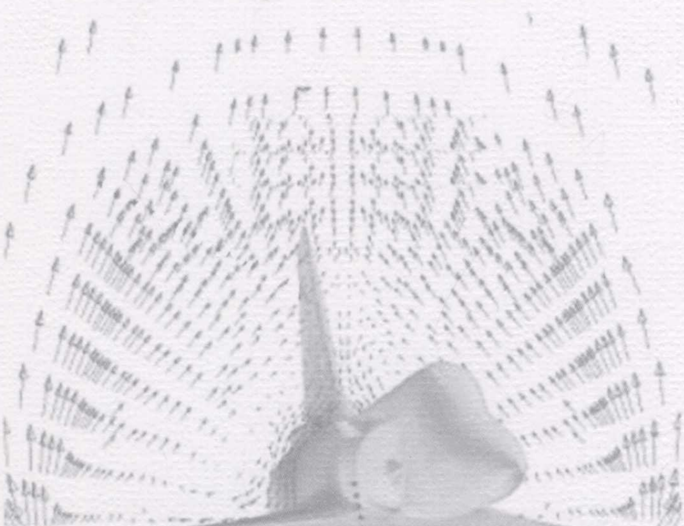
中国科协三峡科技出版资助计划

分数阶微分方程边值问题理论及应用

白占兵 著



中国科学技术出版社
CHINA SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

中国科协三峡科技出版资助计划

分数阶微分方程边值问题理论及应用

白占兵 著

中国科学技术出版社
·北 京·

图书在版编目（CIP）数据

分数阶微分方程边值问题理论及应用／白占兵著．—北京：中国科学技术出版社，2012.12

（中国科协三峡科技出版资助计划）

ISBN 978－7－5046－6257－6

Ⅰ．①分…　Ⅱ．①白…　Ⅲ．①微分方程－边值问题－研究　Ⅳ．①O175．8

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 306571 号

总　策　划　沈爱民　林初学　刘兴平　孙志禹
项 目 策 划　杨书宣　赵崇海
出　版　人　苏　青
编辑组组长　吕建华　许　英　赵　晖
责任编辑　付万成　夏凤金
责任校对　孟华英
印刷监制　李春利
责任印制　张建农

出　　版　中国科学技术出版社
发　　行　科学普及出版社发行部
地　　址　北京市海淀区中关村南大街 16 号
邮　　编　100081
发行电话　010－62103349
传　　真　010－62103166
网　　址　http://www.cspbooks.com.cn

开　　本　787mm×1092mm　1/16
字　　数　247 千字
印　　张　14
版　　次　2013 年 1 月第 1 版
印　　次　2013 年 1 月第 1 次印刷
印　　刷　北京华联印刷有限公司

书　　号　ISBN 978－7－5046－6257－6/O·161
定　　价　55.00 元

总　序

科技是人类智慧的伟大结晶，创新是文明进步的不竭动力。当今世界，科技日益深入影响经济社会发展和人们日常生活，科技创新发展水平深刻反映着一个国家的综合国力和核心竞争力。面对新形势、新要求，我们必须牢牢把握新的科技革命和产业变革机遇，大力实施科教兴国战略和人才强国战略，全面提高自主创新能力。

科技著作是科研成果和自主创新能力的重要体现形式。纵观世界科技发展历史，高水平学术论著的出版常常成为科技进步和科技创新的重要里程碑。1543 年，哥白尼的《天体运行论》在他逝世前夕出版，标志着人类在宇宙认识论上的一次革命，新的科学思想得以传遍欧洲，科学革命的序幕由此拉开。1687 年，牛顿的代表作《自然哲学的数学原理》问世，在物理学、数学、天文学和哲学等领域产生巨大影响，标志着牛顿力学三大定律和万有引力定律的诞生。1789 年，拉瓦锡出版了他的划时代名著《化学纲要》，为使化学确立为一门真正独立的学科奠定了基础，标志着化学新纪元的开端。1873 年，麦克斯韦出版的《论电和磁》标志着电磁场理论的创立，该理论将电学、磁学、光学统一起来，成为 19 世纪物理学发展的最光辉成果。

这些伟大的学术论著凝聚着科学巨匠们的伟大科学思想，标志着不同时代科学技术的革命性进展，成为支撑相应学科发展宽厚、坚实的奠基石。放眼全球，科技论著的出版数量和质量，集中体现了各国科技工作者的原始创新能力，一个国家但凡拥有强大的自主创新能力，无一例外也反映到其出版的科技论著数量、质量和影响力上。出版高水平、高质量的学术著作，成为科技工作者的奋斗目标和出版工作者的不懈追求。

中国科学技术协会是中国科技工作者的群众组织，是党和政府联系科技工作者的桥梁和纽带，在组织开展学术交流、科学普及、人才举荐、决策咨询等方面，具有独特的学科智力优势和组织网络优势。中国长江三峡集团公司是中国特大型国有独资企业，是推动我国经济发展、社会进步、民生改善、科技创新和国家安全的重要力量。2011 年 12 月，中国科学技术协会和中国长江三峡集团公司签订战略合作协议，联合设立“中国科协三峡科技出版资助计划”，资助全国从事基础研究、应用基础研究或技术开发、改造和产品研发的科技工作者出版高水平的科技学术著作，并向 45 岁以下青年科技工作者、中国青年科技奖获得者和全国百篇优秀博士论文获得者倾斜，重点资助科技人员出版首部学术专著。

我由衷地希望，“中国科协三峡科技出版资助计划”的实施，对更好地聚集原创科研成果，推动国家科技创新和学科发展，促进科技工作者学术成长，繁荣科技出版，打造中国科学技术出版社学术出版品牌，产生积极的、重要的作用。

是为序。

中国长江三峡集团公司董事长

2012 年 12 月

前　言

分数阶微积分是一个古老而又新颖的课题．之所以说它古老，是因为分数阶微积分的研究历史几乎与整数阶的相同，它源于 G. W. Leibniz 和 L. Euler 的一些猜测并发展至今；说它新颖，是因为直到近几十年来，分数阶微分方程理论才在越来越深厚的应用学科背景的影响下，获得数学界的重视和特别关注．近 30 年来，在包括分形现象在内的物理、工程等诸多应用学科领域应用的拓展，激发了科研人员对分数阶微积分的巨大热情．分数阶微分方程现在已应用于分数物理学、混沌与湍流、粘弹性力学与非牛顿流体力学、高分子材料的解链、自动控制理论、化学物理、随机过程、反常扩散等许多科学领域．分数阶微分方程边值问题是非线性常微分方程理论研究中一个活跃而成果丰硕的领域．近年来在相关项目支持下，作者在这一领域中作了探索．本书是相关研究工作的总结．

本书出版的目的，是希望使更多的读者对分数阶常微分方程边值问题及其研究方法有一个基本的了解．为此，本书选材从基本概念、方法入手，给出最新结果的论证．在众多模型的讨论中，既揭示总体方法的共同性，又展示具体技巧的多样性，努力将研究体会融入相关内容之中．

分数阶常微分方程边值问题是一个十分新颖的课题，目前还没有系统的可以与整数阶常微分方程相媲美的定性理论．随着应用学科中更为精细的分数阶微分方程模型的建立以及对非线性问题研究的深入，肯定会有更深奥的拓扑理论与更精密的分析方法相结合的工作的出现．本书愿为此起抛砖引玉的作用．

全书分八章．

第一章概述了分数阶微积分的研究历史、基本概念以及指数法则．介绍

了在分数阶微积分研究中的三类特殊函数、分数阶微分方程的基本知识以及应用背景．这些讨论是为运用非线性泛函分析方法研究分数阶非线性常微分方程边值问题做好准备．

第二章介绍分数阶微分方程的基本理论．主要包括分数阶微分方程初值问题解的存在性的基本理论以及分数阶微分方程本征值问题．这些结果均是对整数阶常微分方程基本定理或结论的自然推广．

第三章是分数阶微分方程边值问题研究的现代方法简介．概要介绍了单调算子理论、变分方法以及拓扑度理论，并由拓扑度理论导出边值问题研究中常用的各种不动点定理和连续性定理，包括我们所构造的定理及所作的推广．这些定理构成了以后各章研究具体边值问题所需的理论基础．

第四章研究分数阶非线性常微分方程两点边值问题．借助相应问题 Green 函数性质的讨论，利用锥上的不动点定理对分数阶正则问题、奇异问题等进行了系统的研究，得出了正解存在的各类依据．

第五章讨论分数阶非局部非共振问题．分别在三点边值以及积分边值条件下讨论了正解的存在性、唯一性和多重性．第四章和本章依据的主要工具是锥上的不动点定理．

第六章讨论分数阶非局部共振问题．通过引进新的函数空间以及紧性判别法，依次考虑了三点共振边值问题，m 点共振边值问题以及核是二维时的分数阶共振边值问题解的存在性．所用到的主要工具是 Mawhin 连续定理．

第七章讨论分数阶微分方程无穷区间边值问题．分别利用 Leray - Schauder 二择一性质以及对角化技巧获得了无界解和有界解的存在性．

第八章讨论变分方法和临界点理论在分数阶变分问题以及分数阶边值问题中的应用．

本书虽有系统整理日益膨胀的文献资料的目的，但无囊括一切研究成果的企图．在选材上既要介绍非线性泛函分析和分数阶微积分理论的若干重要概念和结论，又要偏重于分数阶常微分方程边值问题近 10 年来的研究进展，特别是作者本人最近六七年的研究成果．书中的结果绝大部分已发表于国内

外学术刊物．在整理成书时，对条件的设定、证明的步骤、结论的表述再次作了梳理，进行了简化、改进或拓广．由于水平所限，成书仓促，疏漏和错误在所难免．敬请专家、读者指正．

本书的出版得到了中国科学技术协会、中国长江三峡集团公司联合设立的中国科协三峡科技出版资助计划的全额资助，所论课题的研究工作得到了国家自然科学基金（61174078）、山东省泰山学者项目研究基金、山东省自然科学基金（ZR2010AM035）、山东省教育厅主管部门科技项目（J11LA07）以及山东科技大学研究基金（2011KYTD105）的资助，均在此致谢．本书的整理和出版，自始至终得到了山东科技大学信息科学与工程学院院领导的鼓励、支持和帮助，并提出了许多很好的建议，在此深表谢意．北京理工大学的葛渭高教授与中国石油大学（华东）的费祥历教授阅读了本书的部分章节并给出了富有建设性的意见和建议．我的研究生张英晗、李东、刘倩、孙炜晨、张伟华、刘文杰在文字录入方面做了不少工作，在此一并表示感谢．

白占兵
2012 年 10 月

目　录

第 1 章　绪论

§1.1　分数阶微积分简介

分数阶微积分是处理任意阶微积分研究及应用的数学分析领域．“分数阶”并非一个非常合适的名称，仅仅由于习惯的原因，才坚持这个写法．事实上，阶数可以是任意实数，乃至复数．

§1.1.1　研究历史

分数阶微积分是一个古老而又新颖的课题．之所以说它古老，是因为分数阶微积分的研究历史几乎与整数阶相同，它源于 G. W. Leibniz（1695，1697）和 L. Euler（1730）的一些猜测并发展至今．分数阶微积分最初只是数学定义自身引起的争拗．1684 年，莱布尼茨公开发表了数篇微积分论文，其中给出了微积分的定义与记号，当然包括正整数阶导数$\frac{d^n y}{dx^n}$. 11 年后，即 1695 年，法国数学家洛必达致函询问莱布尼茨：“n 为分数时，例如 $n=\frac{1}{2}$时，$\frac{d^n y}{dx^n}$的含义是什么?”这个突如其来的问题使莱布尼茨顿觉茫然，1695 年 9 月 30 日，他在给洛必达的复函中说了许多含混不清的话：“……，先生，你可以这样看，我们可以把一个量展开为级数……，你还可以这样设想，在两个整数阶导数之间用某种插入法……”[176]．总而言之，他没有正确地回答洛必达的问题．这是微积分学刚刚问世的第 11 个年头，莱布尼茨的困惑是情理之中的事．到 20 世纪中期，众多数学家对分数阶微积分的发展做出了重要的贡献，包括 P. S. Laplace（1812），J. B. J. Fourier（1822），N. H. Abel（1823 – 1826），J. Liouville（1832 – 1873），B. Riemann（1847），H. Holmgren（1865 – 1867），A. K. Grünwald（1867 – 1872），A. V. Letnikov（1868 – 1872），P. A. Nekrassov（1888），A. Krug（1890），J. Hadamard（1892），O. Heaviside（1892 – 1912），S. Pincherle（1902），G. H. Hardy 与 J. E. Littlewood（1917 – 1928），H. Weyl（1917），P. Lévy（1923），A. Marchaud

(1927), H. T. Davis (1924 - 1936), E. R. Love (1938 - 1996), A. Erdèlyi (1939 - 1965), H. Kober (1940), D. V. Widder (1941), M. Riesz (1949); 等等.

但是, 分数阶微积分也被认为是非常新颖的. 近30年来, 在可能包括分形现象在内的物理、工程等诸多应用学科领域的应用的拓展, 激发了科研人员对分数阶微积分的巨大热情. 美国科学院院士, 2012年Wolf奖得主L. Caffarelli教授等最近完全解决了分数阶Laplacian方程解的正则性问题[67], 该研究广受关注. 现在有非常多的会议论文集与杂志专刊出版相关研究成果, 涉及分数阶微积分在特殊函数、分数物理学、混沌与湍流、粘弹性力学与非牛顿流体力学、高分子材料的解链、自动控制理论、化学物理、随机过程、反常扩散等许多领域的应用. 会议方面, 1974年, 第一次分数阶微积分国际会议在美国的New Haven大学召开. 会议由B. Ross发起, 美国国家自然科学基金资助. 会议纪要与论文集由Springer - Verlag出版[248,249]. 很多不同领域的数学家出席, 报告的论文涵盖面很广, 包括分数微积分与广义算子、分数微积分相关的不等式、在概率论中的应用等. 1984年, 第二次分数阶微积分国际会议在苏格兰格拉斯哥的Strathclyde大学召开. 该次会议的会议纪要见文献[200], 会议提出的公开问题之一是"可否找到非整数阶导数的几何解释?" 1989年, 第三次分数阶微积分国际会议在日本东京的日本大学召开, 会议纪要与论文集见文献[222, 223]. 近年来大量的相关会议可在网络上查找. 研究专著方面, K. B. Oldham和J. Spanier从1968年开始合作, 并在1974年出版了第一本致力于分数阶微积分的书, 见[227]. 近期部分或完全致力于研究分数阶微积分及其应用的著作有[229 ~ 232], 其中Samko, Kilbas & Marichev百科全书式的著作最为重要[253]. 此外我们还要提到周勇教授主编的国际杂志*Computers and Mathematics with Applications*的三辑专刊*Advance in Fractional Differential Equations* (Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ)[311 ~ 313]以及唐贻发教授的报告[267], 其中的论文反映了国内外学者近期在分数阶微分方程研究方面的系列成果. 郭柏灵先生近期出版的专著《分数阶偏微分方程及其数值解》[123], 陈文教授的专著《力学与工程问题的分数阶导数建模》[75]中都涉及分数阶微分方程的应用以及数值求解. 分数阶微积分专业杂志方面, 已经有*Journal of Fractional Calculus* (主编K. Nishmoto, 日本, 1992年创刊), *Fractional Calculus and Applied Analysis* (主编V. Kiryakova, 保加利亚, 1998年创刊). 最近一份新杂志*Fractional Dynamic System*计划于2013年出版.

§1.1.2 分数阶积分

$\alpha(\alpha>0)$阶黎曼-刘维尔(Riemann-Liouville)分数阶积分概念来源于著名的Cauchy公式

$$J_{0+}^{n}f(t) := \frac{1}{(n-1)!}\int_{0}^{t}(t-\tau)^{n-1}f(\tau)d\tau, \quad t>0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.1.1}$$

其中$\mathbb{N}$是正整数集.

将上述公式从正整数拓展到正实数，一般的方法是使用 Gamma 函数．下设 $n-1<\alpha\leqslant n$.

定义 1.1.1　函数 $y:(0,\infty)\to R$ 的 $\alpha>0$ 阶 Riemann-Liouville 分数积分定义为

$$J_{0+}^{\alpha}y(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}y(s)ds \tag{1.1.2}$$

等式的右端在 $(0,\infty)$ 有定义．

作为补充，定义 $J_{0+}^{0}:=I$（恒等算子），即 $J_{0+}^{0}f(t)=f(t)$．而且，定义当 $t\to0^+$ 时，$J_{0+}^{\alpha}f(t)$ 的值为 $J_{0+}^{\alpha}f(0^+)$（如果存在）；当然，这一极限可能是无穷．

由定义可推知分数阶积分具有半群性质

$$J_{0+}^{\alpha}J_{0+}^{\beta}=J_{0+}^{\alpha+\beta},\quad \alpha,\beta\geqslant0, \tag{1.1.3}$$

其中包含了交换性 $J_{0+}^{\beta}J_{0+}^{\alpha}=J_{0+}^{\alpha}J_{0+}^{\beta}$. 算子 J_{0+}^{α} 作用于幂函数上有

$$J_{0+}^{\alpha}t^{\gamma}=\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1+\alpha)}t^{\gamma+\alpha},\quad \alpha>0,\quad \gamma>-1,\quad t>0. \tag{1.1.4}$$

性质 (1.1.3), (1.1.4) 显然是当阶数为正整数时对已知性质的推广．证明基于两个欧拉积分，即 Gamma 函数和 Beta 函数的性质

$$\Gamma(z):=\int_0^{\infty}e^{-u}u^{z-1}du,\quad \Gamma(z+1)=z\Gamma(z),\quad Re\{z\}>0; \tag{1.1.5}$$

$$B(p,q):=\int_0^1(1-u)^{p-1}u^{q-1}du=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}=B(q,p),\quad Re\{p,q\}>0. \tag{1.1.6}$$

引入如下形式的因果函数对分数阶积分的表示将是方便的

$$\Phi_{\alpha}(t):=\frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},\quad \alpha>0, \tag{1.1.7}$$

其中下标“+”表示当 $t<0$ 时函数值为零．$\alpha>0$ 时此函数在 R^+ 上是局部绝对可积的．现在再来回顾一下拉普拉斯卷积的概念，两个因果函数的卷积表示为

$$f(t)*g(t):=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau=g(t)*f(t).$$

于是，由 (1.1.2) 和 (1.1.7) 可知，$\alpha>0$ 阶分数阶积分可看成 $\Phi_{\alpha}(t)$ 和 $f(t)$ 的拉普拉斯卷积，即

$$J_{0+}^{\alpha}f(t)=\Phi_{\alpha}(t)*f(t),\quad \alpha>0. \tag{1.1.8}$$

进一步，基于欧拉积分可以证得

$$\Phi_{\alpha}(t)*\Phi_{\beta}(t)=\Phi_{\alpha+\beta}(t),\quad \alpha,\quad \beta>0, \tag{1.1.9}$$

这一组合规则可以用来重新得到 (1.1.3) 和 (1.1.4)．

§ 1.1.3　分数阶导数

讨论完分数阶积分，自然要讨论 $\alpha(\alpha>0)$ 阶分数阶导数．尝试将上节公式中的 α

用 $-\alpha$ 取代．当然，推广过程中需要注意保证该积分的收敛性和是否具有一般整数阶导数具有的常见性质．

记 n 阶微分算子为 D^n，其中 $n\in\mathbb{N}$，则

$$D^nJ^n = I,\quad J^nD^n\neq I,\quad n\in\mathbb{N},\tag{1.1.10}$$

即，D^n 对对应的积分算子 J^n 是左可逆（但不是右可逆）的．事实上，由（1.1.1）可得

$$J^nD^nf(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+)\frac{t^k}{k!},\quad t>0.\tag{1.1.11}$$

因此可期望 D_{0+}^{α} 对 J_{0+}^{α} 是左逆的．

定义 1.1.2　连续函数 f:（0，∞）→ R 的 $\alpha>0$ 阶 Riemann－Liouville 分数导数定义为

$$D_{0+}^{\alpha}f(t) = D^nJ_{0+}^{n-\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n\int_0^t\frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}}ds\tag{1.1.12}$$

只要等式的右端在（0，∞）有定义．

补充定义 $D_{0+}^{0}=J_{0+}^{0}=I$，易得

$$D_{0+}^{\alpha}J_{0+}^{\alpha} = I,\quad \alpha\geqslant 0,\tag{1.1.13}$$

且

$$D_{0+}^{\alpha}t^{\gamma} = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha)}t^{\gamma-\alpha},\quad \alpha>0,\quad \gamma>-1,\quad t>0.\tag{1.1.14}$$

注 1.1.1　对导数定义式（1.1.12）可做如下的解释．取 $\alpha=1.6$，则 $n=2$．由积分定义式（1.1.2），式（1.1.12）中的积分是对函数 $f(\tau)$ 的 $n-\alpha=2-1.6=0.4$ 阶的积分．如果原来的函数 $f(\tau)$ 是 $\alpha=1.6$ 阶可导的，积分 0.4 阶后，函数 $f(\tau)$ 的光滑度补充了 0.4 阶 q 达到 2 阶．于是，可以计算普通的 2 阶整数阶导数了．

显然性质（1.1.13），（1.1.14）是对应阶数是正整数时性质的推广．因为（1.1.5）中 Gamma 函数分母上可能为负，所以需要考虑（1.1.5）中 $\Gamma(z)$ 在左半轴上的解析延拓，详情见 Henrici[134] 中的例子．

一个值得注意的事实是，如果 $\alpha\notin\mathbb{N}$，对 $f(t)\equiv 1$，$D_{0+}^{\alpha}f$ 不等于零．事实上，当 $\gamma=0$ 时，由（1.1.14）可知

$$D_{0+}^{\alpha}1 = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},\quad \alpha\geqslant 0,\quad t>0.\tag{1.1.15}$$

当 $\alpha\in\mathbb{N}$ 时，因为 0，－1，－2，⋯是 Gamma 函数的极点，上式显然恒等于零．

下面给出分数阶导数的另一种定义，是由 Caputo 在 20 世纪 60 年代中后期在文[69] 中引入的．Caputo 和 Mainardi[71] 在线性粘弹性理论框架中即采纳这种定义（见[191]中的评论）．

定义 1.1.3　连续函数 f:（0，∞）→R 的 $\alpha>0$ 阶 Caputo 分数阶导数定义为

$${}^{C}D_{0+}^{\alpha}f(t) := J_{0+}^{n-\alpha}D^nf(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t\frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}}ds,\tag{1.1.16}$$

只要等式的右端在（0，∞）有定义．

这种定义对函数的要求显然比（1.1.12）更严格，因为要求 $f^{(n)}(t)$ 绝对可积．当使用算子 ${}^{C}D_{0+}^{\alpha}$ 时，总假设这个条件成立．一般地，

$$D_{0+}^{\alpha}f(t) := D^{n}J_{0+}^{n-\alpha}f(t) \neq J_{0+}^{n-\alpha}D^{n}f(t) := {}^{C}D_{0+}^{\alpha}f(t), \tag{1.1.17}$$

除非函数 $f(t)$ 在 $t=0^{+}$ 处的前 $n-1$ 阶导数都等于零．事实上，假设（1.1.16）中的积分是有意义的，则 $t>0$ 时，有

$$D_{0+}^{\alpha}f(t) = {}^{C}D_{0+}^{\alpha}f(t) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}f^{(k)}(0^{+}), \tag{1.1.18}$$

结合幂函数的分数阶导数（1.1.14）式，

$$D_{0+}^{\alpha}\left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k}}{k!}f^{(k)}(0^{+})\right) = {}^{C}D_{0+}^{\alpha}f(t). \tag{1.1.19}$$

上式表明 Caputo 分数阶导数（1.1.16）包含了函数及其低阶整数阶导数的初值．$f(t)$ 减去其在 $t=0^{+}$ 处的 $n-1$ 阶泰勒多项式意味着一种修正的分数阶导数．特别地，根据这一定义，对常值函数进行分数阶求导依然等于零，即

$${}^{C}D_{0+}^{\alpha}1 \equiv 0, \quad \alpha > 0. \tag{1.1.20}$$

下面我们来探讨上述两种分数阶导数（1.1.12）与（1.1.16）最大的区别．由（1.1.14）可知

$$D_{0+}^{\alpha}t^{\alpha-1} \equiv 0, \quad \alpha > 0, \quad t > 0. \tag{1.1.21}$$

由（1.1.21）和（1.1.20）可得如下结论，其中 $t>0$，

$$D_{0+}^{\alpha}f(t) = D_{0+}^{\alpha}g(t) \Leftrightarrow f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^{n}c_{j}t^{\alpha-j}, \tag{1.1.22}$$

$${}^{C}D_{0+}^{\alpha}f(t) = {}^{C}D_{0+}^{\alpha}g(t) \Leftrightarrow f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^{n}c_{j}t^{n-j}. \tag{1.1.23}$$

公式中的系数 c_j，$j=1, 2, \cdots, n$ 是任意常数．

根据两种分数阶导数的定义，可得如下引理．

引理 1.1.1[37,155]　如果 $y \in C^{n-1}(0, 1) \cap L[0, 1]$，则分数阶微分方程

$$D_{0+}^{\alpha}y(t) = 0$$

有唯一解

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left[D_{0+}^{\alpha-k-1}y(t)\right]_{t=0}}{\Gamma(\alpha-k)}t^{\alpha-k-1}.$$

引理 1.1.2[155,302]　如果 $y \in C^{n}(0, 1) \cap L[0, 1]$，则分数阶微分方程

$${}^{C}D_{0+}^{\alpha}y(t) = 0$$

有唯一解

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{y^{(k)}(0)}{k!}t^{k}.$$

注意到（1.1.21）恰好是一个证明 D_{0+}^{α} 对 J_{0+}^{α} 不是右可逆的例子，因为

$$J_{0+}^{\alpha}D_{0+}^{\alpha}t^{\alpha-1}\equiv 0,\quad \text{但是}\quad D_{0+}^{\alpha}J_{0+}^{\alpha}t^{\alpha-1}=t^{\alpha-1},\quad \alpha>0,t>0. \tag{1.1.24}$$

对于这两个定义，还需注意到 $\alpha\to(n-1)^{+}$，$\alpha\to n^{-}$ 时它们的极限也是不同的．由（1.1.12）和（1.1.16），利用分部积分可以分别得到

$$\alpha\to(n-1)^{+}\Rightarrow D_{0+}^{\alpha}f(t)\to D^{n}Jf(t)=D^{n-1}f(t); \tag{1.1.25}$$

$$\alpha\to(n-1)^{+}\Rightarrow {}^{C}D_{0+}^{\alpha}f(t)\to JD^{n}Jf(t)=D^{n-1}f(t)-f^{(n-1)}(0^{+}). \tag{1.1.26}$$

$$\alpha\to n^{-}\Rightarrow D_{0+}^{\alpha}f(t)\to D^{n}f(t); \tag{1.1.27}$$

$$\alpha\to n^{-}\Rightarrow {}^{C}D_{0+}^{\alpha}f(t)\to D^{n}f(t). \tag{1.1.28}$$

在考虑导数的逼近时，这是一个需要特别注意的现象．

§1.1.4 其他定义

除了 Riemann – Liouville 分数阶微积分和 Caputo 分数阶微分，还有其他一些分数阶微积分的定义方法．在 Riemann（1847 年）推广出起点是 $t=0$ 的 Cauchy 积分公式（1.1.2）之前，Liouville（1832 年）选择了起点为 $t=-\infty$．

定义 1.1.4 定义 f 的 α 阶 Liouville 分数阶积分为

$$J_{-\infty}^{\alpha}f(t):=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau,\alpha\in R^{+}. \tag{1.1.29}$$

定义 1.1.5 定义 f 的 α 阶的 Liouville 分数阶导数为 $D_{-\infty}^{\alpha}f(t)=D^{n}J_{-\infty}^{n-\alpha}f(t)$，即

$$D_{-\infty}^{\alpha}f(t):=\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{-\infty}^{t}\frac{f(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}\right]. \tag{1.1.30}$$

在此情况下，假设 $f(t)$ 当 $t\to-\infty$ 时函数有直到 $n-1$ 阶导数都为零，可得

$$D^{n}J_{-\infty}^{n-\alpha}f(t)=J_{-\infty}^{n-\alpha}D^{n}f(t), \tag{1.1.31}$$

这与（1.1.17）不同．

另外，分数阶积分（1.1.2）收敛的充分条件是

$$f(t)=O(t^{\epsilon-1}),\epsilon>0,t\to 0^{+}, \tag{1.1.32}$$

而（1.1.29）收敛的充分条件是

$$f(t)=O(|t|^{-\alpha-\epsilon}),\epsilon>0,t\to-\infty. \tag{1.1.33}$$

称满足性质（1.1.32）和（1.1.33）的可积函数分别为 Riemann 类函数和 Liouville 类函数[206]．比如幂函数 t^{γ} 属于 Riemann 类函数，其中 $\gamma>-1$，$t>0$；而 $|t|^{-\delta}$，其中 $\delta>\alpha>0$，$t<0$ 和 $\exp(ct)$，其中 $c>0$，都是 Liouville 类函数．对上面的函数，可以得到

$$J_{-\infty}^{\alpha}|t|^{-\delta}=\frac{\Gamma(\delta-\alpha)}{\Gamma(\delta)}|t|^{-\delta+\alpha},D_{-\infty}^{\alpha}|t|^{-\delta}=\frac{\Gamma(\delta+\alpha)}{\Gamma(\delta)}|t|^{-\delta-\alpha}, \tag{1.1.34}$$

$$J_{-\infty}^{\alpha}e^{ct}=c^{-\alpha}e^{ct},D_{-\infty}^{\alpha}e^{ct}=c^{\alpha}e^{et}. \tag{1.1.35}$$

定义 1.1.6 定义 Weyl 分数阶积分为

$$W_{\infty}^{\alpha}f(t):=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t}^{\infty}(\tau-t)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau,\quad \alpha\in R^{+}. \tag{1.1.36}$$

当 $t>0$ 时，Weyl 分数阶积分是相对于 Riemann – Liouville 积分（1.1.2）的补充.（1.1.29）和（1.1.36）的联系可以参考文献［206］中的例子.

$$\begin{aligned} J_{-\infty}^{\alpha}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\infty}^{-t}(t+\tau')^{\alpha-1}f(-\tau')d\tau' \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t'}^{\infty}(\tau'-t')^{\alpha-1}f(-\tau')d\tau' = W_{\infty}^{\alpha}g(\tau') \end{aligned} \tag{1.1.37}$$

其中 $g(t')=f(-t')$，$t'=-t$.

左侧和右侧 Riemann – liouville 分数阶导数定义在分数阶变分问题讨论中非常有用.

定义 1.1.7　左侧 Riemann – Liouville 分数阶导数定义为

$${}_{a}D_{t}^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-\alpha-1}f(\tau)d\tau. \tag{1.1.38}$$

定义 1.1.8　右侧 Riemann – Liouville 分数阶导数定义为

$${}_{t}D_{b}^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(-1)^{n}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\int_{t}^{b}(t-\tau)^{n-\alpha-1}f(\tau)d\tau. \tag{1.1.39}$$

如果 α 是整数，导数按通常意义下定义

$${}_{a}D_{t}^{\alpha}f(t)=\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}},\quad {}_{t}D_{b}^{\alpha}f(t)=(-1)^{\alpha}\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}},\quad \alpha=1,2,\cdots. \tag{1.1.40}$$

这两种导数分别记为 LRLFD 和 RRLFD.

§1.1.5　指数法则

在普通微积分中，积分算子和微分算子关于（整数）指数的可交换性是众所周知的

$$J^{m}J^{n}=J^{n}J^{m}=J^{m+n},\quad D^{m}D^{n}=D^{n}D^{m}=D^{m+n}. \tag{1.1.41}$$

在分数阶微积分中，算子的分数阶积分满足指数法则，这得益于它们的半群性质（1.1.3）. 一般情况下，分数阶微分算子 D_{0+}^{α} 和 ${}^{C}D_{0+}^{\alpha}$ 不满足半群性质或（更弱的）交换性. 不满足的例如

$$\begin{cases} (a) \quad D_{0+}^{\alpha}D_{0+}^{\beta}f(t)=D_{0+}^{\beta}D_{0+}^{\alpha}f(t)\neq D_{0+}^{\alpha+\beta}f(t), \\ (b) \quad D_{0+}^{\alpha}D_{0+}^{\beta}g(t)\neq D_{0+}^{\beta}D_{0+}^{\alpha}g(t)=D_{0+}^{\alpha+\beta}g(t). \end{cases} \tag{1.1.42}$$

例子（a）中，令 $f(t)=t^{-1/2}$ 且 $\alpha=\beta=1/2$. 则由（1.1.14）可得

$$D_{0+}^{\frac{1}{2}}f(t)\equiv 0, D_{0+}{}^{\frac{1}{2}}D_{0+}{}^{\frac{1}{2}}f(t)\equiv 0,$$

但

$$D_{0+}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}f(t)=D_{0+}f(t)=-\frac{t^{-\frac{3}{2}}}{2}.$$