高等院校电子信息与电气学科特色教材

控制工程数学基础学习指导

付兴建　马　洁　主编
王　辉　王军茹　参编

清华大学出版社

高等院校电子信息与电气学科特色教材

控制工程数学基础学习指导

付兴建　马　洁　主编
王　辉　王军茹　参编

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是与马洁、付兴建主编的《控制工程数学基础》相配套的学习指导书。书中概括了教材的主要内容，指出各章的学习重点，并列举一些典型例题，包括一些重点高校近年的考研题，给出了全书的习题解答。

本书除作为自动化专业作配套教材之外，还可作为相关专业的教师命题参考用书或研究生入学考试参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

控制工程数学基础学习指导/付兴建等主编. —北京：清华大学出版社，2013.6
(高等院校电子信息与电气学科特色教材)
ISBN 978-7-302-32219-1

Ⅰ. ①控…　Ⅱ. ①付…　Ⅲ. ①工程数学－高等学校－教材　Ⅳ. ①TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 084577 号

责任编辑：盛东亮
封面设计：常雪影
责任校对：梁　毅
责任印制：王静怡

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　邮　　编：100084
社 总 机：010-62770175　　邮　　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课 件 下 载：http://www.tup.com.cn,010-62795954
印 刷 者：三河市君旺印装厂
装 订 者：三河市新茂装订有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　印　　张：6.75　　字　　数：167 千字
版　　次：2013 年 6 月第 1 版　　印　　次：2013 年 6 月第1次印刷
印　　数：1～2000
定　　价：19.00 元

产品编号：051161-01

出版说明

随着我国高等教育逐步实现大众化以及产业结构的进一步调整，社会对人才的需求出现了层次化和多样化的变化，这反映到高等学校的定位与教学要求中，必然带来教学内容的差异化和教学方式的多样性。而电子信息与电气学科作为当今发展最快的学科之一，突出办学特色，培养有竞争力、有适应性的人才是很多高等院校的迫切任务。高等教育如何不断适应现代电子信息与电气技术的发展，培养合格的电子信息与电气学科人才，已成为教育改革中的热点问题之一。

目前我国电类学科高等教育的教学中仍然存在很多问题，例如在课程设置和教学实践中，学科分立，缺乏和谐与连通；局部知识过深、过细、过难，缺乏整体性、前沿性和发展性；教学内容与学生的背景知识相比显得过于陈旧；教学与实践环节脱节，知识型教学多于研究型教学，所培养的电子信息与电气学科人才还不能很好地满足社会的需求等等。为了适应21世纪人才培养的需要，很多高校在电子信息与电气学科特色专业和课程建设方面都做了大量工作，包括国家级、省级、校级精品课的建设等，充分体现了各个高校重点专业的特色，也同时体现了地域差异对人才培养所产生的影响，从而形成各校自身的特色。许多一线教师在多年教学与科研方面已经积累了大量的经验，将他们的成果转化为教材的形式，向全国其他院校推广，对于深化我国高等学校的教学改革是一件非常有意义的事。

为了配合全国高校培育有特色的精品课程和教材，清华大学出版社在大量调查研究的基础之上，在教育部相关教学指导委员会的指导下，决定规划、出版一套"高等院校电子信息与电气学科特色教材"，系列教材将涵盖通信工程、电子信息工程、电子科学与技术、自动化、电气工程、光电信息工程、微电子学、信息安全等电子信息与电气学科，包括基础课程、专业主干课程、专业课程、实验实践类课程等多个方面。本套教材注重立体化配套，除主教材之外，还将配套教师用CAI课件、习题及习题解答、实验指导等辅助教学资源。

由于各地区、各学校的办学特色、培养目标和教学要求均有不同，所以对特色教材的理解也不尽一致，我们恳切希望大家在使用本套教材的

过程中，及时给我们提出批评和改进意见，以便我们做好教材的修订改版工作，使其日趋完善。相信经过大家的共同努力，这套教材一定能成为特色鲜明、质量上乘的优秀教材，同时，我们也欢迎有丰富教学和创新实践经验的优秀教师能够加入到本丛书的编写工作中来！

清华大学出版社

高等院校电子信息与电气学科特色教材编委会

联系人：盛东亮 shengdl@tup.tsinghua.edu.cn

前言

“控制工程数学基础”课程是北京信息科技大学教学改革的结果，它是自动化、智能科学与技术等专业的专业基础课。它把散见于多门课程之中的这类专业所需要的工程数学知识集于一体。通过本课程的学习，可以使学生了解控制工程和信号处理的基本概念，掌握控制系统信号分析的基本方法，提高分析实际问题的能力。由于本课程的内容具有较强的理论性和实用性，特别是本课程是在大学低年级开设，很多学生在学习过程中感到非常困难，因此有必要配合教材编写一本学习指导书。

本书概括了教材的主要内容，指出各章的学习重点，新增一些典型例题（包括一些重点高校近年的考研题），并给出了全书的习题解答。

本书对于教师也是一本很好的参考书，它有利于对课程内容的整体把握，有助于备课、批改作业和命题测试。

由于编者水平有限，书中难免有欠妥之处，敬请各方指正。

编　者

2013 年 3 月

目录

第1章 控制工程导论

1.1 本章内容概要

1."三论"与控制工程

1)"三论"及三位科学家

信息论、系统论和控制论是20世纪40年代先后创立并获得迅猛发展的最伟大的科学研究理论成果之一。人们摘取了这三论的英文名字的第一个字母,把它们称为SCI论。它们是控制工程的方法论基础。

信息论是1948年由美国数学家香农(Shannon,1916—2001年)创立的,是研究信息传输和信息处理系统中一般规律的科学。

系统论是美国生物学家贝塔朗菲(Bertalanffv,1901—1972年)创立的,是研究系统的结构和功能(包括演化、协同和控制)的一般规律的科学,其研究对象为各类系统。

控制论是1948年由美国数学家维纳(Wiener,1894—1964年)提出的,是以数学为纽带研究动物、机器、自然和社会等系统中控制、反馈和通信的共同规律的科学。

2)控制论与工程控制论

控制论的主要奠基人是美国科学家诺伯特·维纳。他于1948年所写的《控制论》一书被公认为控制论学科诞生的标志。控制论的基本概念是信息概念、统计概念和反馈概念。

工程控制论的诞生以1954年我国科学家钱学森出版的《工程控制论》一书为标志,这本著作首先提出工程控制论的概念,并把控制论推广到工程领域。

维纳提出了控制论,钱学森的工程控制论率先解决了实际与理论的统一,工程与数学的统一问题,为控制论深入应用于各领域提供了有力的工具和方法。

2. 控制系统的基本概念

控制系统基本特点:

(1) 控制系统的控制过程就是信息的传递、变换的过程;

(2) 控制系统是闭环的反馈系统;

(3) 控制系统性能的研究要引入统计概念。

对控制系统的基本要求:对控制系统的基本要求一般可归结为稳定性、准确性和快速性三个方面,即稳、准、快。

3. 线性系统的性质

线性系统是系统中的一类重要理想模型。同时满足可加性和齐次性的系统称为线性系

统。可记为

$$若\ f_1(t) \rightarrow y_1(t),\quad f_2(t) \rightarrow y_2(t)$$

则对于任意常数 a_1 和 a_2，有

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \rightarrow a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

不满足上述关系的系统称为非线性系统。

4. 经典控制理论与现代控制理论

1）控制理论的发展历程

(1)“经典控制理论”发展时期。20 世纪 40～50 年代为“经典控制理论”发展时期。早期的控制系统分析是建立在时间域的基础上的。随着自动化技术的发展，系统越来越复杂，人们开始采用拉普拉斯变换，将时间域问题变为频率域问题来处理，这就是经典控制理论，它适用于线性、定常、单输入单输出系统。

(2)“现代控制理论”发展时期。20 世纪 60～70 年代为“现代控制理论”发展时期。现代控制理论的奠定人是美国科学家卡尔曼(R. E. Kalman)，他提出的状态空间分析法及苏联学者庞特里亚金(Pontryagin)提出的极大值原理和其他学者提出的动态规划等方法，形成了最优控制、系统辨识、自适应控制等现代控制理论的研究方向。其主要研究对象扩充到多输入-多输出系统，非线性、变参数、离散的系统。

(3) 向“大系统理论”和“智能控制理论”的方向发展。20 世纪 70 年代末至今，向“大系统理论”和“智能控制理论”的方向发展。

“大系统理论”是控制理论在广度上的开拓，主要研究对象是众多因素的控制系统，分析方法也是时域法和应用计算机，它所研究的问题涉及社会系统、经济系统、生态环境系统和人的大脑系统等。

“智能控制理论”是控制理论在深度上的挖掘。“智能控制理论”是通过研究与模拟人类活动的机理，研究具有仿人智能的工程控制和信息处理问题。目前智能控制理论已经形成了模糊控制、神经网络控制和专家控制等重要分支。

2）控制系统的模型论

按照人们对被控对象的了解程度，有白箱模型、黑箱模型和灰箱模型。

(1) 白箱模型：对那些内部结构和特性基本清楚的系统，可利用已知的一些基本定律，即用先验知识，经过分析和演绎，理论上推导出数学表达式或逻辑关系。

(2) 黑箱模型：对那些内部结构和特性不清楚的系统，用系统辨识与参数估计方法建立数学模型。系统辨识就是按照一个准则在一组模型类中选取一个与测试数据拟合得最好的模型，是从特殊到一般的过程。

(3) 灰箱模型：对那些内部结构和特性有部分了解，但又不甚了解的系统，则可采用前两种相结合的混合建模法，因此这种方法用得最多。

3）控制系统的主要分析方法

描述系统的方法可分为两大类：输入输出法和状态变量法。

系统的求解方法可分为两大类：时域法和变换域法。

时域法主要包括连续系统时域分析和离散系统时域分析；变换域法主要有频域分析(傅里叶变换)与变换域分析(拉普拉斯变换、z 变换法)等。

1.2　学习重点及例题

（1）控制工程、控制理论的一些概念；

（2）线性系统的性质，如线性、微分特性、积分特性等。

例 1-1　判断下列系统是否为线性系统？为什么？

（1）$y(t)=f(4t)$

（2）$y(t)=f^2(t)$

解　（1）设 $y_1(t)=f_1(4t)$，$y_2(t)=f_2(4t)$，则

$$a_1y_1(t)+a_2y_2(t)=a_1f_1(4t)+a_2f_2(4t)$$

满足线性系统的要求。

（2）设 $y_1(t)=f_1^2(t)$，$y_2(t)=f_2^2(t)$，则

$$a_1y_1(t)+a_2y_2(t)=a_1f_1^2(t)+a_2f_2^2(t)\neq[a_1f_1(t)+a_2f_2(t)]^2$$

不满足线性系统的要求。

例 1-2　判断系统 $y(t)=\cos[f(t)]$是否为线性时不变系统？

解　设 $y_1(t)=\cos[f_1(t)]$，$y_2(t)=\cos[f_2(t)]$，则

$$a_1y_1(t)+a_2y_2(t)=\cos[a_1f_1(t)+a_2f_2(t)]\neq\cos[a_1f_1(t)]+\cos[a_2f_2(t)]$$

所以不满足线性系统的要求，为非线性系统。

设输入延迟时间为 τ，则 $y(t-\tau)=\cos[f(t-\tau)]$，故该系统为时不变系统。

1.3　习题解答

1-1　试判别以下方程所描述的系统的类型。

（1）$y(t)=\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}+\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$

（2）$y''(t)+2y'(t)+3y(t)=f'(t)+f(t-2)$

（3）$y''(t)+2ty'(t)+6y(t)=7f(t)$

（4）$[y'(t)]^2+y(t)=f(t)$

答　（1）线性系统

（2）线性时不变系统

（3）线性时变系统

（4）非线性时不变系统

1-2　试证明方程

$$y'(t)+ay(t)=u(t)$$

所描述的系统为线性系统，式中 a 为常数。

证明　先证明是否满足可加性：

设 $u_1(t)\rightarrow y_1(t)$，$u_2(t)\rightarrow y_2(t)$，则有

$$y_1'(t)+ay_1(t)=u_1(t)$$

$$y_2'(t)+ay_2(t)=u_2(t)$$

以上两式相加得

$$[y_1(t)+y_2(t)]'+a[y_1(t)+y_2(t)]=u_1(t)+u_2(t)$$

所以

$$u_1(t)+u_2(t)\rightarrow y_1(t)+y_2(t)$$

满足可加性。

再证明是否满足齐次性，设 $u(t)\rightarrow y(t)$，则有

$$[ay(t)]'+a[ay(t)]=au(t)$$

所以

$$au(t)\rightarrow ay(t)$$

满足齐次性。

第2章 复数与复变函数基础

2.1 本章内容概要

1. 复数及其代数运算

1）复数的概念

$z=x+\mathrm{j}y$ 为复数，其中 x,y 分别称为 z 的实部和虚部，记作

$$x=\mathrm{Re}(z)\quad y=\mathrm{Im}(z)$$

当 $x=0$ 时，$z=\mathrm{j}y$ 称为纯虚数；

当 $y=0$ 时，$z=x+\mathrm{j}0$，这时 z 就是实数。

2）复数的代数运算

设两个复数分别为 $z_1=x_1+\mathrm{j}y_1$ 和 $z_2=x_2+\mathrm{j}y_2$，则有

加减法运算：$(x_1+\mathrm{j}y_1)\pm(x_2+\mathrm{j}y_2)=(x_1\pm x_2)+\mathrm{j}(y_1\pm y_2)$

乘法运算：$(x_1+\mathrm{j}y_1)(x_2+\mathrm{j}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{j}(x_2y_1+x_1y_2)$

除法运算：设 $z_2=x_2+\mathrm{j}y_2\neq0$

$$\frac{x_1+\mathrm{j}y_1}{x_2+\mathrm{j}y_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{j}\,\frac{x_2y_1-x_2y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

共轭复数：实部相同而虚部正负号相反的两个复数称为共轭复数，与 z 共轭的复数记作$\bar{z}$。如果 $z=x+\mathrm{j}y$ 则$\bar{z}=x-\mathrm{j}y$。

3）复数四则运算

加法交换律：$z_1+z_2=z_2+z_1$

乘法交换律 ：$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$

加法结合律：$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$

乘法结合律：$z_1(z_2\cdot z_3)=(z_1\cdot z_2)z_3$

乘法对于加法的分配律：$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$

4）复数运算的特殊情况

$$z+0=z,\quad 0\cdot z=0$$

$$z\cdot 1=z,\quad z\cdot\frac{1}{z}=1$$

若 $z_1z_2=0$，则 z_1 与 z_2 至少有一个为零，反之亦然。

5）共轭复数的运算

$\bar{\bar{z}}=z$

$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \ \bar{z}_2$

$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0)$

$z\bar{z} = [\mathrm{Re}z]^2 + [\mathrm{Im}z]^2$

$\mathrm{Re}z = \dfrac{z+\bar{z}}{2}, \mathrm{Im}z = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

$z = \bar{z} \Leftrightarrow z$ 为实数

2. 复数的表示

1）复数的几何表示

复数 $z=x+\mathrm{j}y$ 可以用复平面上的向量$\overrightarrow{OP}$表示(见图 2-1)，向量的长度称为 z 的模或绝对值。记为$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$。

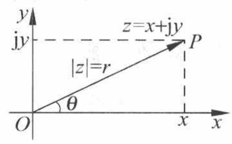

图 2-1　复数的几何表示

辐角：在 $z\neq 0$ 的情况，向量$\overrightarrow{OP}$与 x 轴的夹角 θ，记 $\mathrm{Arg}z=\theta$。

任何一个复数 $z\neq 0$ 有无穷多个辐角，如果 θ_0 是其中的一个，那么

$$\mathrm{Arg}z = \theta_0 + 2\pi k \quad (k \text{ 为任意整数})$$

就给出了 z 的全部辐角(无穷多个)。

辐角中，满足 $-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$ 的 θ_0 称 $\mathrm{Arg}z$ 的主值，记为 $\theta_0 = \arg z$。

2）复数的三角表示和指数表示

$z=r(\cos\theta+\mathrm{j}\sin\theta)$称为复数的三角表示法。

$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$称为复数的指数表示法。

3. 复数的乘幂与方根

1）复数乘积与商

定理一　两个复数乘积的模等于它们的模的乘积；两个复数乘积的辐角等于它们的辐角的和。

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{j}\sin(\theta_1+\theta_2)] = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_1+\theta_2)}$$

或

$$z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = r_1 \cdot r_2 \cdots r_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}$$

定理二　两个复数的商的模等于它们的模的商；两个复数的商的辐角等于被除数与除数的辐角之差。

当 $z_1 \neq 0$ 时

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|}, \quad \mathrm{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \mathrm{Arg}z_2 - \mathrm{Arg}z_1$$

或

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2}}{r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1}} = \frac{r_2}{r_1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_2-\theta_1)}$$

2）复数幂与根

复数幂

n 个相同复数 z 的乘积为 z 的 n 次幂，记为 z^n。

棣莫佛(De Moivre)公式：

$$(\cos\theta+\mathrm{j}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{j}\sin n\theta$$

复数方程求根：对于方程 $w^n=z$，当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时，得到 n 个相异的根

$$w_0=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+\mathrm{j}\sin\frac{\theta}{n}\right)$$

$$w_1=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n}+\mathrm{j}\sin\frac{\theta+2\pi}{n}\right)$$

$$\vdots$$

$$w_{n-1}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}+\mathrm{j}\sin\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right)$$

4. 复变函数与映射

1）复变函数的定义

设 G 是一个复数 $z=x+\mathrm{j}y$ 的集合，如果有一个确定的法则存在，根据这一法则，对于集合 G 中的每一个复数 z，就有一个或几个复数 $w=u+\mathrm{j}v$ 与之对应，那么称复变数 w 是复变数 z 的函数简称复变函数，记作 $w=f(z)$。z 称为自变量，w 称为因变量。

2）映射的概念

如果用 z 平面上的点表示自变量 z 的值，而用另一个平面 w 平面上的点表示函数 w 的值，那么函数 $w=f(z)$ 在几何上就可以看作是把 z 平面上的一个点集 G(定义集合)变到 w 平面上的一个点集 G^*(函数值集合)的映射(或变换)。这个映射通常简称为由函数 $w=f(z)$ 所构成的映射。

如果 G 中的点 z 被映射 $w=f(z)$ 映射成 G^* 中的点 w，那么 w 称为 z 的象(映像)，而 z 称为 w 的原象。

在复变函数中，对“函数”、“映射”(“变换”)等名词的使用，没有本质上的区别。今后不再区别函数与映射。

2.2 学习重点及例题

(1) 复数、复变函数的概念；

(2) 复数的基本代数运算；

(3) 复数的三种表示形式及其之间的变换

(4) 复数的乘幂与方根的求解方法；

(5) 映射的概念。

通过本章的学习，为后面进行复频率域分析打基础。

例 2-1 当 x 和 y 等于什么实数时，等式 $\dfrac{x+1+\mathrm{j}(y-3)}{5+3\mathrm{j}}=1+\mathrm{j}$ 成立？

解 如果等式 $\dfrac{x+1+\mathrm{j}(y-3)}{5+3\mathrm{j}}=1+\mathrm{j}$ 成立，则

$$x+1+j(y-3)=(1+j)(5+3j)=2+8j$$

两个复数相等，当且仅当它们的实部与实部相等，虚部与虚部相当，所以有

$$\begin{cases} x+1=2 \\ y-3=8 \end{cases}$$

故

$$\begin{cases} x=1 \\ y=11 \end{cases}$$

所以当 $x=1, y=11$ 时，等式成立。

例 2-2 证明 $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$。

证 因为

$$\begin{aligned} |z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 &= (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})+(z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2}) \\ &= z_1\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+z_1\bar{z}_1-z_1\bar{z}_2-z_2\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2 \\ &= 2(z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2)=2(|z_1|^2+|z_2|^2) \end{aligned}$$

例 2-3 如果 $z=e^{jt}$，证明：

(1) $z^n+\dfrac{1}{z^n}=2\cos nt$；(2) $z^n-\dfrac{1}{z^n}=2j\sin nt$。

证 由棣莫佛公式，有

$$z^n=(e^{jt})^n=(\cos t+j\sin t)^n=\cos nt+j\sin nt$$

而

$$z^{-n}=\frac{1}{z^n}=[\cos(-t)+j\sin(-t)]^n=\cos(-nt)+j\sin(-nt)=\cos nt-j\sin nt$$

则有

$$z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos nt, \quad z^n-\frac{1}{z^n}=2j\sin nt$$

例 2-4 计算 $\sqrt{-1-j}$。

解 因为

$$-1-j=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right)+j\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\right]$$

所以

$$-1-j=\sqrt[4]{2}\left[\cos\frac{-\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{2}+j\sin\frac{-\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{2}\right] \quad (k=0,1)$$

即

$$w_0=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{8}-j\sin\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$w_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{8}+j\sin\frac{5\pi}{8}\right)$$

2.3 习题解答

2-1 将下列复数表示为 $x+jy$ 的形式：

(1) $\left(\frac{1-j}{1+j}\right)^7$；

(2) $\frac{j}{1-j}+\frac{1-j}{j}$。

解　(1) 因为

$$\frac{1-j}{1+j}=\frac{(1-j)^2}{(1+j)(1-j)}=\frac{(1-j)^2}{2}=-j,$$

$$\left(\frac{1-j}{1+j}\right)^7=(-j)^7=j$$

(2) 因为

$$\frac{j}{1-j}+\frac{1-j}{j}=\frac{j^2+(1-j)^2}{(1-j)j}=\frac{-1-2j}{1+j}=\frac{(-1-2j)(1-j)}{2}=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}j$$

2-2　计算$\dfrac{j-2}{1+j+\frac{j}{j-1}}$。

解　因为

$$\frac{j-2}{1+j+\frac{j}{j-1}}=\frac{(j-2)(j-1)}{(1+j)(j-1)+j}=\frac{j^2-j-2j+2}{j^2-1+j}=\frac{1-3j}{-2+j}$$

$$=\frac{(1-3j)(-2-j)}{(-2+j)(-2-j)}=\frac{-2-j+6j+3j^2}{(-2)^2-j^2}=-1+j$$

2-3　设 $z_1=5-5j, z_2=-3+4j$，求$\frac{z_1}{z_2}$与$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$。

解

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{5-5j}{-3+4j}=\frac{(5-5j)(-3-4j)}{(-3+4j)(-3-4j)}=\frac{(-15-20)+(15-20)j}{25}=-\frac{7}{5}-\frac{1}{5}j$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=-\frac{7}{5}+\frac{1}{5}j$$

2-4　设 $z=-\frac{1}{j}-\frac{3j}{1-j}$，求 $\mathrm{Re}(z)$，$\mathrm{Im}(z)$与 $z\cdot\bar{z}$。

解　因为

$$z=-\frac{1}{j}-\frac{3j}{1-j}=-\frac{j}{j\cdot j}-\frac{3j(1+j)}{(1-j)(1+j)}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}j$$

$$\mathrm{Re}(z)=\frac{3}{2},\quad \mathrm{Im}(z)=-\frac{1}{2}$$

$$z\cdot\bar{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$$

2-5　设 $z_1=x_1+jy_1, z_2=x_2+jy_2$，证明　$z_1\cdot\bar{z}_2+\bar{z}_1\cdot z_2=2\mathrm{Re}(z_1\cdot\bar{z}_2)$。

证

$$\begin{aligned}z_1\cdot\bar{z}_2+\bar{z}_1\cdot z_2&=(x_1+jy_1)(x_2-jy_2)+(x_1-jy_1)(x_2+jy_2)\\&=(x_1x_2+y_1y_2)+j(x_2y_1-x_1y_2)+(x_1x_2+y_1y_2)+j(-x_2y_1+x_1y_2)\\&=2(x_1x_2+y_1y_2)=2\mathrm{Re}(z_1\cdot\bar{z}_2)\end{aligned}$$

2-6　化简下列式子：

(1) $\sqrt{5+12j}$；

(2) $\sqrt{\mathrm{j}}+\sqrt{-\mathrm{j}}$。

解 (1) 设 $\sqrt{5+12\mathrm{j}}=x+\mathrm{j}y$,则

$$5+12\mathrm{j}=(x^2-y^2)+2xy\mathrm{j}$$

$$\begin{cases}x^2-y^2=5\\2xy=12\end{cases}\Rightarrow x=\pm 3,\quad y=\pm 2$$

$$\sqrt{5+12\mathrm{j}}=\pm(3+2\mathrm{j})$$

(2) $\sqrt{\mathrm{j}}=x+y\mathrm{j}$

$$\begin{cases}x^2-y^2=0\\2xy=1\end{cases}$$

解方程组得

$$x=y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

所以

$$\sqrt{\mathrm{j}}=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{j}\right)$$

$$\sqrt{-\mathrm{j}}=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{j}\right)$$

$$\sqrt{\mathrm{j}}+\sqrt{-\mathrm{j}}=\pm\sqrt{2}$$

2-7 求使下列等式成立的实数 x 和 y：

$$x+\mathrm{j}y=\sqrt{a+b\mathrm{j}}$$

解 先将原等式平方得 $x^2+y^2+2xy\mathrm{j}=a+b\mathrm{j}$

求得

$$\begin{cases}x^2-y^2=a & ①\\2xy=b & ②\end{cases}$$

将 $y=\dfrac{b}{2x}$代入①式得

$$x^2-\frac{b^2}{4x^2}=a$$

整理得

$$4x^4-4ax^2-b^2=0$$

解得

$$x^2=\frac{4a\pm\sqrt{16a^2+16b^2}}{8}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

因为 $x^2>0$，$\sqrt{a^2+b^2}\geqslant a$，所以只能取

$$x^2=\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

所以

$$x=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$