



普通高等教育农业部“十二五”规划教材
全国高等农林院校“十二五”规划教材



AODENG SHUXUE

高等数学

于晓秋 董继学◎主编

 中国农业出版社

普通高等教育农业部“十二五”规划教材
全国高等农林院校“十二五”规划教材

高等数学

于晓秋 董继学 主编

中国农业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学 / 于晓秋, 董继学主编. —北京: 中国农业出版社, 2011. 11

普通高等教育农业部“十二五”规划教材 全国高等农林院校“十二五”规划教材

ISBN 978 - 7 - 109 - 15767 - 5

I. ①高… II. ①于…②董… III. ①高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 198658 号

中国农业出版社出版

(北京市朝阳区农展馆北路 2 号)

(邮政编码 100125)

策划编辑 朱 雷 魏明龙

文字编辑 魏明龙

人民教育出版社印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行

2012 年 8 月第 1 版 2012 年 8 月北京第 1 次印刷

开本: 787mm×1092mm 1/16 印张: 23.75

字数: 563 千字

定价: 38.00 元

(凡本版图书出现印刷、装订错误, 请向出版社发行部调换)

编写人员名单

主 编 于晓秋 董继学

副主编 丁艳清

编 者 于晓秋 董继学 丁艳清

周晓晶 张巧生 范雪飞

邓廷勇

主 审 刘振忠

内 容 简 介

本教材是普通高等教育农业部“十二五”规划教材，同时也是全国高等农林院校“十二五”规划教材。编者根据多年的教学实践，在汲取众多高等数学教材经验后，按照《国家中长期人才发展规划纲要(2010—2020年)》，以服务人才培养为目标，结合农学类、管理类高等数学教学基本要求及考研大纲编写而成。

本教材共分为十一章，主要内容有：函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，多元函数微分学，二重积分，微分方程，差分方程与无穷级数，微积分数学实验。本教材内容由浅入深，叙述详细，例题较多，便于自学。书中还增加了许多和实际生活相关的例题和习题，每一章后均附本章学习要点，在第十一章中介绍了微积分数学实验，突出应用数学能力与基本素质的培养，体现数学建模思想，服务后续课程，衔接考研思路，增强了本教材的实用性，有助于学生综合能力的提高。

本教材可作为高等院校农、林、牧、生物、经管、财会等专业的教材，也可作为各类专业技术人员的参考书目。

前 言

为了贯彻《国家中长期人才发展规划纲要》，全面提高人才培养质量，推动教育事业科学发展，提高教育现代化水平，我们组织编写了这本教材。

数学是研究客观世界数量关系和空间形式的科学，它被人们公认为是科学的基础。尤其是信息化、数字化的 21 世纪，数学越来越显示出它的重要性，这不仅因为数学为各个科学领域提供了工具，更重要的是它为各个科学领域提供了思想方法。高等数学是学生进入大学后学习的第一门数学课程，是一门重要通识必修课，是学生学习有关专业知识的重要基础，它在培养学生的数学思维模式、拓展学生的思维空间、提高学生的数学技能和创新意识等方面起着十分重要的作用。

本教材具有以下几个方面特点：

1. 在适应性上，本教材针对我国高等教育实行大众化教育和应用型人才培养的实际，考虑了普通农业院校学生的实际水平，本着起点适当、难度分散处理，注重理论与生产、生活实际紧密联系的原则，编写了本教材，适合于作为普通农林院校特别是农林院校的农科类、管理类等专业的高等数学教材。

2. 在内容上，我们首先注意保持数学学科的科学性、系统性，但在引入一些概念时尽可能采用学生易于接受的方式叙述，对个别冗长、繁琐的推理略去，而更突出有关理论、方法的应用和经济数学模型的介绍。其次注意了后继专业课程的需要，并考虑学生继续深造的需要，在每章总复习题中适当增加了农科类、管理类近十年考研题，满足对数学基础要求较高的学生需求。最后在第十一章中增加了微积分数学实验，使学生不仅知道怎样在计算机上实现数学的推导、计算，同时还知道怎样将自己的想法通过计算机去完成，达到扩大学生视野和提高学生动手能力的目的。

3. 在实践上，书中注意到数学知识的实际应用，给出了数学应用的经典例子和在社会生活、农林科学和经济方面的实例。这样使学生在学完基本的数学知识后，不但知道所学的数学知识有什么用，而且还知道怎样用。达到在培养

学生数学应用能力的同时，激发了学生的创造潜能。

4. 在趣味性上，在部分章节后面增加了一些数学家的故事，使学生在学高等数学基础知识的同时，了解数学史发展的过程，增强学生的学习兴趣，激发对数学知识的探索欲。

本教材的编写分工如下：黑龙江八一农垦大学于晓秋教授、董继学副教授负责提出全书编写的总体思路，并担任主编。具体参加编写工作的有：黑龙江八一农垦大学的丁艳清副教授负责第一、六章，董继学副教授负责第二、三、四章，周晓晶讲师负责第五章、各章的数学家的故事和习题参考答案，张巧生讲师负责第七、十章，于晓秋教授负责第八、九章，范雪飞讲师负责第十一章第一节到第三节，邓廷勇讲师负责第十一章第四节到第七节。本教材由东北农业大学理学院的刘振忠教授担任主审。最后，由于晓秋教授对全书进行了统稿工作。

本教材在编写过程中得到黑龙江八一农垦大学数学系全体教师的热心帮助。本教材在出版过程中得到黑龙江八一农垦大学教材科和学院领导的大力支持，在此表示感谢。

编者

2011年6月

目 录

前言

第一章 函数、极限与连续	1
第一节 函数	1
一、预备知识	1
二、函数的概念及表示法	2
三、函数的特性	5
四、反函数	6
五、基本初等函数	7
六、复合函数	9
七、初等函数	10
习题 1-1	11
第二节 极限的概念及性质	12
一、数列的极限	12
二、函数的极限	16
习题 1-2	20
第三节 无穷小与无穷大	20
一、无穷小	20
二、无穷大	22
三、无穷小和无穷大的关系	23
习题 1-3	23
第四节 极限的运算法则	23
一、极限的运算法则	23
二、极限求法举例	24
三、复合函数的极限运算法则	26
习题 1-4	27
第五节 极限存在准则 两个重要极限	27
一、极限存在准则	27
二、两个重要极限	28
习题 1-5	30
第六节 无穷小的比较	31
习题 1-6	33

第七节 函数的连续与间断	33
一、函数的连续性	33
二、函数的间断点	35
习题 1-7	36
第八节 初等函数的连续性	37
一、连续函数的四则运算法则	37
二、反函数的连续性	37
三、复合函数的连续性	37
四、初等函数的连续性	38
习题 1-8	39
第九节 闭区间上连续函数的性质	40
习题 1-9	41
本章学习要点	41
总复习题一	42
第二章 导数与微分	44
第一节 导数的概念	44
一、问题的提出	44
二、导数的概念	45
三、单侧导数	46
四、几个基本初等函数的导数	47
五、导数的几何意义	49
六、函数的可导性与连续性的关系	49
习题 2-1	50
第二节 四则运算及反函数的求导法则	51
一、四则运算的求导法则	51
二、反函数的求导法则	53
习题 2-2	55
第三节 复合函数的导数及初等函数求导	55
一、复合函数的求导法则	55
二、初等函数的导数	57
习题 2-3	59
第四节 隐函数及参数方程所确定的函数的导数	60
一、隐函数的导数	60
二、对数求导法	61
三、由参数方程所确定的函数的导数	62
习题 2-4	63

第五节 高阶导数	64
一、显函数的高阶导数求法	64
二、隐函数的高阶导数求法	66
三、参数方程确定的函数的高阶导数	66
习题 2-5	67
第六节 函数的微分及应用	67
一、微分的定义	67
二、微分的几何意义	69
三、微分公式与微分运算法则	69
四、微分在近似计算中的应用	70
习题 2-6	72
本章学习要点	72
总复习题二	74
数学家的故事	75
第三章 中值定理与导数的应用	76
第一节 微分中值定理	76
一、罗尔定理	76
二、拉格朗日中值定理	78
三、柯西中值定理	80
习题 3-1	81
第二节 洛必达法则	81
一、 $\frac{0}{0}$ 型未定式	81
二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	83
三、其他形式的未定式	84
习题 3-2	85
第三节 泰勒(Taylor)公式	86
一、泰勒公式	86
二、麦克劳林公式	87
习题 3-3	88
第四节 函数单调性与曲线的凹凸性	89
一、函数的单调性	89
二、曲线的凹凸性	90
三、拐点	91
习题 3-4	92
第五节 函数的极值及最值	93

一、函数的极值	93
二、最值	96
习题 3-5	98
第六节 函数图形描绘	99
一、渐近线	99
二、函数图形描绘	100
习题 3-6	102
本章学习要点	102
总复习题三	102
数学家的故事	104
第四章 不定积分	106
第一节 不定积分的基本概念与性质	106
一、原函数与不定积分的概念	106
二、基本积分表	107
三、不定积分的性质	108
习题 4-1	110
第二节 换元积分法	110
一、第一类换元积分法	110
二、第二类换元积分法	115
习题 4-2	118
第三节 分部积分法	119
习题 4-3	122
第四节 几种特殊函数的不定积分	123
一、有理函数积分	123
二、三角函数有理式的积分	125
三、简单无理函数的积分	126
习题 4-4	127
本章学习要点	128
总复习题四	128
数学家的故事	129
第五章 定积分及其应用	130
第一节 定积分的概念与性质	130
一、定积分问题举例	130
二、定积分的定义	132
三、定积分的几何意义	133

四、定积分的性质	134
习题 5-1	137
第二节 微积分基本定理	137
一、变速直线运动中位置函数与速度函数之间的关系	137
二、积分上限的函数及其导数	138
三、牛顿—莱布尼茨公式	139
习题 5-2	141
第三节 定积分的计算	142
一、定积分的换元积分法	142
二、定积分的分部积分法	145
习题 5-3	146
第四节 定积分的近似计算	148
一、矩形法	148
二、梯形法	148
习题 5-4	150
第五节 定积分的应用	150
一、定积分的微元法	150
二、平面图形的面积	152
三、体积	155
四、平面曲线的弧长	157
五、在经济学中的应用	158
六、变力做功	159
习题 5-5	160
第六节 广义积分	162
一、无穷区间上的广义积分	162
二、无界函数的广义积分	164
习题 5-6	165
本章学习要点	166
总复习题五	167
数学家的故事	169
第六章 多元函数微分学	171
第一节 空间解析几何的基础知识	171
一、空间直角坐标系	171
二、空间平面	173
三、曲面	174
四、空间曲线及投影	178

习题 6-1	180
第二节 多元函数的概念	181
一、邻域与区域	181
二、多元函数的概念	182
三、多元函数的极限	184
四、多元函数的连续性	185
习题 6-2	186
第三节 偏导数	186
一、偏导数的定义及其计算方法	186
二、高阶偏导数	189
习题 6-3	190
第四节 全微分及其应用	191
一、全微分的概念	191
二、全微分在近似计算中的应用	193
习题 6-4	194
第五节 多元复合函数的求导法则	194
一、中间函数为一元函数的情形	194
二、中间函数为二元函数的情形	195
三、一种特殊的情形	196
习题 6-5	197
第六节 隐函数的求导公式	197
习题 6-6	199
第七节 多元函数的极值	199
一、多元函数的极值	199
二、最大值与最小值	201
三、条件极值	202
习题 6-7	203
本章学习要点	203
总复习题六	205
第七章 二重积分	207
第一节 二重积分的概念与性质	207
一、二重积分的概念	207
二、二重积分的性质	209
习题 7-1	210
第二节 二重积分的计算	211
一、直角坐标系下二重积分的计算	211

二、极坐标系下二重积分的计算	216
习题 7-2	219
第三节 二重积分的应用	220
一、空间几何体的体积	220
二、曲面的面积	221
三、平面薄片的质量	222
习题 7-3	223
本章学习要点	223
总复习题七	224
第八章 微分方程	226
第一节 微分方程的基本概念	226
习题 8-1	229
第二节 可分离变量的微分方程	229
习题 8-2	232
第三节 齐次方程	232
习题 8-3	234
第四节 一阶线性微分方程	234
一、一阶线性微分方程	234
二、伯努利方程	237
习题 8-4	238
第五节 可降阶的高阶微分方程	239
一、 $y''=f(x)$ 型的微分方程	239
二、 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程	240
三、 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程	241
习题 8-5	242
第六节 二阶线性微分方程	242
一、二阶常系数齐次线性微分方程	243
二、二阶常系数非齐次线性微分方程	246
习题 8-6	248
* 第七节 微分方程模型	249
本章学习要点	251
总复习题八	252
数学家的故事	253
第九章 差分方程	255
第一节 差分方程的基本概念	255

一、差分概念	255
二、差分方程	256
三、差分方程的解	257
习题 9-1	258
第二节 一阶常系数线性差分方程	258
一、一阶常系数齐次线性差分方程	259
二、一阶常系数非齐次线性差分方程	260
习题 9-2	262
第三节 二阶常系数线性差分方程	262
一、二阶常系数齐次线性差分方程	262
二、二阶常系数非齐次线性差分方程	264
习题 9-3	265
第四节 差分方程的简单应用	265
一、筹措教育经费方面	265
二、分期偿还贷款方面	266
习题 9-4	267
本章学习要点	267
总复习题九	268
第十章 无穷级数	269
第一节 无穷级数的概念与性质	269
一、无穷级数的概念	269
二、收敛级数的基本性质	273
习题 10-1	274
第二节 常数项级数的审敛法	274
一、正项级数及其审敛法	274
二、交错级数及其审敛法	278
三、绝对收敛与条件收敛	279
习题 10-2	280
第三节 幂级数	281
一、函数项级数	281
二、幂级数及其收敛性	281
三、幂级数的基本性质	284
习题 10-3	286
第四节 函数的幂级数展开	286
一、泰勒级数的概念	286
二、函数展开成幂级数	287

习题 10-4	291
第五节 函数的幂级数展开式的应用	292
一、近似计算	292
二、欧拉公式	294
习题 10-5	295
本章学习要点	295
总复习题十	297
数学家的故事	298
第十一章 微积分数学实验	300
第一节 MATLAB 基本用法	300
第二节 函数与极限实验	313
第三节 导数与微分实验	320
第四节 不定积分、定积分和广义积分实验	323
第五节 多元函数微积分实验	327
第六节 微分方程实验	333
第七节 泰勒级数实验	335
习题参考答案	339
主要参考文献	361

第一章 函数、极限与连续

高等数学这门课程的主要内容是微积分及其应用，而微积分又与中学里学的初等数学是有重大区别的。初等数学研究的对象是不变的量即常量，而高等数学研究的对象则是变动的量即变量，它是以极限作为基本分析方法的一门数学课程。本章先复习函数的定义、性质和基本初等函数，介绍复合函数的概念。在此基础上，讨论函数的极限和函数的连续性。

第一节 函 数

一、预备知识

1. 集合

集合是数学中的一个基本概念，是指具有某种特定性质的事物总称。构成这个集合的事物称为该集合的元素。通常用大写英文字母表示集合，用小写英文字母表示集合的元素。

若事物 a 是集合 M 的元素，记作 $a \in M$ (读作 a 属于 M)；若事物 a 不是集合 M 的元素，记作 $a \notin M$ (读作 a 不属于 M)。

由有限个元素组成的集合称为有限集。有限集通常用列举法表示，如由元素 b_1, b_2, \dots, b_n 组成的集合 B ，可记作 $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ 。由无穷多个元素组成的集合称为无限集。无限集通常用描述法表示，如坐标满足方程 $x^2 + y^2 = 1$ 的点 (x, y) 所组成的集合 M ，可记作 $M = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ 。

不含任何元素的集合称为空集，记作 \emptyset 。如在实数范围内，集合 $M = \{x \mid x^2 + 1 = 0\}$ 就是空集，因为满足条件 $x^2 + 1 = 0$ 的实数是不存在的。

本书用到的集合主要是数集，即元素均是数的集合。如果没有特别声明，各章节中提到的数均为实数。在中学里已经学习过，实数与数轴上的点之间可以建立一一对应的关系。所以有时为了突出几何直观，就把数 x 称为点 x ，数集也可称为数轴上的点集。有时还可以根据点集的几何特点来对数集命名，如区间、邻域。

2. 区间

区间是用得较多的一类数集，它是表达变量具有连续变化范围的一个概念。

定义 1 设 a, b 都是实数，且 $a < b$ ，数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 称为开区间，记为 (a, b) ，即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\},$$

其中 a, b 称为开区间 (a, b) 的端点，且 $a \notin (a, b)$ ， $b \notin (a, b)$ 。数集 $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间，记为 $[a, b]$ ，即

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\},$$

其中 a, b 称为闭区间 $[a, b]$ 的端点，且 $a \in [a, b]$ ， $b \in [a, b]$ 。类似地，数集 $\{x \mid a < x \leq b\}$ 和 $\{x \mid a \leq x < b\}$ 称为半开半闭区间，分别记为 $(a, b]$ 和 $[a, b)$ ，即

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}, [a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}.$$