.

§7 多项式函数

前面几节是在形式的观点下讨论多项式的,这一节是用函数的观点来讨论多项式.

知识点 多项式函数的根(重点、难点)

1. 余数定理可以将求函数值转化成计算多项式相除的余式.

2. 余式定理说明了根与一次因式的关系.

3. 重根是根据一次因式的重因式定义的. 因此,$f(x)$有重根,则其必有重因式. 但反之是不正确的,例如 $f(x)=(x^2+3)^2(x+2)$在实数域上有重因式 x^2+3,却没有重根.

4. 不同的多项式定义的函数也不同,因此,多项式的恒等与多项式相等实际上是一致的. 从而,数域上的多项式既可以作为形式表达式来处理,也可以作为函数来处理.

§8 复系数与实系数多项式的因式分解

知识点 1 复系数多项式的因式分解(重点)

1. 每个次数大于 1 的复系数多项式在复数域上都可以唯一地分解成一次因式的乘积,因此复数域上不可约的多项式只能是一次的.

2. 每个 n 次复系数多项式恰有 n 个复根(重根按重数计算).

3. 复系数多项式的有无重因式和有无重根是一致的.

4. 分解定理虽然肯定了 n 次多项式恰有 n 个复根,但是没有给出具体的求法. 高次方程求根问题远远还没有解决.

知识点 2 实系数多项式因式分解定理(重点、难点)

1. 实数域上多项式 $f(x)$不可约的充分必要条件是$\partial(f(x))=1$,或者 $f(x)=ax^2+bx+c$ 且 $b^2-4ac<0$.

『温馨提示』实数域上只有一次和具有一对共轭复根的二次多项式才不可约.

2. 实数域上的奇次多项式必有实根.

3. 每个次数$\geqslant 1$的实系数多项式在实数域上都可以唯一地分解成一次因式与二次不可约因式的乘积.

§9 有理系数多项式

知识点1 本原多项式(重点、难点)

1. 本原多项式即系数互素的非零的整系数多项式.

高斯定理 两个本原多项式的乘积还是本原多项式.

2. 如果一非零的整系数多项式能够分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积,那么它一定能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积.

『温馨提示』这说明,有理系数多项式的因式分解问题,可以归结为整系数多项式的因式分解.

知识点2 整系数多项式的有理根(重点)

设$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$是一个整系数多项式,而$\frac{r}{s}$是它的一个有理根,且$(r,s)=1$,那么必有$s|a_n$, $r|a_0$. 特别地,如果$f(x)$的首项系数$a_n=1$,那么$f(x)$的有理根都是整根,而且是a_0的因子.

『温馨提示』这个定理给出了一个整系数多项式有理根的范围.

知识点3 艾森斯坦判别法(重点、难点)

1. 艾森斯坦判别法确定了有理数域上存在任意次的不可约多项式,例如,对于任意的n,多项式x^n+p(p是素数)在有理数域上都是不可约的.

2. 艾森斯坦判别法只给出了判别一个整系数多项式$f(x)$在有理数域不可约的充分条件.因此,如果找不到满足条件的素数p,则不能确定多项式$f(x)$是否可约.

3. 在"经典题型与解题方法归纳"的"题型4 艾森斯坦判别法及其应用"中给出了艾森斯坦判别法的一个扩大的应用类型.

*§10 多元多项式

知识点 多元多项式及其字典排列法

1. 多元多项式的定义及运算是一元多项式的推广. 但是,在多元多项式中存在很多次数相同的项.

2. 如果n元非负整数列$(k_1,k_2,\cdots,k_n)$与$(l_1,l_2,\cdots,l_n)$中第一个出现的$k_i-l_i\neq 0$,且$k_i>l_i$,即$k_1-l_1,k_2-l_2,\cdots,k_n-l_n$中第一个不为零的数是正的,则称项$x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$先于项$x_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$. n元多项式的各项按这样排列次序时称为字典排列法.

按字典排列法写出的第一个系数不为零的单项式称为多项式的首项.

3. 两个非零多项式的乘积的首项等于乘式首项的乘积,从而乘法的消去律在多元多项式中仍然成立.

4. 多元多项式也可以按照齐次项进行排列,这种排法在多元多项式的因式分解中比较方便.

*§11 对称多项式

知识点 对称多项式及对称多项式基本定理

1. 一元多项式根与系数的关系(韦达定理)

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$,其 n 个复根为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,即

$$f(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n),$$

其中 a_n 为 $f(x)$ 的首项系数. $f(x)$ 的根与系数的关系为

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n};\\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n=\dfrac{a_{n-2}}{a_n};\\ \qquad\cdots\cdots\\ \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}+\cdots+\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n=(-1)^{n-1}\dfrac{a_1}{a_n};\\ \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=(-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}.\end{cases}$$

2. 初等对称多项式 $\sigma_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中一切 k 个可能乘积的和,因此,σ_k 共有 C_n^k 项.

3. 对称多项式基本定理(教材的定理 15)的证明给出了通过将对称多项式的首项表成初等对称多项式的单项式的首项,由此逐步降低次数而将多项式表达成初等对称多项式的方法(也可见本章"历年考研真题精析"的例 4).

经典题型与解题方法归纳

题型 1 多项式互素的判别与应用

题型解析: 由多项式互素得到的结论比较多,因此,互素往往成为考查的重点. 与多项式互素相关的结论有:

(1)两个多项式 $f(x),g(x)$ 互素的充分必要条件是存在多项式 $u(x),v(x)$,使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1.$$

这个可以认为是两个多项式互素的等价定义,在一些题目中会反复应用

(2)如果 $(f(x),g(x))=1$,且 $f(x)\mid g(x)h(x)$,那么 $f(x)\mid h(x)$.

(3)如果 $f_1(x)\mid g(x),f_2(x)\mid g(x)$,且 $(f_1(x),f_2(x))=1$,那么 $f_1(x)f_2(x)\mid g(x)$.

(4)设 $(f(x),g(x))=d(x)$,且 $f(x)=d(x)f_1(x),g(x)=d(x)g_1(x)$,则

$$(f_1(x),g_1(x))=1.$$

(5)如果 $(f_1(x),g(x))=1,(f_2(x),g(x))=1$,那么 $(f_1(x)f_2(x),g(x))=1$.

例 1 设 $(f(x),g(x))=1$,证明:

$$(f(x)g(x)(f(x)+g(x)),f(x)g(x)+f(x)+g(x))=1.$$

证明：由于$(f(x),g(x))=1$，故$(f(x),f(x)+g(x))=1$，$(g(x),f(x)+g(x))=1$.

由互素的性质，得到$(f(x)g(x),\ f(x)+g(x))=1$.

从而
$$(f(x)g(x),\ f(x)g(x)+f(x)+g(x))=1,$$
$$(f(x)+g(x),\ f(x)g(x)+f(x)+g(x))=1.$$

再利用互素的性质，有
$$(f(x)g(x)(f(x)+g(x)),\ f(x)g(x)+f(x)+g(x))=1.$$

『方法技巧』对互素多项式性质的灵活应用的考查.

例 2　对于任意的非负整数 n，令 $f_n(x)=x^{n+2}-(x+1)^{2n+1}$，证明：
$$(f_n(x),\ x^2+x+1)=1.$$

『解题提示』因为这是针对任意非负整数的结论，可以考虑利用数学归纳法.

证明：当 $n=0$ 时，$f_0(x)=x^2-x-1$. 显然有
$$(f_0(x),\ x^2+x+1)=(x^2-x-1,\ x^2+x+1)=1.$$

假设$(f_{n-1}(x),\ x^2+x+1)=1$ 结论成立，即
$$(x^{n+1}-(x+1)^{2n-1},\ x^2+x+1)=1.$$

将 $f_n(x)$变形，得
$$\begin{aligned}f_n(x)&=x^{n+2}-(x+1)^{2n+1}\\&=x[x^{n+1}-(x+1)^{2n-1}]+x(x+1)^{2n-1}-(x+1)^{2n+1}\\&=xf_{n-1}(x)-(x+1)^{2n-1}(x^2+x+1).\end{aligned}$$

由于$(x,\ x^2+x+1)=1$，$(f_{n-1}(x),\ x^2+x+1)=1$，所以，根据多项式互素的性质，可知
$$(xf_{n-1}(x),\ x^2+x+1)=1.$$

于是$(f_n(x),\ x^2+x+1)=(xf_{n-1}(x)-(x+1)^{2n-1}(x^2+x+1),\ x^2+x+1)=1$.

例 3　证明：对于任意的正整数 n，都存在多项式 $f(x)$，使得
$$(x-1)^n\,|\,f(x)+1,\quad (x+1)^n\,|\,f(x)-1.$$

『解题提示』这个题目是寻求一个满足条件的多项式，条件就是 $f(x)$等于$(x-1)^n$ 的某个倍式减去 1，也等于$(x+1)^n$ 的某个倍式加上 1，即存在多项式 $g(x)$，$h(x)$，使得
$$f(x)=g(x)(x-1)^n-1=h(x)(x+1)^n+1,$$
即$\dfrac{1}{2}g(x)(x-1)^n-\dfrac{1}{2}h(x)(x+1)^n=1$.

注意到这是两个多项式互素的充分必要条件，于是，证明就可以由$(x-1)^n$ 和$(x+1)^n$ 是互素着手.

证明：显然$(x-1,x+1)=1$，从而对于任意的正整数 n，有$(x-1,(x+1)^n)=1$，进一步有
$$((x-1)^n,\ (x+1)^n)=1.$$

于是，存在多项式 $u(x)$，$v(x)$，使得 $u(x)(x-1)^n+v(x)(x+1)^n=1$，

将上式两边都乘以 2，得 $2u(x)(x-1)^n+2v(x)(x+1)^n=2$，

移项得 $2u(x)(x-1)^n-1=1-2v(x)(x+1)^n$.

令 $f(x)=2u(x)(x-1)^n-1=1-2v(x)(x+1)^n$，则
$$(x-1)^n\,|\,f(x)+1,\quad (x+1)^n\,|\,f(x)-1.$$

『方法技巧』这个题目中发现$(x-1)^n$ 和$(x+1)^n$ 是互素的尤为重要，此时就可以利用互素的充分必要条件得到 $u(x)(x-1)^n+v(x)(x+1)^n=1$ 这个等式，对其变形就得到了结论所需要的多项式.

题型2 重因式的判别

题型解析：如果能够将多项式 $f(x)$ 分解成标准分解式，很容易确定其重因式. 但是没有一般的方法求一个多项式的标准分解式，通常，我们借助微商确定一个多项式是否有重因式. 有这样的结论：

不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式的充分必要条件为 $p(x)$ 是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公因式，或者说，$f(x)$ 没有重因式的充分必要条件是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 互素.

特别地，在复数域上 $f(x)$ 没有重根的充分必要条件是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 互素.

另外，$\dfrac{f(x)}{(f(x),f'(x))}$ 与 $f(x)$ 有相同的因式，但没有任何重因式.

例4 设 $f(x)$ 是数域 P 上一个 $n(n\geqslant 1)$ 次多项式，证明：$f'(x)\mid f(x)$ 的充分必要条件是 $f(x)=a(x-b)^n$，$a,b\in P$ 且 $a\neq 0$.

证明：充分性. 设 $f(x)=a(x-b)^n$，$a,b\in P$ 且 $a\neq 0$，则 $f'(x)=na(x-b)^{n-1}$，于是 $f'(x)\mid f(x)$.

必要性. 因为 $f'(x)\mid f(x)$，且 $\partial(f'(x))=\partial(f(x))-1$，因此 $nf(x)=(x-b)f'(x)$，两边逐次求导，并移项得

$$(n-1)f'(x)=(x-b)f''(x),$$
$$(n-2)f''(x)=(x-b)f'''(x),$$
$$\cdots\cdots$$
$$2f^{(n-2)}(x)=(x-b)f^{(n-1)}(x),$$
$$f^{(n-1)}(x)=(x-b)f^{(n)}(x),$$

而 $f^{(n)}(x)=n!a$，其中 a 为 $f(x)$ 的首项系数. 上面 n 个式子从下往上逐项代入，即得到

$$f(x)=a(x-b)^n.$$

『方法技巧』这里根据微商的定义，确定出 $nf(x)=(x-b)f'(x)$ 比较关键.

例5 设 $f(x)=x^4+5x^3+9x^2+7x+2$，判断 $f(x)$ 是否有重因式，并求 $f(x)$ 的标准分解式.

解：显然 $f'(x)=4x^3+15x^2+18x+7$，利用辗转相除法，得到

$$(f(x),f'(x))=x^2+2x+1=(x+1)^2.$$

因此 $f(x)$ 有重因式 $x+1$ 且重数为3.

又因为 $\dfrac{f(x)}{(f(x),f'(x))}=(x+1)(x+2)$，所以 $f(x)=(x+1)^3(x+2)$.

题型3 不可约多项式

题型解析：在复数域上不可约多项式都是一次的；实数域上的不可约多项式都是一次的或者二次的；而有理数域上存在任意次数的不可约的多项式，并且有理数域上多项式的因式分解问题可以归结为整系数多项式的因式分解.

对于证明一个多项式是不可约的，通常采用反证法，假设这个多项式可以分解成两个次数较低多项式的乘积，然后再寻求矛盾，从而否定假设.

例6 设 $p(x)$ 是数域 P 上一个次数大于0的多项式，证明：如果对于任意的多项式 $f(x)$，$g(x)$，由 $p(x)\mid f(x)g(x)$，可以推出 $p(x)\mid f(x)$ 或 $p(x)\mid g(x)$，那么 $p(x)$ 是不可约多项式.

证明：(反证法)假设 $p(x)$ 是可约的，即存在多项式 $p_1(x)$，$p_2(x)$，使得

$$p(x)=p_1(x)p_2(x),$$

且$\partial(p_1(x))<\partial(p(x))$，$\partial(p_2(x))<\partial(p(x))$.

显然 $p(x)\mid p_1(x)p_2(x)$，但是 $p(x)\nmid p_1(x)$且 $p(x)\nmid p_2(x)$，这与题设矛盾.

于是 $p(x)$是不可约多项式.

『特别提醒』这个命题的逆命题也是成立的，即：设 $p(x)$是不可约多项式，如果 $p(x)\mid f(x)g(x)$，那么或者 $p(x)\mid f(x)$，或者 $p(x)\mid g(x)$.

例 7　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是两两互不相同的整数，且 $f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)-1$. 证明：$f(x)$在有理数域上是不可约的.

证明：(反证法)假设 $f(x)$在有理数域上可约. 显然，$f(x)$首项系数为 1 且是整系数的，因此，存在整系数多项式 $g(x)$，$h(x)$，使得

$$f(x)=g(x)h(x),$$

且$\partial(g(x))<\partial(f(x))$，$\partial(h(x))<\partial(f(x))$.

因为 $f(\alpha_i)=-1,i=1,2,\cdots,n$，所以 $g(\alpha_i)h(\alpha_i)=-1,i=1,2,\cdots,n$.

又由于 $g(x)$，$h(x)$是整系数的，从而 $g(\alpha_i)$，$h(\alpha_i)$都是整数. 于是

$$g(\alpha_i)+h(\alpha_i)=0,i=1,2,\cdots,n.$$

因为 $g(\alpha_i)=1,h(\alpha_i)=-1$，或者 $g(\alpha_i)=-1,h(\alpha_i)=1$

而$\partial(g(x)+h(x))<\partial(f(x))=n$，故 $g(x)+h(x)=0$，可得

次数为 n 的多项式最多有 n 个根

$$f(x)=-g^2(x).$$

但$-g^2(x)$的首项系数必为负数，与 $f(x)$的首项系数矛盾.

因此，$f(x)$在有理数域上不可约.

『方法技巧』这里构造出辅助函数 $g(x)+h(x)$很重要.

题型 4　艾森斯坦判别法及其应用

题型解析：不是所有的题目都可以直接利用艾森斯坦判别法判断多项式 $f(x)$在有理数域是否可约，一些不能直接应用艾森斯坦判别法的题目，可以利用下面的结论进行变形：

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 是一个次数大于零的整系数多项式，b 是任意给定的整数. 令 $x=y+b$，得到

$$g(y)=f(y+b)=a_n(y+b)^n+a_{n-1}(y+b)^{n-1}+\cdots+a_0,$$

则 $f(x)$在有理数域上可约的充分必要条件是 $g(y)$在有理数域上可约.

事实上，若 $g(y)$在有理数域上可约，即 $g(y)=g_1(y)g_2(y)$，且$\partial(g_1(y))<\partial(g(y))$，$\partial(g_2(y))<\partial(g(y))$. 从而，用 $x-b$ 替换 $g(y)=f(y+b)$中的 y，得到 $f(x)=g(x-b)=g_1(x-b)g_2(x-b)$，于是 $f(x)$在有理数域上可约.

反之，若 $f(x)$在有理数域上可约，即 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$，且$\partial(f_1(x))<\partial(f(x))$，$\partial(f_2(x))<\partial(f(x))$. 从而 $g(y)=f(y+b)=f_1(y+b)f_2(y+b)$，也就是说，$g(y)$在有理数域上可约.

这个结论的逆否命题就是：$f(x)$在有理数域上不可约的充分必要条件是 $g(y)$在有理数域上不可约.

综上所述，针对一个整系数多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$，应用艾森斯坦判别法判断这个多项式是否在有理数域上可约的步骤如下：

(1)列出 a_0 的所有素因子，通过观察，如果存在一个素因子 p 满足艾森斯坦判别法的条件，那么就可判断 $f(x)$是不可约的；

(2)如果 a_0 的所有素因子都不满足艾森斯坦判别法的条件，选择适当的非零整数 b，令 $g(y)=f(y+b)$，使得可以利用艾森斯坦判别法判断 $g(y)$ 是不可约的，根据上面的结论，$f(x)$ 也是不可约的.

例 8 判断下列多项式在有理数域上是否可约：

(1) $x^5-2x^3+8x^2-6$；

(2) $x^4+4x^3+6x^2+4x+4$；

(3) x^4-6x^2+1.

『解题提示』判别整系数多项式在有理数域上是否可约，可以首先选择艾森斯坦判别法，若不能直接利用艾森斯坦判别法，则或者对多项式进行适当变形，再应用艾森斯坦判别法，或者选择其他方法进行判别.

解：(1)取 $p=2$，由于 $2\mid -2, 2\mid 8, 2\mid -6$，但 $2\nmid 1, 2^2\nmid -6$，因此，由艾森斯坦判别法知，原多项式在有理数域上不可约.

(2)设 $f(x)=x^4+4x^3+6x^2+4x+4$. 通过观察 4 的素因子只有 2，但是 2 不满足艾森斯坦判别法的条件，故不能直接利用艾森斯坦判别法.

但是，显然 $f(x)=(x+1)^4+3$，而 y^4+3 满足艾森斯坦判别法的条件.

于是，令 $x=y-1$，则 $g(y)=f(y-1)=y^4+3$，

这时 $g(y)=y^4+3$ 在有理数域上是不可约的，因此 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

(3)设 $f(x)=x^4-6x^2+1$. 通过验证，这个多项式不能直接应用艾森斯坦判别法，也不能简单地找到一个合适的变形，并且这个多项式没有有理根. 若 $f(x)$ 在有理数域上可约，则 $f(x)$ 必能分解成两个不可约的二次因式的乘积，不妨设

$$f(x)=(x^2+ax+1)(x^2+bx+1) \quad 或 \quad f(x)=(x^2+ax-1)(x^2+bx-1),$$

其中 a,b 为整数. 对第一个式子，比较系数得到 $\begin{cases} a+b=0, \\ ab+2=-6. \end{cases}$

这个方程组是没有整数解的，因此，与 a,b 为整数矛盾.

同样的讨论，对第二个式子也会得到类似的矛盾. 于是 $f(x)$ 在有理数域上是不可约的.

『特别提醒』艾森斯坦判别法仅是一个判别整系数多项式在有理数域上不可约的充分条件，但并非必要条件. 也就是说，如果一个整系数多项式不满足此判别法，则可能是可约的，也可能是不可约的.

例 9 设 p 是一个素数，证明分圆多项式 $f(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$ 在有理数域上是不可约的.

『解题提示』这是整系数多项式，但是不存在素数满足艾森斯坦判别法的条件. 因此，要寻求适当的 b，对多项式进行变形. 注意到

$$(x-1)f(x)=(x-1)(x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1)=x^p-1,$$

故 $f(x)=\dfrac{x^p-1}{x-1}$. 所以，可以令 $x=y+1$，将多项式变形成另外一个整系数多项式.

证明：令 $x=y+1$，得到

$$g(y)=f(y+1)=\frac{(y+1)^p-1}{(y+1)-1}=y^{p-1}+C_p^{p-1}y^{p-2}+\cdots+C_p^2y+C_p^1.$$

对素数 p 应用艾森斯坦判别法，

由于 $C_p^i=\dfrac{p!}{i!(p-i)!}$，当 $1\leqslant i\leqslant p-1$ 时，素数 $p\nmid i!(p-i)!$，而 C_p^i 是整数，因此 $C_p^i=\dfrac{p!}{i!(p-i)!}$ 中必有因数 p