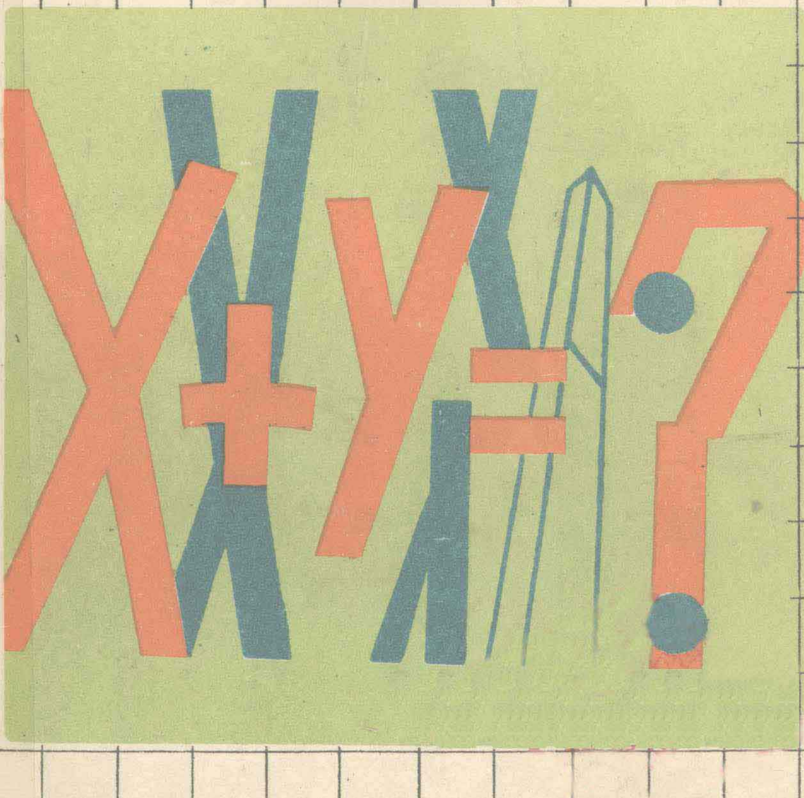
初中数学
疑难解析与训练

（第二册）



汪江松 黄家礼 赵利华 主编

华中师范大学出版社

初中数学疑难解析与训练

第二册

汪江松　黄家礼　赵利华　主编
包韬略　缪冠军
赵学宽　郝生相　张国芳　编

华中师范大学出版社

鄂新鉴字 11 号

初中数学疑难解析与训练

（第二册）

汪江松　黄家礼　赵利华　主编

*

华中师范大学出版社出版

（武昌桂子山）

新华书店湖北发行所发行

崇阳县印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 6.75 字数　140 千字

1989 年 9 月第 1 版　1991 年 12 月第 3 次印刷

ISBN 7-5622-0435-7/G・142

印数：46101-62100　　定价：2.30 元

前　言

为了帮助初中学生学好数学基础知识，熟练掌握数学的基本技能，发展数学思维能力，我们针对教学的实际，组织编写了这套辅导读物。全书分一、二、三册出版，分别供初中一、二、三年级师生使用。

本书以教学大纲为纲，紧扣教材，突出重点，深入细致地剖析了教材中的各种疑难问题。其【重难点释疑】以问答形式深入浅出地对各单元中的教学重点、难点及学生学习中易犯的错误进行阐述和剖析；【例题选讲】通过对典型例题的分析、讲解、评注，系统全面地揭示了各类题型的解题方法和常用技巧；【单元检测】和【综合训练】其针对性强，覆盖面大，旨在进一步巩固该单元的基本概念和基本技能与技巧，读者可对照书末的答案检查对该单元的掌握情况。

本册由赵学宽（第九章、第十章）、张国芳（第十一章、第十二章）、郝生相（第一章、第二章）、包韬略（第三章）、缪冠军（第四章、第五章）编写。

参加这套书的编写工作的还有：苏玉申、侯书清、陈登轩、范智慧、贾双喜、孙效先、罗昭旭、曾凡琛、李贺英、董则荣、李青山等同志。

华中师范大学出版社肖佩玉、张小新同志为本书的出版给予了极大的支持，在此特致谢意。

由于时间仓促，错误及不妥之处敬请读者不吝赐教。

编　　者

1989年5月于武汉

目　　录

代　　数

几　　何

代　　数

第九章　数的开方

本章给出了一种新的运算——开方运算，并重点介绍了开平方和开立方，从而使我们学完了六种初等运算，即加、减、乘、除、乘方和开方。

由于开方运算的出现，引入于平方根、立方根及n次方根的概念；通过无理数的引入，使数的范围从有理数扩展到了实数。

本章重点是平方根、算术平方根的概念，以及查表求平方根和立方根，难点是对算术根概念和实数概念的理解。

【重难点释疑】

1．平方根的概念

平方根的概念是通过数的平方来定义的，即“如果$x^2=a$，那么x叫做a的平方根”．

根据平方运算的意义，正数的平方是正数，负数的平方也是正数，零的平方是零，这就是说，任何数的平方都不可能是负数，所以负数没有平方根；零的平方根是零；正数的平方根有两个，它们互为相反数．例如，2和－2的平方都等于4，即$(\pm 2)^2=4$，所以4的平方根有两个，它们是2和－2。

正数a的平方根表示为$\sqrt{a}$和$-\sqrt{a}$．$\sqrt{a}$表示a的正的平方根，是“$+\sqrt{a}$”前面的“+”号被省略了的，决不能认为$\sqrt{a}=\pm\sqrt{a}$。

求正数a的平方根，与我们以前学习的加、减、乘、除和乘方五种运算不同。这五种运算的结果都是唯一的，但正数的平方根有两个，负数没有平方根。我们求平方根时一定要千万注意。例如，1的平方根是1和－1，$\frac{9}{4}$的平方根是$\frac{3}{2}$和$-\frac{3}{2}$。

2．算术平方根的概念

算术平方根的概念是：正数a的正的平方根叫做a的算术平方根，记作$\sqrt{a}$（$a>0$）。零的平方根也叫做算术平方根。

说通俗一些，就是：在正数a的平方根$\sqrt{a}$和$-\sqrt{a}$中，把正的平方根$\sqrt{a}$叫做a的算术平方根。由于零的平方根只有零，也就把它的平方根叫做算术平方根。

$\sqrt{a}$是a的算术根必须有$a\geqslant 0$，且$\sqrt{a}\geqslant 0$。

正数a的平方根有两个，一个是a的算术平方根$\sqrt{a}$，另一个是a的算术平方根的相反数$-\sqrt{a}$，所以在开方运算中，只要求出了正数a的算术平方根，另一个平方根取它的算术平方根的相反数即得。

3．怎么查平方根表

怎样通过《中学数学用表》中平方根表，查一个数的平方根呢？我们分三种情况介绍如下：

（1）被开方数是1.00到99.90之间具有三个数位的数直接查表即得。如$\sqrt{3.12}=1.766$。

（2）被开方数是1.00到99.9之间具有四个数位的数，可

先查出前三个数位的数的平方根，再加上根据第四个数位的数查得的修正值。例如$\sqrt{2.732}=1.652+0.001=1.653$。

(3) 被开方数是1.00到99.9之间的有五个（或者更多）数位的数，通过四舍五入的办法，将它化成只有四个数位的数，再按照(2)的办法查表求它的平方根。

如果被开方数是分数，就必须将其化成小数。

对于1.00到99.9之外的数，我们也可以通过查表求得它的平方根。但是要对这样的数进行扩大或缩小，把它变成1.00到99.9之间的数。

被开方数进行了扩大或缩小的变化，它的算术平方根又有怎样的变化呢？下表给出了这一变化规律。

N	0.04	4	400	40000	4000000	400000000
$\sqrt{N}$	0.2	2	20	200	2000	20000

从表中，我们看到被开方数扩大到原来的100倍，它的算术平方根就扩大到原来的10倍；被开方数缩小到原来的$\frac{1}{100}$，它的算术平方根就缩小到原来的$\frac{1}{10}$。

所以，移动小数点的位置必须遵循以下规则：

(1) 如果被开方数小于1，把它的小数点向右两位两位移动，移到使它成为大于1且小于99.9为止；如果被开方数大于99.9，把它的小数点向左两位两位移动，移到使它成为1到99.9之间的数为止。

(2) 被开方数小数点移动后，查表求得的算术平方根，必须沿相反的方向相应的一位一位地移动，才能得到原数的平方根。

例如求$\sqrt{125367}$，将被开方数的小数点向左移动四位，

变为12.5367，查表求得$\sqrt{12.5367}=3.546$，再将这个结果的小数点向右移动两位，得到$\sqrt{125376}=354.6$。

4. 立方根的概念

课本中给出了定义："如果$x^3=a$，那么x叫做a的立方根，记作$\sqrt[3]{a}$"。

在符号"$\sqrt[3]{a}$"中，a为被开方数，3是根指数。

求一个数的立方我们是熟悉的。正数的立方是正数，负数的立方是负数，零的立方是零。所以，正数的立方根一定是正数，负数的立方根一定是负数，零的立方根是零。任何一个数都有一个立方根，被开方数a与它的立方根$\sqrt[3]{a}$的符号相同，这是与平方根概念不同的。

根据定义，我们可以求一些数的立方根。

例，求-1，0.001，-8，8，-125，$\frac{27}{125}$的立方根。

由定义可知，$\sqrt[3]{-1}=-1$。

$\sqrt[3]{0.001}=0.1$，$\sqrt[3]{-8}=-2$，$\sqrt[3]{8}=2$，

$\sqrt[3]{-125}=-5$，$\sqrt[3]{\frac{27}{125}}=\frac{3}{5}$。

5. n次方根

在平方根和立方根的基础上，引入了n次方根的概念，对于n次方根的概念我们要掌握以下三点：

(1) n为奇数时，任何数都有一个n次方根，表示为$\sqrt[n]{a}$。

(2) n为偶数时，正数$a(a>0)$有两个n次方根，$\sqrt[n]{a}$和$-\sqrt[n]{a}$，它们互为相反数；零的n次方根是零；负数没有偶次方根。

(3) 正数a的正的n次方根叫做n次算术根（无论n是奇数

还是偶数）。例如，$\sqrt{5}$，$\sqrt[3]{5}$，$\sqrt[4]{5}$等分别是二次、三次、四次算术根。

6．无理数与实数

有理数包括整数，有限小数和无限循环小数。整数和有限小数能化成分数是显然的；无限循环小数也能化成分数形式。如$0.0\dot{9}=\frac{1}{10}$，$0.\dot{9}\dot{0}=\frac{10}{11}$。对任何一个循环小数，以下方法总可以把它转化成分数。例，化$2.\dot{4}1\dot{2}$为分数。

设$x=2.\dot{4}1\dot{2}$，

等式两边同乘1000，得到　$1000x=2412.\dot{4}1\dot{2}$

将以上两式相减，消去循环节得　$999x=2410$。

即$2.\dot{4}1\dot{2}=\frac{2410}{999}$。

以上事实说明，任何有理数都能化成分数，而无理数则不然。如果一个数不能化成分数，那么这个数必然是无理数。这就是有理数与无理数的本质区别。

例，证明$\sqrt{2}$是无理数。

我们用反证法来进行证明。

假设$\sqrt{2}$是有理数，则$\sqrt{2}=\frac{m}{n}$，m，n为互质的两正整数，两边平方得$2n^2=m^2$，$\therefore$ m^2为偶数，则m必是偶数。令$m=2k$，则$n^2=2k^2$，$\therefore$ n^2为偶数，n必为偶数，所以m与n有公因数2，这与m、n互质矛盾，$\therefore$ $\sqrt{2}$不是有理数，即$\sqrt{2}$是无理数。

对于无理数的概念，我们还要明确一点：无理数并不都是开方开不尽的数。例如，π，0.1010010001…也是无理数。

有理数和无理数的全体统称为实数。由于无理数的概念

的引入，使有理数扩充到了实数，在有理数的范围内规定的运算法则、运算律，在实数范围内仍然适用。

在实数的运算中，如果遇到无理数，有时采用取其近似值（在一定精确度要求的范围内）的方法，如取$\sqrt{2}=1.414$（精确到小数点后三位）；有时就用符号代替无理数，如π，$\sqrt{2}$，并且运算的结果仍然保留无理数的符号。

实数和数轴上的点是一一对应的，这就是说，任何一个实数都可以用数轴上的点表示；数轴上的任何一点都可表示一个实数。这种关系，使数与形之间建立了联系。为代数与几何问题的互相转化提供了理论依据。

【例题选讲】

例 1 x是$\sqrt{81}$的平方根，y是$(-2)^2$的平方根，求$x+y$的一切可能的值。

分析：x，y分别是$\sqrt{81}$和$(-2)^2$的平方根，x，y的值都有两个，那么$x+y$的值也是多个。在给出答案时要一一列举出来。

解：$\because$ x是$\sqrt{81}=9$的平方根，$\therefore$ $x=\pm 3$。

$\because$ y是$(-2)^2=4$的平方根，$\therefore$ $y=\pm 2$。

当$x=3$，$y=2$时，$x+y=5$。

当$x=-3$，$y=-2$时，$x+y=-5$。

当$x=-3$，$y=2$时，$x+y=-1$。

当$x=3$，$y=-2$时，$x+y=1$。

$\therefore$ $x+y$的一切可能值为-5，-1，1，5。

注：我们以前接触的五种运算，加、减、乘、除、乘方其运算结果都是唯一的，但开方运算求得的平方根破坏了唯一性，在运算过程中，针对平方根的情况要逐一讨论，只有

这样，我们才能给出问题的全部答案。

例 2 若a为负数，求$\sqrt{a^2}$。

分析：求$\sqrt{a^2}$就是求a^2的算术平方根，这里要注意a为负数。

解：$\because$ $a<0$，$-a>0$，$\therefore$ $-a$是a^2的算术平方根。

而$\sqrt{a^2}$表示a^2的算术平方根，$\therefore$ $\sqrt{a^2}=-a$。

注：针对求算术根的问题，我们一定要注意求得的算术根一定是非负数。在此题中，求$\sqrt{a^2}$就是求a^2的算术平方根，又条件指出了$a<0$，所以不能习惯的写成$\sqrt{a^2}=a$，否则我们将得到一个正数等于一个负数的错误结论。

例 3 查表求$\sqrt[4]{2}$。

分析：直接查表求$\sqrt[4]{2}$是找不到答案的，因为没有4次方根表可查。但是由定义$(\sqrt[4]{2})^4=2$，两边开平方取算术根，得到$(\sqrt[4]{2})^2=\sqrt{2}$，这就是说，求$\sqrt[4]{2}$可以转化为求$\sqrt{2}$的算术平方根。

解：$\because$ $(\sqrt[4]{2})^4=2$，$\therefore$ $(\sqrt[4]{2})^2=\sqrt{2}$，

又 $\sqrt{2}=1.414$，查表知$\sqrt{1.414}=1.189$。

$\therefore$ $\sqrt[4]{2}=1.189$。

注：对于求4次方根问题，可以转化成求平方根的问题。同样对于求6次方根问题可以转化成求平方根和立方根的问题。这样一来，象求4次方根、6次方根、9次方根等这样的高次方根的问题，我们都可以通过累次求平方根和立方根来得到答案。

例 4 比较下列各对数的大小。

(1) $\sqrt{2}$与1.414；(2) π与$\sqrt{8}$；

(3) π与3.14；　　(4) $\sqrt[7]{3}$与$\sqrt[5]{2}$。

分析：直接比较两实数的大小是困难的，对这类问题，

往往是把它们转化为整数或有理数来比较，或者是通过一个中间变量，由$a>b$，$b>c$，得出$a>c$。

解：(1) $\because$ $(\sqrt{2})^2=2$，$1.414^2=1.999396$，

$\therefore$ $(\sqrt{2})^2>1.414^2$，$\therefore$ $\sqrt{2}>1.414$。

(2) $\because$ $\pi>3$，$3=\sqrt{9}>\sqrt{8}$，

$\therefore$ $\pi>3>\sqrt{8}$，即$\pi>\sqrt{8}$。

(3) $\because$ $\pi=3.1415926\cdots$，$\pi-3.14=0.0015926\cdots>0$，

$\therefore$ $\pi>3.14$。

(4) $\because$ $[(\sqrt[7]{3})^7]^5=3^5=243$，

$[(\sqrt[5]{2})^5]^7=2^7=128$，

$\therefore$ $(\sqrt[7]{3})^{35}>(\sqrt[5]{2})^{35}$。

$\therefore$ $\sqrt[7]{3}>\sqrt[5]{2}$。

【单元检测】

一、判断正误（对正确的打“√”号，错误的打“×”号）

1．若有理数a有平方根，则平方根有两个．(　　　)

2．若不同的两个数的平方相等，则这两个数互为相反数。(　　　)

3．$\sqrt{9}=\pm3$。(　　　)

4．算术平方根是正数。(　　　)

5．$\sqrt{-a}$无意义。(　　　)

6．$x^2=a$，x是a的算术平方根，$-x$是a的负的平方根。(　　　)

7．正数N扩大到原来的10倍，$\sqrt{N}$扩大到原来的100倍。(　　　)

8．被开方数N的小数点向左移动四个数位，$\sqrt{N}$的小

数点相应向左移动两个数位。 (　　)

9．负数的n次方根无意义。 (　　)

10．零的n次方根，也叫做零的算术根。 (　　)

11．只有当n为偶数时，正数a的正的n次方根$\sqrt[n]{a}$才叫做a的n次算术根。 (　　)

12．对于有理数a，一定有$\sqrt[3]{a}\leqslant a$。 (　　)

13．无限小数是无理数。 (　　)

14．实数的绝对值还是实数。 (　　)

15．一个实数不是有理数，就是无理数。 (　　)

二、填空

1．$x^2=1.44$，$x=$________。

2．对于任意的有理数a，它的平方根存在情况是________。

3．$\sqrt{-a}=1$，$a=$________。

4．$\sqrt{2}=1.414$，$\sqrt{200}$的整数部分是________。

5．当n为________数时，正数a的n次方根是$\sqrt[n]{a}$。

6．0到1之间的实数有________个，0到1之间的有理数有________个。

7．如果a的小数点向左移动6位，那么$\sqrt[3]{a}$的小数点向________移动________位。

8．数集$\{3.14,\ -1.414,\ \sqrt[3]{8},\ \sqrt{5},\ 3\pi,\ \sqrt{|-2|}\}$中，无理数的个数有____。

9．如果$a^2+b^2=5$，a，b为整数，那么，$ab=$____。

三、选择题

1．设x是9的平方根，$y=(\sqrt{3})^2$，x与y的关系是(　　)。

(A) $x=\pm y$。　　　　(B) $x=y$。

(C) $x=-y$。　　　　(D) $x\neq y$。

2．设$x=(-\sqrt{4})^2$，$y=\sqrt{(-4)^2}$，那么，$x\cdot y$的值是(　　　)。

(A) 4。　(B) -4。　(C) 16。　(D) -16。

3．如果$\sqrt{-a}$是算术根，那么a的取值范围是(　　　)。

(A) $a>0$。　　　　(B) $a=0$。

(C) $a<0$。　　　　(D) $a=0$或a为负数。

4．n为大于1的自然数，对于$\sqrt[n]{-a}$下面成立的判断是(　　　)。

(A) 一定无意义、(B) 一定有意义。

(C) 如果n是偶数，那么$\sqrt[n]{-a}$一定无意义。

(D) 如果n是奇数，那么$\sqrt[n]{-a}$一定有意义。

5．设$M=\sqrt[m]{(-3)^m}$，$N=\sqrt[n]{(-3)^n}$，其中，n为偶数，那么M与N的关系是(　　　)。

(A) $M=N$。　　　　(B) $M=-N$。

(C) $M=\pm N$。　　　　(D) $N=|M|$。

6．$\alpha=\sqrt[3]{4}$，$\beta=\sqrt[5]{\frac{5}{2}}$，$\alpha$与$\beta$的大小关系是(　　　)。

(A) $\alpha>\beta$。　(B) $\alpha=\beta$。

(C) $\alpha<\beta$。　(D) 不能确定。

四、解答下列各题

1．求$\sqrt{|-1|}$，$\sqrt{(-8)^2}$，$\sqrt{3^2+4^2}$。

2．查表求 $\sqrt[9]{3}$，$\sqrt[6]{2}$，$\sqrt[4]{2987}$。

3．如果$x+1$是7的平方根，求x。

五、比较下列各组数的大小