面向21世纪高职高专规划教材

线性代数

程红萍　主编

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

面向21世纪高职高专规划教材

线性代数

程红萍　主编

同濟大學 出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是在贯彻落实教育部“面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的要求精神的基础上，按照高职高专“数学基础课程教学基本要求”并结合当前大多数高职高专院校在教学改革中出现的新的形势和特点而编写的. 全书以通俗易懂的语言，系统地讲解了行列式、矩阵、向量、线性方程组、特征值与特征向量等内容. 全书共四章，每章分若干节，每节都配有习题，同时，每章还配有自测题，书末附有习题的参考答案.

本书结构严谨，理论系统，举例丰富，实用性强，可作为高职高专院校各专业“线性代数”课程的教材，也可供有专升本的专科院校或成教学院选用，还可供相关专业人员和广大自学者学习和参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/程红萍主编. --上海：同济大学出版社，2010.1

面向21世纪高职高专规划教材

ISBN 978-7-5608-4193-9

Ⅰ.①线… Ⅱ.①程… Ⅲ.①线性代数—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第208717号

面向21世纪高职高专规划教材

线性代数

程红萍　主编

责任编辑 曹　建　**责任校对** 徐春莲　**封面设计** 潘向蓁

出版发行　同济大学出版社　www.tongjipress.com.cn

（地址：上海市四平路1239号　邮编：200092　电话：021-65985622）

经　销　全国各地新华书店

印　刷　同济大学印刷厂

开　本　850 mm×1 168 mm　1/32

印　张　6.125

印　数　1—4 100

字　数　164 000

版　次　2010年1月第1版　2010年1月第1次印刷

书　号　ISBN 978-7-5608-4193-9

定　价　18.00元

前　言

本教材是在总结国内多所学校历年来高职高专有关专业的“线性代数”课程教学经验的基础上，结合编者多年讲授本课程的教学实践，为适应高职高专培养技术应用性人才的需要编写而成的. 全书共分 4 章，主要内容包括行列式、矩阵、向量、线性方程组、特征值与特征向量等.

本教材在编写过程中，充分考虑了高职高专教育改革发展的新形势和高职高专培养应用型人才的实际需要，在内容上力求突出其基础性、应用性与工具性，充分体现了它是高职院校各专业的基础课而不是专业课以及“加强基础、强化能力、立足应用、服务专业”的原则，因而对难度大的基础理论，只给出定理，不追求严格的证明. 本书每节后面都有配套的习题，每章后面都有自测题，书末附有习题和自测题的参考答案. 本书可供高职高专院校用作“线性代数”课程的教材.

本书由程红萍主编，参加编写的还有王艳、张俊丽、周文丽. 本书在编写和使用过程中，西安欧亚学院给予了大力的支持和帮助，在此深表谢意.

由于我们的水平有限，书中难免有不妥之处，欢迎读者批评指正.

编　者

2010 年 1 月

目　　录

1 行　列　式

在生产实践和科学研究中，线性代数是必不可少的基础理论之一，而行列式是研究线性代数的一个重要工具，也是线性代数中的一个重要概念. 本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及其计算方法，还介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克莱姆(Cramer)法则.

1.1　二阶与三阶行列式

1.1.1　二阶行列式

二阶行列式的概念是由解线性方程组的问题引出的，如用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1}$$

其中，x_1，x_2 为未知量，a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}为未知量的系数，b_1，b_2为常数项.

用消元法可以得出，当$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$时，方程组(1)有唯一解：

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{2}$$

式(2)中的分子、分母都是 4 个数分两对相乘再相减而得. 其中,分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 是由方程组(1)的 4 个系数确定的,把这 4 个数按它们在方程组(1)中的位置,排成两行两列(横排称行,竖排称列)的数表:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

把上表用两条线括起来的 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为**二阶行列式**,它代表一种运算,运算结果等于数 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,这个数称为行列式的值. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{3}$$

其中,数 $a_{ij}(i=1,\ 2;\ j=1,\ 2)$ 称为行列式(3) 的**元素**. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行标**,表明该元素位于第 i 行,第二个下标 j 称为**列标**,表明该元素位于第 j 列,a_{ij} 就是位于行列式第 i 行第 j 列交叉处的元素.

一般用大写字母 D 表示行列式,记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

二阶行列式的值可用如图 1-1 所示的**对角线法则**来进行记忆. 图中,a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为**主对角线**,a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为**副对角线**,于是,二阶行列式的值便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上两元素之积所得

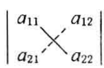

图 1-1

的差.

利用二阶行列式的定义,式(2)中 x_1, x_2 的分子也可写成二阶行列式,即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

那么,式(2)可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

注意,这里的分母 D 是由方程组(1)的系数所确定的二阶行列式(称系数行列式),x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}, a_{21}所得的二阶行列式,x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}, a_{22}所得的二阶行列式.

例 1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

解 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1\times4-2\times3=4-6=-2.$

例 2 求解二元线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-4x_2=5,\\3x_1+2x_2=6.\end{cases}$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix}2&-4\\3&2\end{vmatrix}=4-(-12)=16\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}5&-4\\6&2\end{vmatrix}=10-(-24)=34,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&5\\3&6\end{vmatrix}=12-15=-3,$$

所以 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{34}{16}=\dfrac{17}{8}$, $x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-3}{16}=-\dfrac{3}{16}$.

1.1.2 三阶行列式

类似于二元线性方程组的讨论,对于三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3,\end{cases}\tag{4}$$

其系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\tag{5}$$

称为**三阶行列式**. 与二阶行列式一样,它也代表一个算式,其值等

于数 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$. 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

为了便于记忆三阶行列式的值，也常用“对角线法则”(图 1-2). 图中，三条实线看做是平行于主对角线的连线，每条实线上三个元素的乘积都带正号；三条虚线看做是平行于副对角线的连线，每条虚线上三个元素的乘积都带负号.

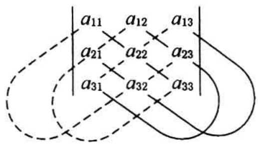

图 1-2

若令

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

则可用对角线法则计算出 D_1，D_2，D_3 的值. 当系数行列式 $D\neq 0$ 时，方程组(4)有唯一解，且其解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 3 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \\ -2 & 6 & 4 \end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则，有

$$\begin{aligned} D &= 1\times(-1)\times 4+5\times 6\times 3+(-2)\times 1\times 2- \\ &\quad 3\times(-1)\times(-2)-2\times 5\times 4-1\times 6\times 1 \\ &= -4+90-4-6-40-6 \\ &= 30. \end{aligned}$$

例 4 求解方程

$$D=\begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix}=0.$$

解 方程左端的三阶行列式

$$\begin{aligned} D &= x^2-4x+0-0-(-3)-0 \\ &= x^2-4x+3, \end{aligned}$$

由 $x^2-4x+3=0$，解得 $x=1$ 或 $x=3$.

例 5 求解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2, \\ 2x_1+x_2-3x_3=1, \\ -x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-10,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-5,$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-5}{-5}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-10}{-5}=2,$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-5}{-5}=1.$$

习 题 1-1

1. 利用对角线法则计算下列二阶行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$.

2. 利用对角线法则计算下列三阶行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$.

3. 求解下列方程.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}=0$;　　(2) $\begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 \\ 1 & 2+x & 3 \\ 1 & 2 & 3+x \end{vmatrix}=0$.

4. 用行列式求解下列方程组.

(1) $\begin{cases} 3x_1-2x_2=3, \\ -4x_1+3x_2=-1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=5, \\ x_1+x_2+5x_3=-7, \\ 2x_1+3x_2-3x_3=14. \end{cases}$

1.2　n 阶行列式

1.2.1　排列与逆序数

对角线法则只适用于二阶行列式与三阶行列式，为了给出 n 阶行列式的定义，下面先介绍排列与其逆序数的概念.

将 n 个不同的元素排成一列，称为这 n 个元素的**全排列**（简称

排列).

对于 n 个不同的元素,可规定各元素之间有一个标准次序,在这 n 个元素的任一排列中,当某两个元素的先后次序与标准次序不同时,就说有一个**逆序**.一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的**逆序数**.

显然,用逆序数的定义可以求给定一个排列的逆序数,但若所给的排列中含有元素较多时,此方法用起来则不太方便.下面我们讨论一种较为简便的求排列的逆序数的方法.

不失一般性,不妨设 n 个元素为 $1, 2, \cdots, n$,这 n 个自然数,规定由小到大为标准次序.设

$$p_1 p_2 \cdots p_n$$

为这 n 个自然数的一个排列.考虑元素 $p_i(i=1, 2, \cdots, n)$,如果排在 p_i 前面且比 p_i 大的元素有 t_i 个,就说 p_i 的逆序数为 t_i.一个排列的所有元素的逆序数之和

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i$$

就是这个排列的逆序数.

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**;逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例 1 求排列 5143 的逆序数.

解 在排列 5143 中:

5 排在首位,逆序数为 0;

1 的前面比 1 大的数有一个(5),故逆序数为 1;

4 的前面比 4 大的数有一个(5),故逆序数为 1;

3 的前面比 3 大的数有两个(5, 4),故逆序数为 2;