

教师·家长辅导丛书

高中数学教学参考书

南京大学出版社

《教师·家长辅导丛书》

高中数学教学参考书



南京大学出版社

1986·南京

内 容 提 要

本书分16个专题，概括了中学数学教材的基本内容。根据中学数学各部分内容的有机联系，作了综合归类，思路清晰，逻辑性强。通过典型例题的分析，突出重点和难点，可指导学生提高分析问题和解决问题的能力。书中介绍了许多巧妙的方法，凝聚了编者丰富的教学经验和研究成果，是高考者的良师益友。对广大中学生和中学数学教师是一本有益的读物。对在职干部、职工参加成人高考也有一定参考价值。

本书附有综合试题三套，各部分后均附有一定量的练习题及其答案。

《教师·家长辅导丛书》

高中数学教学参考书

杨佩祚 王 峰 编
杨海燕 徐金碧
仇炳生

南京大学出版社出版

(南京大学校内)

江苏省新华书店发行 国营练湖印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：9.4375 字数：212千

1986年11月第1版 1986年11月第1次印刷

印数 1—30 000

统一书号：7336·023

定价：1.40元

责任编辑：秦 涛

出版说明

为了适应中学教师和家长辅导高中学生学习的需要，我们在去年《高中复习指导丛书》的基础上，重新编写了一套《教师·家长辅导丛书》——高中课程教学参考书。

本《丛书》共分九册，包括政治、语文、数学、物理、化学、生物、历史、地理和英语，编写本书的目的，不是要求学生把学过的东西从头到尾再学一遍，而是要求教师和家长在辅导学生学习时，能抓住重点，指导学生注意学习方法，掌握要领，加深理解学过的内容，起到巩固知识，发展能力的作用。使学生在学学习时，掌握学习技巧，花较少时间，学到更多的内容。

在编写过程中，能从实际出发概括和总结高中阶段课程的主要内容，包括复习的基本要求、基本概念、问题分析，还附有例题分析和习题答案等。充分体现了少（字数少）、精（内容精）、新（构思新）的特点。本《丛书》各册内容确能对高中学生起到良好的指导作用，无疑也将是广大中学教师和学生家长有益的参考资料。对于广大社会青年系统掌握高中教材的内容，提高解题分析能力，也会起到事半功倍，相得益彰之功效。

本丛书各册内容，均经南京大学有关专业教师审阅，力求达到内容准确，言简意赅，重点突出，便于复习辅导，是一套高中课程教学参考书。

《教师·家长辅导丛书》编写组

1986年9月

前 言

为了帮助高中学生复习数学，我们从中学数学的基本内容中，择其重点与难点，分16个专题编写了本书。本书力求贯彻“字数少、内容精、构思新”的原则，不机械地罗列基础知识和基本概念，而是抓住数学各部分内容之间的有机联系，通过典型例题的分析，着重指导学生提高分析问题、解决问题的能力。因此，读者应把本书和中学数学教科书结合起来使用，在掌握教材的基本概念和基础知识的基础上认真阅读本书，将能进一步深化概念，开阔视野，提高解题能力。

本书篇幅少，概括全面，便于阅读和检查；内容精，有代表性，便于加深和拓宽；材料新，启发思维，便于类比和推广。各个专题均有练习题，书末还附有综合性思考题三套，全部附有答案，以便读者自我检查时订正。

复习时不要拘泥于个别例题的特殊解法，而是要通过例题的分析说明，掌握方法，提高能力。

本书作者都具有多年的教学经验，特别是高考复习班的教学指导和实践的经验，希望本书能帮助参加高考复习的同志从题海中解脱出来。

由于水平所限，书中缺点与错误在所难免，尚望读者予以指正。

编 者

1985年9月

编 者

杨佩祥	南京外国语学校
杨海燕	南京市第四中学
仇炳生	南京师范大学附属中学
王 峰	南京市第九中学
徐金碧	南京市第五中学

目 录

- 1 数的性质及其应用**……………仇炳生 (1)
- § 1.1 数集的发展及其相互联系…………… (1)
 - § 1.2 自然数集、整数集和数学归纳法…………… (5)
 - § 1.3 有理数集的特征…………… (11)
 - § 1.4 实数集的一个重要性质…………… (11)
 - § 1.5 复数集…………… (12)
- 2 方程 (组) 的复习**……………徐金碧 (22)
- § 2.1 关于方程的复习…………… (22)
 - § 2.2 关于方程组的复习…………… (29)
 - § 2.3 方程化分析法…………… (32)
- 3 参数方程的解及应用**……………徐金碧 (39)
- § 3.1 一元一次、二次方程的解…………… (39)
 - § 3.2 分式、指数、对数、无理方程的解…………… (41)
 - § 3.3 图象法…………… (42)
 - § 3.4 含参数的方程的应用…………… (44)
 - § 3.5 其它应用的例题…………… (52)
- 4 函数及其图象**……………杨佩祥 (55)
- § 4.1 函数的定义…………… (55)
 - § 4.2 函数的定义域和值域…………… (56)

§ 4.3 函数的图象	(59)
§ 4.4 函数的性质	(63)
§ 4.5 应用函数图象解题举例	(70)
5 不等式的证明	王峰 (75)
§ 5.1 比较法	(75)
§ 5.2 分析法	(76)
§ 5.3 应用基本不等式法	(77)
§ 5.4 换元法	(79)
§ 5.5 反证法	(81)
§ 5.6 数学归纳法	(82)
§ 5.7 判别式法	(84)
§ 5.8 放缩法	(86)
§ 5.9 应用函数单调性证不等式	(87)
§ 5.10 几何法	(88)
6 初等极值问题	王峰、徐金碧 (90)
§ 6.1 基本题型及其解法	(90)
§ 6.2 条件极值	(92)
§ 6.3 极值应用题	(97)
§ 6.4 综合题选解	(100)
7 排列与组合	杨佩祥 (105)
§ 7.1 基本原理	(105)
§ 7.2 排列与组合数公式	(106)
§ 7.3 排列与组合的应用问题	(110)

8	数列与极限 ·····	杨佩祥 (121)
	§ 8.1 数列的通项公式·····	(121)
	§ 8.2 等差数列和等比数列·····	(123)
	§ 8.3 数列的求和·····	(125)
	§ 8.4 极限·····	(129)
	§ 8.5 应用问题·····	(133)
9	三角变换 ·····	杨海燕 (137)
	§ 9.1 适当进行角的变换·····	(137)
	§ 9.2 特殊角函数的应用·····	(141)
	§ 9.3 灵活应用基本公式·····	(142)
	§ 9.4 处理好符号问题·····	(143)
	§ 9.5 综合所学, 择优解题·····	(145)
10	解三角形及其应用 ·····	杨海燕 (155)
	§ 10.1 三角形中的边角关系·····	(155)
	§ 10.2 解三角形·····	(164)
	§ 10.3 解三角形的应用·····	(167)
11	立体几何总复习的若干要点 ·····	王峰、徐金碧 (173)
	§ 11.1 识图和画图·····	(173)
	§ 11.2 线面垂直和平行关系 的判定与应用·····	(175)
	§ 11.3 角和距离的计算·····	(178)
	§ 11.4 截面问题·····	(186)

- 12 类比法和隔离法在立体几何中的应用**.....仇炳生 (191)
- § 12.1 类比法 (191)
- § 12.2 隔离法 (197)
- § 12.3 一点说明 (205)
- 13 解析法求轨迹**.....徐金碧 (209)
- § 13.1 应用直角坐标系求轨迹
 的基本方法 (210)
- § 13.2 参数法 (216)
- § 13.3 综合题选解 (221)
- 14 在解析几何中如何减少计算量**.....仇炳生 (225)
- § 14.1 建立适当的坐标系 (227)
- § 14.2 参数方程的应用 (230)
- § 14.3 合理制定解题方案 (236)
- 15 形数结合, 开拓思路**.....仇炳生 (245)
- § 15.1 一道高考试题的启示 (245)
- § 15.2 形数结合法在解析几何中的应用 ... (246)
- § 15.3 形数结合法在代数和三角中
 的应用 (250)
- § 15.4 形数结合法在极值问题中的应用 ... (254)
- § 15.5 形数结合在解选择题、填空题时
 的应用 (257)
- § 15.6 扬长避短, 发挥优势 (260)

16 微积分初步复习纲要.....徐金碧 (263)

§ 16.1 掌握基本概念 (263)

§ 16.2 熟练掌握求导方法 (265)

§ 16.3 一阶导数的应用 (268)

§ 16.4 综合题选解 (273)

§ 16.5 关于积分部分的复习 (275)

【附录】

综合练习题 (280)

练习题答案 (287)

1

数的性质及其应用

从自然数集扩充到复数集的过程中，数集越来越复杂，其应用也越来越广泛，复杂中包含了简单，解决复杂问题总离不开基本概念和基本性质。因此，掌握各数集的性质及它们之间的联系是很重要的。

§ 1.1 数集的发展及其相互联系

1. 数集的扩充

从自然数集(N)，经整数集(Z)，有理数集(Q)，实数集(R)到复数集(C)逐步完成了数集的扩充。在数集扩充的顺序中，前者是后者的真子集，即有

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

一个集合对于某个运算是可以施行的，是指这集合中的元素，经该运算后，其结果仍属于这集合。例如，在自然数集中加法和乘法运算是可施行的，而减法则未必。如 $2-3=-1$ ， 2 和 $3 \in N$ ，但差 $-1 \notin N$ 。数集扩充的内在因素正是为了解决运算的可施行性。

运算贯穿于解题过程的始终，但运算在一个数集中，并不总是可行的。在解题时，应注意被解的题要求在什么数集内给出解答。

【例1】 设 $f(x)=18x^5+9x^4-32x-16$ ，分别在整数

集, 有理数集, 实数集, 复数集内把 $f(x)$ 分解因式, 並分别在上述数集内求出方程 $f(x)=0$ 的根.

$$[\text{解}] \quad f(x) = (2x+1)(3x^2-4)(3x^2+4) \quad (1)$$

$$= (2x+1)(\sqrt{3}x-2) \\ \times (\sqrt{3}x+2)(3x^2+4) \quad (2)$$

$$= (2x+1)(\sqrt{3}x-2)(\sqrt{3}x+2) \\ \times (\sqrt{3}x-2i)(\sqrt{3}x+2i) \quad (3)$$

∴ $f(x)$ 在整数集或有理数集内, 可分解为 (1) 式; 在实数集内可分解为 (2) 式; 在复数集内可分解为 (3) 式.

请读者自己确定方程 $f(x)=0$ 在指定数集内的根.

【例2】 设 x_1, x_2 是 $x^2 - x \sin \alpha + \sin 2\alpha = 0$ 的两根,

$$\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}), \text{ 求不等式}$$

$$\log_{x_1+x_2} \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \log_{x_1+x_2} \frac{x_2}{\sqrt{2}} > 1$$

成立时, α 的范围.

【解】 按题意得

$$\begin{cases} \Delta = \sin^2 \alpha - 4 \sin 2\alpha \geq 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \sin \alpha > 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 x_2 = \sin 2\alpha > 0 & (3) \end{cases}$$

$$\therefore \alpha \in (0, \pi/2)$$

$$\therefore \text{由 (1) 得 } \arctg 8 \leq \alpha < \pi/2$$

$$\therefore \log_{x_1+x_2} \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \log_{x_1+x_2} \frac{x_2}{\sqrt{2}} = \log_{x_1+x_2} \frac{x_1 x_2}{2}$$

$$= \log_{\sin \alpha} (\sin \alpha \cdot \cos \alpha) = 1 + \log_{\sin \alpha} \cos \alpha > 1$$

∴ 这是一绝对不等式, 所求 α 的范围为

$$\arctan 8 \leq \alpha < \pi/2$$

一元二次方程的韦达定理，对于实根或复根均成立。例2中，并未指明 x_1, x_2 是方程 $x^2 - x \sin \alpha + \sin 2\alpha = 0$ 在哪个数集内的根。若不注意判断 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ ，仅作形式上的推导，会得到 α 的范围是 $(0, \pi/2)$ 的错误结论。

2. 数集间问题的转化

数集的扩充，使我们对数的认识加深了。由于数集之间是互相联系的，使我们有可能把复杂问题转化为简单的问题，给分析、解决问题带来灵活性。

复数都具有 $a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 的形式，故根据复数相等的充要条件可把复数问题转化为相应的实数问题。

【例3】解方程 $Z^2 - |Z|^2 = \bar{Z}$

〔解〕 设 $Z = a+bi$ $a, b \in \mathbb{R}$ ，则原方程为

$$\begin{aligned} (a+bi)^2 - (a^2+b^2) &= a-bi \\ -2b^2+2abi &= a-bi \end{aligned}$$

又 $a, b \in \mathbb{R}$

$$\therefore \begin{cases} -2b^2 = a \\ 2ab = -b \end{cases}$$

由此解得： $Z=0, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$ 。

【例4】设复数 α 所表示的点，在连接点 $1+i$ 和 $1-i$ 的线段上运动，求 α^2 所表示的点的轨迹，并指出它是什么曲线。

〔解〕 设轨迹上任意一点所对应的复数为

$$Z = x+yi \quad x, y \in \mathbb{R}$$

由题意可设 $\alpha = 1+ti, -1 \leq t \leq 1$,

$$\forall x+yi = (1+ti)^2 = 1-t^2+2ti$$

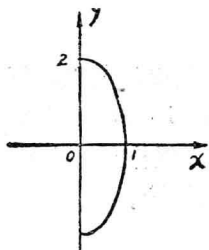


图1-1

$$\therefore \begin{cases} x=1-t^2 \\ y=2t \end{cases}$$

消去 t , 得 $y^2 = -4(x-1)$, $0 \leq x \leq 1$.

\therefore 所求轨迹为一段抛物线弧 (如图 1-1).

我们比较熟悉实数集, 解题方法也
多些, 因而把一些复数问题转化为实数
问题, 往往容易获解, 如例 4 就是通过解析法求解的. 而有些实数问题也可转化为复数问题来解决 (见例 20 和例 21).

任何一个有理数总可以表示为两个整数之比的形式, 它或是有限小数 (包括整数), 或是无限循环小数. 反之亦然. 因此, 有理数问题又可转化为整数问题.

【例 5】 设 $y=f(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, 若 $n \in \mathbb{Z}$ 时, $f(x^n) = nf(x)$ 成立, 求证该式当 $n \in \mathbb{Q}$ 时也成立.

【证】

设有理数 $a = \frac{q}{p}$, p 和 q 为互质的整数

$$\because x \in \mathbb{R}^+ \quad \therefore x^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R}^+ \quad \text{又 } q \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore f\left[\left(x^{\frac{1}{p}}\right)^q\right] = q f\left(x^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$\text{又} \quad f(x) = f\left[\left(x^{\frac{1}{p}}\right)^p\right] = p f\left(x^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$\therefore f\left(x^{\frac{1}{p}}\right) = \frac{1}{p} f(x)$$

$$\therefore f(x^a) = f\left(x^{\frac{q}{p}}\right) = \frac{q}{p} f(x)$$

$$= a f(x)$$

即本题得证。

§ 1.2 自然数集、整数集 和数学归纳法

自然数集和整数集有一个共同特性：相邻两数之差为1。由此可得推论：设 $m, n \in \mathbb{Z}$ ，若 $m > n$ ，则有 $m \geq n + 1$ 。更重要的是，由于相邻两数之差为常数，为递推创造了条件，使数学归纳法在自然数集或整数集中得到广泛应用。

1. 数学归纳法的原理

应用数学归纳法证明命题 $f(n) (n \in \mathbb{N})$ 的步骤是：

(1) 验证当 $n = n_0$ 时命题 $f(n)$ 成立，这里 n_0 是某一自然数；

(2) 假设当 $n = k$ 时命题 $f(n)$ 成立，即 $f(k)$ 正确，在这假设下可推出当 $n = k + 1$ 时，命题 $f(n)$ 也成立，即 $f(k + 1)$ 正确；

(3) 根据(1)、(2)，对于一切 $n \geq n_0$ 的自然数，命题 $f(n)$ 是成立的。

在应用数学归纳法时，必须注意以下几点：

第一，证明步骤中，三条缺一不可。其中(1)为归纳基础，若 $n_0 = 1$ ，则证得的结论对一切自然数均成立。一般， n_0 应根据具体命题的性质而定，仅有(1)，只证明了特殊的命题。(2)是归纳的依据，其中所作的假设“当 $n = k$ 时，命题 $f(n)$ 成立”叫做归纳假设。特别要注意(3)也是不可少的。

第二，数学归纳法是针对与自然数 n 有关的命题的一种

证明方法，不难理解：

若把上述证明步骤中的(1)、(2)改为

(1) 验证当 $n=m$ 时，命题 $f(n)$ 成立， $m \in \mathbb{Z}$ ；

(2) 假设 $n=k$ 时命题 $f(n)$ 成立，即 $f(k)$ 正确，再证明 $n=k+1$ 时命题 $f(n)$ 也成立，则可知当 $n \geq m$ ($n \in \mathbb{Z}$) 时，命题 $f(n)$ 正确。

第三，证明 $f(k+1)$ 正确时，必须应用归纳假设。这是我们由“ $f(n_0)$ 正确”递推到“ $f(n)$ 正确”的关键。否则，就不是应用数学归纳法了。

【例 6】应用数学归纳法证明

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2^2} \cdots \cos \frac{\alpha}{2^n} = \frac{\sin \alpha}{2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

错误的证明

(1) 验证 $n=1$ 时命题成立，

(2) 设 $n=k$ 时，命题成立，即

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2^2} \cdots \cos \frac{\alpha}{2^k} = \frac{\sin \alpha}{2^k \sin \left(\frac{\alpha}{2^k} \right)}$$

当 $n=k+1$ 时

$$\begin{aligned} & \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2^2} \cdots \cos \frac{\alpha}{2^k} \cos \frac{\alpha}{2^{k+1}} \\ &= \frac{2^{k+1} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2^2} \cdots \cos \frac{\alpha}{2^{k+1}} \sin \frac{\alpha}{2^{k+1}}}{2^{k+1} \sin \frac{\alpha}{2^{k+1}}} \\ &= \frac{2^k \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2^2} \cdots \cos \frac{\alpha}{2^k} \sin \frac{\alpha}{2^k}}{2^{k+1} \sin \frac{\alpha}{2^{k+1}}} = \cdots \end{aligned}$$