

高中代数

第一册

教法 学法 考法

陈通鑫

段云鑫

廖明媚 编 著

三环出版社

高中一年级卷

教法 学法 考法

高中代数 第一册

陈通鑫 段云鑫 廖明媚 编 著

三环出版社

责任编辑 刘文武

封面设计 苏彦斌

教法 学法 考法

高中代数第一册

陈通鑫 段云鑫 廖明媚 编著

三环出版社出版

(海口市滨海大道花园新村20号)

新华书店首都发行所发行

河北省乐亭县印刷厂印刷

787×1092mm 1/32 印张11. 字数229千字

1992年2月第1版 1992年2月第1次印刷

标准书号: ISBN7-80564-808-5/G·566

印数 1—10000册

定价: 4.80元

高中一年一期卷总定价: 33元

前 言

教法、学法、考法是教育界的热点问题。“方法”虽然是一种手段，但却是达到最佳彼岸的桥梁。对此，关心教育的理论界和广大教师，潜心研究探讨，新的认识和理论成果层出不穷。广大学生也经常议论，为了提高学习效果，寄希望于良师的指点。

教法、学法、考法是系统工程，三者是不可分的整体，相互制约，相互依存，相互促进。

教学过程是师生双边活动的统一过程。教学活动的中心是学生，教和学都是为了尽快地增长知识，增长才干。教学活动的主体是学生，学生要经过自己的思维和实践，才能最后牢固地掌握知识，发展思维，提高能力，去认识世界改造世界。因此依据教学对象，选择科学的教学方法，缩短师生认识上的距离，以激发学生学习的积极性和主动性，及时满足全体学生对知识的渴求。要做到这一点，教师就必须充分了解学生的学习过程和学习过程中的心理活动，指导学生的学习方法，使教与学达到和谐统一，教学活动适应于学生的认识规律；学习活动适应于教学规律。考法是教与学的评价手段，最优的考法，无疑能激发师生的积极性，促进教学效果与学习效果的提高。

教学、学习和考试本应是一体的。教学和学习不是为了应试，复习考试也不应当脱离平日的教与学而搞突击。有丰富经验的教师是靠教学目标，形成知识结构和教学结构，靠能力的培养，发展学生的思维，指导学生进行素质和水平的

训练，并不断取得师生双方的反馈，进一步调整和发展教学过程。这些教师所教的学生基本知识扎实，能力较强，能举一反三，善于作知识迁移和应用，因此参加各种合格考试和选拔考试，成绩都是好的、稳定的。本书正是这种教与学方法的指导和研究。

基于上述认识，现组织部分教师，把他们多年的教学经验与理论研讨相融合，孕育出一套《教法·学法·考法》丛书，旨在促进教与学最优状态的形成，帮助学生有效地掌握学习。

该丛书，根据各科特点，按照知识结构顺序分块编写。每块知识内容，设有“教学目标”，“教法研讨”，“学法指导”，“解题方法”“考法探索”等栏目。所有内容都适于广大青少年的自学和阅读。

阅读“教学目标”，能了解学习要求。

阅读“教法研讨”，能了解教师怎样传授知识。

阅读“学法指导”，能知道怎样学习更加有效。

阅读“解题方法”，能知道怎样应用基础知识去分析解答书面问题。

阅读“考法探索”，可以进行学习的自我评价。

该丛书是在特级教师、北京景山学校校长崔孟明同志指导下编写的。作为新课题的尝试，一定有很多不足之处，欢迎同志们指正。

编者

1991.9.10

目 录

第一章 集合与函数

第一节 集合

〔教学目标〕	(1)
〔教法研讨〕	(2)
〔学法指导〕	(16)
〔解题方法〕	(18)
〔考法探索〕	(31)

第二节 映射与函数

〔教学目标〕	(37)
〔教法研讨〕	(37)
〔学法指导〕	(43)
〔解题方法〕	(44)
〔考法探索〕	(48)

第三节 幂函数

〔教学目标〕	(52)
〔教法研讨〕	(52)
〔学法指导〕	(76)
〔解题方法〕	(81)
〔考法探索〕	(86)

第四节 指数函数和对数函数

〔教学目标〕	(91)
〔教法研讨〕	(91)
〔学法指导〕	(107)
〔解题方法〕	(114)
〔考法探索〕	(120)

第二章 三角函数

〔教学目标〕	(126)
〔教法研讨〕	(127)
〔学法指导〕	(158)
〔解题方法〕	(168)
〔考法探索〕	(195)

第三章 两角和与差的三角函数

〔教学目标〕	(212)
〔教法研讨〕	(213)
〔学法指导〕	(267)
〔解题方法〕	(285)
〔考法探索〕	(321)

第一章 集合与函数

第一节 集 合

〔教学目标〕

一、识记与领会

1. 会描述集合的概念，牢记元素、子集、真子集、空集、集合相等、交集、并集、全集、补集的定义、符号表示法、读法及数学表达式。
2. 会画出子集、真子集、等集、交集、并集、全集、补集的文氏图，并用图判断集合间的关系。
3. 会根据集合的特征，判断一组对象是否构成集合。
4. 会按元集的个数对集合分类。
5. 能正确解释 0 ， $\{ 0 \}$ ， ϕ ， $\{ \phi \}$ 并说明它们之间的关系。

二、应用

1. 能用列举法、描述法及根据集合元素的特点选用适当的方法表示集合。
2. 能准确地用各类符号表示元素与集合间、集合与集合之间的关系。
3. 能写出含有少量元素的所有子集、真子集。
4. 能用集合表示某些数学命题并化简。
5. 能根据集合的概念、性质，由已知一些集合求集合

的交、并、补集或已知集合的关系求原集合。

6. 能用区间及集合的形式准确地表达一元二次不等式的解集。

三、分析与综合

1. 培养阅读能力。
2. 培养逻辑推理能力。
3. 培养综合运用能力。

〔教法研讨〕

一、学习集合的意义

在研究各种事物及事物之间的关系时，急切的需要一种用统一的观点和有力的手段处理研究对象。经过康托(Cantor, G)、策墨罗(Zermelo, E)和弗兰克尔(Fraenkel, A)等数学家的卓越工作，一部崭新的学科——集合论经过漫长的历史孕育，在十九世纪末终于诞生了。

因为集合描述的是一组对象的全体，通常用大写的拉丁字母表示集合，小写的拉丁字母表示集合中的元素即集合中的对象，从而使得字母的含义得到进一步的扩充，它可以表示数、点、图形、向量、矩陈、线性变换、概率中的事件，对策论的策略，计算机上的信号和电路的开闭等等，大到宏观世界银河系中的星球，小到微观世界的粒子等各种各样的研究对象，还可以通过字母运算表达它们的各种演变，并从字母代数研究中抽象出其中的共同规律，发现和解决各种问题。

另外数理逻辑、近世代数、实变函数、泛函分析，概率

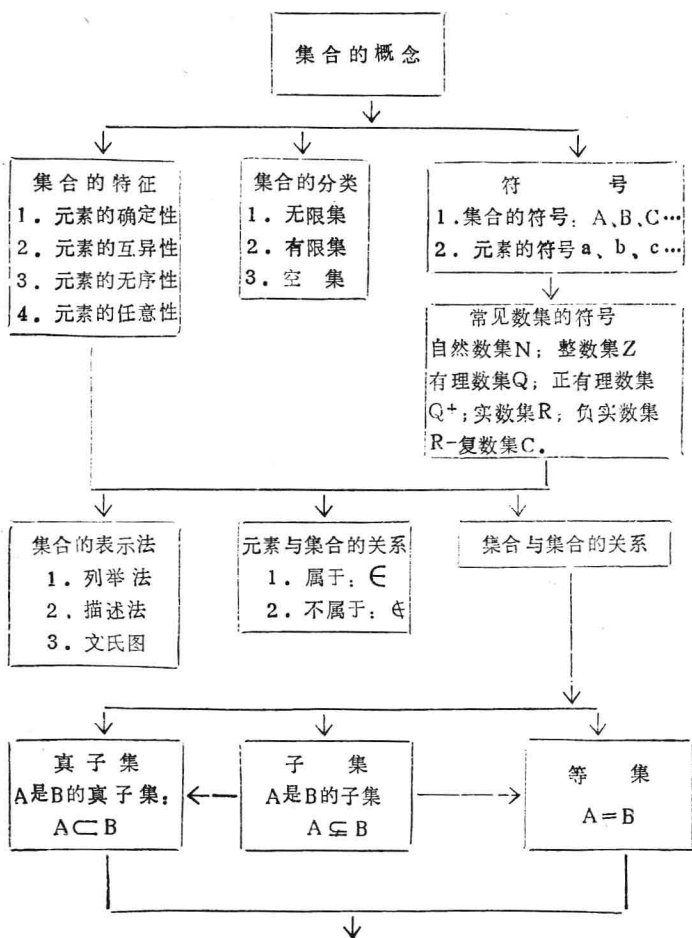
统计、拓扑学都是建立在集合理论的基础上，集合论的概念，思想和方法几乎渗透了现代数学的每个分支，苏联数学家柯尔莫戈洛夫(Колмогоров)在阐述〈现代数学〉的概念时说：“所有数学的基础是纯集合论”。

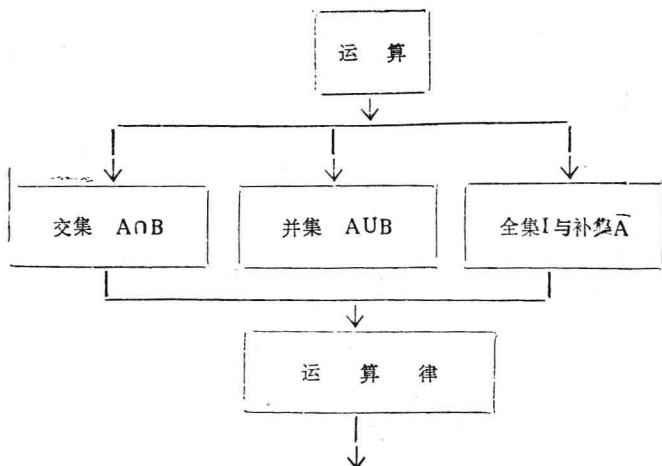
所以，集合论的产生，不仅使数形结合达到更高级的阶段，而且它的成果的利用，使得数学的各个分支及其它科学获得迅猛的发展。

学好集合的知识，不仅能更深刻，更透彻地理解初等数学中的概念，而且还为今后近代数学及其它学科的学习，准备创造好必要的条件。

集合论还在发展，集合论这枝数学园地上的奇葩将日益放射出新的耀眼的光彩。

二. 知识脉络





- 1, 等幂律: $A \cap A = A$ $A \cup A = A$
- 2, 同一律: $A \cap I = A$ $A \cup I = I$
 $A \cap \Phi = \Phi$ $A \cup \Phi = A$
- 3, 互补律: $A \cap \bar{A} = \Phi$ $A \cup \bar{A} = I$
 $\bar{\bar{A}} = A$ $\bar{I} = \Phi$ $\bar{\Phi} = I$
- 4, 交换律: $A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$
- 5, 结合律: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- 6, 分配律: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- 7, 吸收律: $A \cap (A \cup B) = A$ $A \cup (A \cap B) = A$
- 8, 反演律 (摩根律):
 $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

三、教法建议

本节概念多、抽象、运算方法新，因此，对概念内涵的理解往往不透彻，概念与概念之间的联系与区别不易鉴别，运用集合概念解决问题时含混不清，为掌握本节知识，可采用分层次的启导、阅读、对比分析、结合实例与图形的阅读讨论的课型达到对概念理解的深化和运用、具体方法如下：

（一）、阅读和讨论

为了更好地了解学习集合的意义，从而积极主动的学习及在阅读过程中对集合的知识有个初步轮廓的了解，首先配备阅读提纲。

1. 为什么要学习集合？
2. 能问集合的定义是什么吗？为什么？试描述集合概念。
3. 元素的定义是什么？如何表示？
4. 对于给定的集合应有哪些特征？
5. 集合的表示方法有哪些？试举例说明。
6. 集合常用的数集记号有哪些？
7. 用文字叙述及数学式子表达的方式说明子集、真子集、交集、并集、补集的定义。

通过阅读及在阅读基础上对以上问题的共同讨论，使得对集合的概念有个初步的了解。

（二）研讨与检查

通过以下各种类型题的研讨，一方面进一步揭示概念的内涵，深刻理解概念的实质，另一方面在研讨过程中，检查自己阅读情况，看书时对概念理解程度，存在问题，从而培养提高自己的阅读能力。

例1 下列语句中不能形成集合的是()。

- A. 本校高一(1)班的课桌,椅子和学生;
- B. 著名的艺术家;
- C 接近于0的数;
- D 平面 α 内的多边形;
- E. 与一条线段两个端点的距离相等的所有的点。

分析: 集合是数学中最原始基本的概念之一, 没有必要也不能用其它概念给它下定义, 对它只作了描述性的说明。

从“每一组对象的全体形成一个集合”描述性的说明中了解到集合的两层含义: 第一、集合的外延很大, 它的对象可以是数、式、点、图形、万事万物, 无所不包, 即元素的任意性; 第二, 集合的内涵很小, 同一个集合中的元素, 不管它们是否具有共同的几何属性、物理属性、化学属性等, 对这些对象唯一的要求就是它是这个整体的一员, 即集合概念最本质的东西是它的“整体性”。

对于一个给定的集合, 尽管它的对象是任意的, 但每一组对象应是确定无疑的。就是说对任何一个对象都可以判定它是这个集合的元素或者不是这个集合的元素。即集合中元素的确定性。同时还要求集合中的元素是互不相同且在集合中的位置顺序是无关的, 即集合中元素的互异性和无序性。

因为“著名的艺术家”和“接近于0的数”都不满足给定集合的元素应具有确定性的要求, 所以都不能描述为集合。答案是B和C。

例2 在下列各题中分别指出了一个集合的所有元素, 用适当的方法把这个集合表示出来。

(1) 不大于10的非负偶数;

(2) 自然数、整数、有理数、实数;

(3) 自然数中不大于10的质数;

(4) 被5除余1的正整数;

(5) 两边分别在坐标轴的正半轴上, 且边长为1的正方形的顶点;

(6) 坐标平面内, 以 x 轴为中心轴线, 宽度为3的带形区域(包括边界)中所有的点;

分析: 集合的表示方法一般有三种:

①列举法: 是把集合中的元素一一列举出来, 写在大括号内表示集合的方法, 所谓一一列举就是将集合中的元素不重复、不计次序、不遗漏地列出, 元素与元素之间用逗号隔开。优点是集合中的元素一目了然, 但有时书写费事或无法表示。

②描述法: 是把集合中的元素公共属性描述出来, 写在大括号内表示集合的方法。大括号内可以是文字描述, 也可以是数学式子描述。若用文字描述时, 要注意文字精练, 概念准确。如: 整数的集合应写作 $Z = \{ \text{整数} \}$, 防止写成 $\{ \text{全体整数} \}$, $\{ \text{整数集} \}$, $\{ Z \}$ 等错误的写法。前面语言不精练, $\{ Z \}$ 表示单元素集。若用数学式子描述, 它的模式是 $\{ x | P \}$, x 是集合的代表元素, 竖线是隔开符号, P 是指元素 x 所具有的公共属性, 优点是具有较大的普遍性, 但有些集合无法用描述法表示。如: $\{ \sqrt{3}, 0, 1, \frac{3}{4} \}$

③文氏图法：是用圆圈表示集合的方法，但是圆圈的大小，不表示该集合中元素的多少，（除一圆包含在另一圆内）。

因此，可以根据题目的要求和方便选择一种表示法。

$$\text{解：(1) } \{ 0, 2, 4, 6, 8, 10 \};$$

$$(2) N = \{ \text{自然数} \} = \{ n \mid n \text{ 为自然数} \}$$

$$Z = \{ \text{整数} \} = \{ x \mid x = \pm n, n \in N \text{ 或 } n = 0 \}$$

$$Q = \{ \text{有理数} \} = \left\{ x \mid x = \frac{q}{p}, p, q \in Z \text{ 且 } q \neq 0 \right\}$$

$$R = \{ \text{实数} \} = \{ x \mid x \in R \};$$

$$(3) \{ 2, 3, 5, 7 \};$$

$$(4) \{ x \mid x = 5k + 1, k \in Z^+ \text{ 或 } k = 0 \};$$

$$(5) \{ (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1) \};$$

$$(6) \{ (x, y) \mid |y| \leq 1.5 \text{ 且 } x \in R \}.$$

例3 选择适当的关系符号填空

$$(1) 0 \text{ ____ } \phi; \quad (2) 0 \text{ ____ } \{ \phi \};$$

$$(3) \{ 0 \} \text{ ____ } \phi; \quad (4) \{ 0 \} \cap \{ \phi \} \text{ ____ } \phi$$

$$(5) \{ 0 \} \text{ ____ } \{ \{ 0 \}, \phi \};$$

$$(6) \phi \text{ ____ } \{ \phi \}$$

分析：①不含任何元素的集合叫做空集。记作 ϕ ，把空集表示为 $\{\phi\}$ 或 $\{0\}$ 或 $\{\text{空集}\}$ 都是错误的。理解空集的概念注意三点：第一，根据空集定义，空集具有给定集合的特征，它确实是一个集合；第二，在客观世界中确实存在空集这样的集合。如： $\{x \mid (x-1)^2 < 0\}$ ；第三，在集合中有了空集，类似于实数中有了数0一样，对集合的研究和应用带来很多方便。

②0， $\{0\}$ ， ϕ ， $\{\phi\}$ 符号的含义是不同的。从集合的角度来说：0表示数0是元素不是集合， $\{0\}$ 表示只含有一个元素0的集合， ϕ 表示不含有任何元素的集合，它是一个数学概念， $\{\phi\}$ 表示含有一个元素的单元素集。

③元素与集合的关系只有“ $\in$ ”与“ $\notin$ ”两种关系，集合与集合的关系有“ $\subseteq$ ， $\supseteq$ ， $\subset$ ， $\supset$ ， $=$ ， $\subsetneq$ ， $\supsetneq$ ， $\nsubseteq$ ， $\nsupseteq$ ， $\neq$ ”十种关系。

④ ϕ 与 $\{\phi\}$ 的关系，若将 ϕ 看作是 $\{\phi\}$ 中的元素，则 $\phi \in \{\phi\}$ ，若将 ϕ 看作集合，则 $\phi \subset \{\phi\}$ 。

解：(1) $\in$ ； (2) $\in$ ； (3) $\supset$ ；
(4) $=$ ； (5) $\in$ ； (6) $\in$ 或 $\subset$ 。

例4 设 $A = \{x \mid x \subseteq B\}$ ， $B = \{0, (2, 3)\}$ ，则集合A与集合B的关系是 ()。

A. $A \subset B$ B. $A = B$;
C. $B \supseteq A$ D. $B \in A$ 。

分析：因为集合中元素的任意性，所以集合中的元素也可以是一个集合，即一个集合可以由许多集合作元素形成。所以要区分虽是同一事物但在不同的研究场合，它有时被当作集合中的元素，有时又是一个集合。但是集合本身不能作