21世纪大学数学精品教材

高等数学

（上）

余胜春　张平芳　主编

科学出版社

21 世纪大学数学精品教材

高 等 数 学

（上）

余胜春　张平芳　主编

科 学 出 版 社

北 京

内容简介

本书是依照教育部“高等职业技术学院高等数学教学基本要求”以及“专升本考试大纲”来编写的. 全书分为上、下两册. 上册为一元微积分部分；下册包括向量代数与空间解析几何、二元微积分、微分方程和差分方程、无穷级数等. 对基本内容的讲解做到了内容精炼、结构严谨、通俗易懂；例题的选取循序渐进；每章后都配备适量的练习题，书末配有习题答案与提示.

本书可以作为普通高等专科学校或高等职业技术学院理工类、经管类专业高等数学课程的教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上/余胜春，张平芳主编. 一北京：科学出版社，2012. 8
21 世纪大学数学精品教材
ISBN 978-7-03-035286-6

Ⅰ.高…　Ⅱ.①余…　②张…　Ⅲ.①高等数学一高等学校一教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 187174 号

责任编辑：高　嵘/责任校对：王望容
责任印制：彭　超/封面设计：苏　波

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
武汉中科兴业印务有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
开本：B5(720×1000)
2012 年 8 月第　一　版　印张：13 3/4
2012 年 8 月第一次印刷　字数：262 000
定价：24. 50 元

《高等数学》(上)编委会

主　编　余胜春　张平芳
副主编　张青桥　李琳娜　张学英　丁咏梅
编　委　(按姓氏笔画排序)
丁咏梅　王　芬　尹水仿　李琳娜
余胜春　张　青　张平芳　张学英
张青桥　张艳红　胡　松　蒋　君

前　言

为了适应新时代的要求，我们组织了一批具有丰富的教学经验、长期教授高等数学的教师，共同研讨了教育部《高等职业技术学院高等数学教学基本要求》以及《专升本考试大纲》，结合当前教学实际，编写了这套教材.

本书力求对高等数学基本内容的讲解做到内容精炼、结构严谨、通俗易懂.

为了学生能更好地掌握所学知识，提高应用能力，在例题的选取上循序渐进，并在每章后都配备适量的习题，包括计算、求解、证明和应用等几个方面，主要是加强学生对基本概念、基本知识的理解和掌握，书末配有习题答案与提示.

为了扩大学生视野，使学生了解高等数学创立、发展的背景，加深学生对数学文化、数学思维的基本了解，在每章后对高等数学的创立、发展做出过伟大贡献的著名数学家做了简介，如高斯、牛顿、莱布尼茨等.

全书分为上、下两册. 上册为一元微积分部分；下册包括向量代数与空间解析几何、二元微积分、微分方程和差分方程、无穷级数等内容.

上册由余胜春、张平芳任主编，张青桥、李琳娜、张学英、丁咏梅任副主编；下册由尹水仿、张青任主编，蒋君、王芬、张艳红、胡松任副主编. 全书在编写过程中，由尹水仿、余胜春提出编写思路、编写提纲，由编写人员研究讨论确定编写方案. 全书由尹水仿、余胜春统稿、定稿.

由于编者水平有限，本书存在的不妥之处，恳请广大读者和同行提出批评、建议，以使其逐步完善.

编　者

2012 年 5 月

目　　录

第一章

函数与极限

函数关系就是变量之间的依赖关系，是高等数学的主要研究对象. 极限的概念、理论与方法是微积分学的理论基础，在高等数学中占有很重要的地位. 本章主要介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质.

第一节 函 数

一、集合与区间

集合是数学中的一个基本概念. 例如，某班的全体学生构成一个集合. 所谓集合(或简称集)是指具有某种特定性质的事物的总体. 组成这个集合的事物称为该集合的元素. 如果 a 是集合 M 的元素记作 $a\in M$(读作 a 属于 M)；如果 a 不是集合 M 的元素，记作 $a\notin M$(读作 a 不属于 M).

由有限个元素构成的集合称为有限集合；由无限个元素构成的集合称为无限集合.

通常我们用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合中的元素.

集合的表示方法通常有以下两种：一种是列举法，另一种是描述法.

(1) 列举法. 由有限个元素组成的集合可用列举出它的全体元素的方法表示. 例如，由元素 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 组成的集合 A，可记作

$$A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}.$$

(2) 描述法. 由无穷多个元素组成的集合，通常用如下记号表示：设 B 是具有某种特征的元素 x 的全体所组成的集合，就记作

$$B=\{x\mid x\ 所具有的特征\}.$$

例如，xOy 平面上以原点为中心，以 2 为半径的圆周上点的全体组成的集合记作

$$B=\{(x,y)\mid x,y\text{ 为实数},x^2+y^2=4\}.$$

以后用到的集合主要是数集，即元素都是数的集合. 如果没有特别声明，以后提到的数都是实数.

习惯上，全体实数组成的集合记作 $\mathbf{R}$；全体有理数组成的集合记作 $\mathbf{Q}$；全体整数组成的集合记作 $\mathbf{Z}$；全体自然数组成的集合记作 $\mathbf{N}$.

设 A,B 是两个集合，如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即若 $x\in A$，则必 $x\in B$，则称集合 A 是集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$(读作 A 包含于 B)，或 $B\supseteq A$(读作 B 包含 A).

如果集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，则称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$.

例如，集合 $A=\{-1,1\}$，集合

$$B=\{x\mid x^2-1=0,x\in\mathbf{R}\},$$

则 $A=B$.

如果 $A\subseteq B$，且 $A\neq B$，则称集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A\subset B$.

不含任何元素的集合称为空集，如 $\{x\mid x^2+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，空集记作 $\varnothing$，并规定空集是任何集合的子集.

集合的运算有

(1) 并集. 设 A,B 是两个集合，把这两个集合中的所有元素组成的集合称为 A 和 B 的并集，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

(2) 交集. 由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合，称为 A 和 B 的交集，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}.$$

(3) 差集. 由所有属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合，称为 A 和 B 的差集，记作 $A\backslash B$ 或 $A-B$，即

$$A\backslash B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}.$$

(4) 补集. 设 I 为全集，由所有属于 I 但不属于 A 的元素组成的集合，称为 A 的补集记作 A^C，即

$$A^C=\{x \mid x\in I,\text{且 } x\notin A\}.$$

区间是一类常用的数集，设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，集合 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为开区间，记作 (a,b)，即 $(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$；集合 $\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，记作 $[a,b]$，即 $[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$；集合 $\{x \mid a<x\leqslant b\}$ 称为左开右闭区间，记作 $(a,b]$；集合 $\{x \mid a\leqslant x<b\}$ 称为左闭右开区间，记作 $[a,b)$；$(a,b]$ 和 $[a,b)$ 统称为半开半闭区间.

以上区间都称为有限区间，数 $b-a$ 称为这些区间的长度，在数轴上把这些区间表示出来，如图 1-1-1 所示.

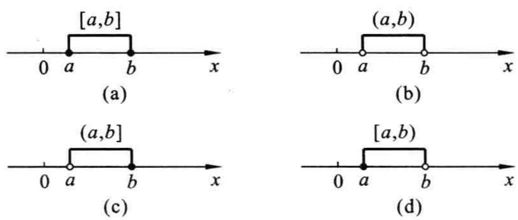

图 1-1-1

此外，还有无限区间，引进记号 $+\infty$（读作正无穷大）及 $-\infty$（读作负无穷大），则可类似表示无限区间：

$(a,+\infty)=\{x \mid x>a\}$，如图 1-1-2(a)所示；

$[a,+\infty)=\{x \mid x\geqslant a\}$，如图 1-1-2(b)所示；

$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$，如图 1-1-2(c)所示；

$(-\infty,b]=\{x \mid x\leqslant b\}$，如图 1-1-2(d)所示.

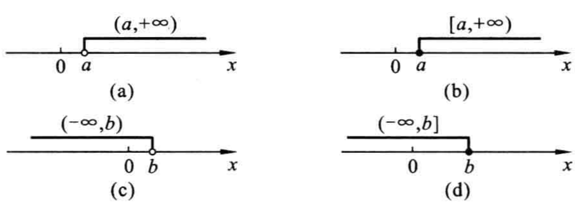

图 1-1-2

另外，全体实数的集合 **R** 记作 $(-\infty,+\infty)$，它也是无限区间.

邻域也是一个常用的概念，设 a 和 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，则称数集 $\{x \mid |x-a|<\delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域. 它表示与点 a 的距离小于 δ 的点的集合，记作 $U(a,\delta)$，即 $U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$.

点 a 称为这个邻域的中心，δ 称为这个邻域的半径，如图 1-1-3 所示.

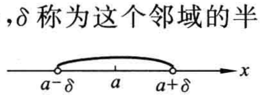

图 1-1-3

点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后的集合称为点 a 的去心 δ 邻域,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$ 即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\},$$

如图 1-1-4 所示.

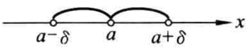

图 1-1-4

二、函数的概念

在自然现象的某个研究过程中,往往存在几个变量在同时变化着,这几个变量的变化并不是孤立的,而是相互联系着的,并且遵循着一定的变化规律. 在此,我们先讨论两个变量的情形.

例 1 边长为 x 的正方形的面积为

$$A=x^2.$$

这就是两个变量 A 和 x 之间的关系,当边长 x 在区间 $(0,+\infty)$ 内任取一个值时,由上式可以确定正方形的面积 A 的相应值.

例 2 在自由落体运动中,设物体下落的时间为 t,下落的距离为 s,假设开始下落的时刻 $t=0$,那么 s 和 t 之间的关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

其中,g 为重力加速度. 如果物体到达地面的时刻为 $t=T$,则 t 在区间 $[0,T]$ 上任取一个值时,由上式就可以确定出 s 的相应值.

在以上两个例子中都给出了一对变量之间的相依关系,这种相依关系确定了一种对应法则,根据这一法则,当其中一个变量在其变化范围内任取一个值时,另一个变量依照对应法则,有唯一确定的值与之对应. 两个变量之间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 1 设 D 是一个非空的实数集合,x 和 y 是两个变量,如果对于每一个实数 $x\in D$,变量 y 按照一定的法则总有一个确定的值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$. x 称为自变量,y 称为因变量,集合 D 称为函数的定义域.

对于 $x_0\in D$ 时,与 x_0 对应的 y 的值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值,记作 y_0 或 $f(x_0)$. 当 x 取遍 D 的所有值时,对应的函数值的全体构成的集合

$$W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数的值域.

函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可用其他字母，如 g,φ 或 F,G,Φ 等表示.

在实际问题中，函数的定义域是由问题的实际意义确定的，如在本节例 1 中，定义域 $D=(0,+\infty)$；例 2 中，定义域 $D=[0,T]$.

在数学中，如果不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用解析式表达的函数，这时约定函数的定义域就是使函数表达式有意义的自变量的取值范围.

例 3　求函数 $y=\ln(3-2x)$ 的定义域.

解　要使函数有意义，必须使 $3-2x>0$，即 $x<\frac{3}{2}$，所以函数 $y=\ln(3-2x)$ 的定义域为 $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$.

例 4　求函数 $y=\arccos\frac{x-1}{2}$ 的定义域.

解　要使函数有意义，必须使

$$\left|\frac{x-1}{2}\right|\leqslant 1,$$

即 $-1\leqslant x\leqslant 3$. 所以函数 $y=\arccos\frac{x-1}{2}$ 的定义域为 $[-1,3]$.

例 5　下列各对函数是否为同一函数，为什么？

(1) $f(x)=x-2, g(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$；

(2) $f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=x$.

解　(1)不相同，$f(x)=x-2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$；$g(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$ 的定义域为 $(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$. $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域不同，所以不是同一个函数.

(2)不相同，

$$f(x)=\sqrt{x^2}=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

当 $x<0$ 时 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的对应法则不同，所以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不是同一个函数.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，对于任取的 $x\in D$，对应的函数值为 $y=f(x)$，在平面直角坐标系中就确定一点 (x,y)，当 x 取遍定义域 D 上的每一个值时，就得到平面点集

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}.$$

这个点集称为函数 $y=f(x)$的图形.

例 6 函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

的图形,如图 1-1-5 所示.

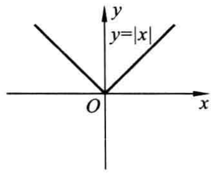

图 1-1-5

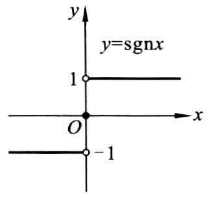

图 1-1-6

例 7 函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

称为符号函数,它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=\{-1,0,1\}$,它的图形如图 1-1-6 所示.

例 8 函数 $y=[x]$称为取整函数,其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数. 例如,

$$\left[\frac{2}{3}\right]=0,\quad [\pi]=3,\quad [-0.1]=-1,\quad [-2]=-2.$$

该函数定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=Z$,它的图形如图 1-1-7 所示,这个图形称为阶梯曲线.

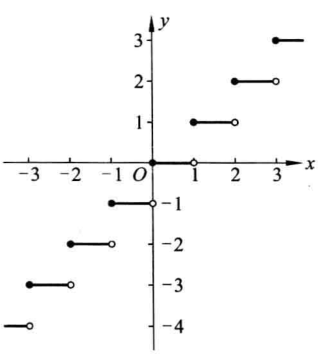

图 1-1-7

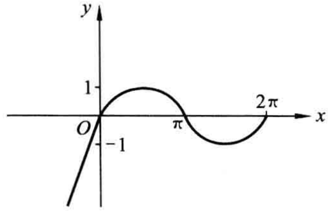

图 1-1-8

例 9　函数

$$y=f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant 2\pi,\\ 2x, & x<0\end{cases}$$

的图形如图 1-1-8 所示.

这个函数在其定义域的不同部分用不同的数学式子表示,这类函数我们称之为分段函数,需要注意的是,分段函数的定义域是自变量在这几部分取值的并集.例 9 中函数的定义域为 $D=(-\infty,2\pi]$. 在求分段函数的函数值时,应该把自变量的值代入相应的取值范围的表达式中进行计算,如例 9 中

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1,\quad f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\pi.$$

三、函数的几种特性

1. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有意义,如果对于区间 (a,b) 内任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调增加的,如图 1-1-9 所示;如果对于区间 (a,b) 内任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调减少的,如图 1-1-10 所示. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

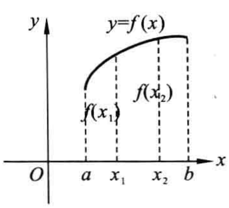

图 1-1-9

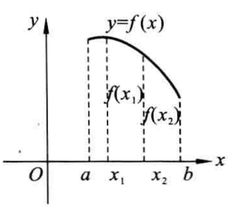

图 1-1-10

注　区间 (a,b) 换为闭区间或无穷区间等结论同样成立. 例如,$y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 是单调增加的. $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 是单调减少的,在 $(-\infty,0)$ 也是单调减少的.

2. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称(即若 $x\in D$,则必有 $-x\in D$),如果对于任一 $x\in D$,恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数. 如果对于任一 $x\in D$,恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.