教师·家长辅导丛书

高中数学教学参考书

南京大学出版社

《教师·家长辅导丛书》

高中数学教学参考书

杨佩祥　王　峰
杨海燕　　　　编
仇炳生　徐金碧

南京大学出版社

1986·南京

内 容 提 要

本书分16个专题，概括了中学数学教材的基本内容。根据中学数学各部分内容的有机联系，作了综合归类，思路清晰，逻辑性强。通过典型例题的分析，突出重点和难点，可指导学生提高分析问题和解决问题的能力。书中介绍了许多巧妙的方法，凝聚了编者丰富的教学经验和研究成果，是高考者的良师益友。对广大中学生和中学数学教师是一本有益的读物。对在职干部、职工参加成人高考也有一定参考价值。

本书附有综合试题三套，各部分后均附有一定量的练习题及其答案。

《教师·家长辅导丛书》

高中数学教学参考书

杨佩祥 王峰 杨海燕 徐金碧 仇炳生 编

南京大学出版社出版

（南京大学校内）

江苏省新华书店发行 国营练湖印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：9.4375 字数：212千

1986年11月第1版 1986年11月第1次印刷

印数 1—30 000

统一书号：7336·023 定价：1.40元

责任编辑：秦 涛

出版说明

为了适应中学教师和家长辅导高中学生学习的需要，我们在去年《高中复习指导丛书》的基础上，重新编写了一套《教师·家长辅导丛书》——高中课程教学参考书。

本《丛书》共分九册，包括政治、语文、数学、物理、化学、生物、历史、地理和英语，编写本书的目的，不是要求学生把学过的东西从头到尾再学一遍，而是要求教师和家长在辅导学生学习时，能抓住重点，指导学生注意学习方法，掌握要领，加深理解学过的内容，起到巩固知识，发展能力的作用。使学生在学习时，掌握学习技巧，花较少时间，学到更多的内容。

在编写过程中，能从实际出发概括和总结高中阶段课程的主要内容，包括复习的基本要求、基本概念、问题分析，还附有例题分析和习题答案等。充分体现了少（字数少）、精（内容精）、新(构思新)的特点。本《丛书》各册内容确能对高中学生起到良好的指导作用，无疑也将是广大中学教师和学生家长有益的参考资料。对于广大社会青年系统掌握高中教材的内容，提高解题分析能力，也会起到事半功倍，相得益彰之功效。

本丛书各册内容，均经南京大学有关专业教师审阅，力求达到内容准确，言简意赅，重点突出，便于复习辅导，是一套高中课程教学参考书。

《教师·家长辅导丛书》编写组

1986年9月

前　言

为了帮助高中学生复习数学，我们从中学数学的基本内容中，择其重点与难点，分16个专题编写了本书。本书力求贯彻“字数少、内容精、构思新”的原则，不机械地罗列基础知识和基本概念，而是抓住数学各部分内容之间的有机联系，通过典型例题的分析，着重指导学生提高分析问题、解决问题的能力。因此，读者应把本书和中学数学教科书结合起来使用，在掌握教材的基本概念和基础知识的基础上认真阅读本书，将能进一步深化概念，开阔视野，提高解题能力。

本书篇幅少，概括全面，便于阅读和检查；内容精，有代表性，便于加深和拓宽；材料新，启发思维，便于类比和推广。各个专题均有练习题，书末还附有综合性思考题三套，全部附有答案，以便读者自我检查时订正。

复习时不要拘泥于个别例题的特殊解法，而是要通过例题的分析说明，掌握方法，提高能力。

本书作者都具有多年的教学经验，特别是高考复习班的教学指导和实践的经验，希望本书能帮助参加高考复习的同志从题海中解脱出来。

由于水平所限，书中缺点与错误在所难免，尚望读者予以指正。

编　者

1985年9月

编　　者

杨佩祥　　南京外国语学校
杨海燕　　南京市第四中学
仇炳生　　南京师范大学附属中学
王　峰　　南京市第九中学
徐金碧　　南京市第五中学

目　录

1

数的性质及其应用

从自然数集扩充到复数集的过程中，数集越来越复杂，其应用也越来越广泛，复杂中包含了简单，解决复杂问题总离不开基本概念和基本性质。因此，掌握各数集的性质及它们之间的联系是很重要的.

§1.1 数集的发展及其相互联系

1. 数集的扩充

从自然数集(N),经整数集(Z)，有理数集(Q)，实数集(R)到复数集(C)逐步完成了数集的扩充. 在数集扩充的顺序中，前者是后者的真子集，即有

$$N\subset Z\subset Q\subset R\subset C$$

一个集合对于某个运算是可以施行的，是指这集合中的元素,经该运算后,其结果仍属于这集合. 例如，在自然数集中加法和乘法运算是可施行的,而减法则未必. 如 $2-3=-1$，2 和 $3\in N$，但差 $-1\overline{\in}N$. 数集扩充的内在因素正是为了解决运算的可施行性.

运算贯穿于解题过程的始终，但运算在一个数集中，并不总是可行的. 在解题时，应注意被解的题要求在什么数集内给出解答.

【例1】 设 $f(x)=18x^5+9x^4-32x-16$，分别在整数

集，有理数集，实数集，复数集内把f(x)分解因式，并分别在上述数集内求出方程 $f(x)=0$ 的根。

〔解〕 $f(x)=(2x+1)(3x^2-4)(3x^2+4)$ （1）

$=(2x+1)(\sqrt{3}x-2)$

$\times(\sqrt{3}x+2)(3x^2+4)$ （2）

$=(2x+1)(\sqrt{3}x-2)(\sqrt{3}x+2)$

$\times(\sqrt{3}x-2i)(\sqrt{3}x+2i)$ （3）

∴ f(x)在整数集或有理数集内，可分解为（1）式；在实数集内可分解为（2）式；在复数集内可分解为（3）式。

请读者自己确定方程 $f(x)=0$ 在指定数集内的根。

【例2】 设 x_1、x_2 是 $x^2-x\sin\alpha+\sin 2\alpha=0$ 的两根，

$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，求不等式

$$\log_{x_1+x_2}\frac{x_1}{\sqrt{2}}+\log_{x_1+x_2}\frac{x_2}{\sqrt{2}}>1$$

成立时，α的范围。

〔解〕 按题意得

$$\begin{cases}\Delta=\sin^2\alpha-4\sin2\alpha\geqslant0 & (1)\\ x_1+x_2=\sin\alpha>0 & (2)\\ x_1x_2=\sin2\alpha>0 & (3)\end{cases}$$

∵ $\alpha\in(0,\pi/2)$

∴ 由（1）得 $\operatorname{arc}\operatorname{tg}8\leqslant\alpha<\pi/2$

∵ $\log_{x_1+x_2}\frac{x_1}{\sqrt{2}}+\log_{x_1+x_2}\frac{x_2}{\sqrt{2}}=\log_{x_1+x_2}\frac{x_1x_2}{2}$

$=\log_{\sin\alpha}(\sin\alpha\cdot\cos\alpha)=1+\log_{\sin\alpha}\cos\alpha>1$

∴ 这是一绝对不等式，所求α的范围为

$$\operatorname{arc\,tg} 8 \leqslant \alpha < \pi/2$$

一元二次方程的韦达定理，对于实根或复根均成立。例2中，並未指明 x_1，x_2 是方程 $x^2 - x\sin\alpha + \sin 2\alpha = 0$ 在哪个数集内的根。若不注意判断 x_1，$x_2 \in R^+$，仅作形式上的推导，会得到 α 的范围是 $(0, \pi/2)$ 的错误结论。

2. 数集间问题的转化

数集的扩充，使我们对数的认识加深了。由于数集之间是互相联系的，使我们有可能把复杂问题转化为简单的问题，给分析、解决问题带来灵活性。

复数都具有 $a+bi$（a、$b \in R$）的形式，故根据复数相等的充要条件可把复数问题转化为相应的实数问题。

【例3】 解方程 $Z^2 - |Z|^2 = \bar{Z}$

〔**解**〕 设 $Z = a+bi$　a，$b \in R$，则原方程为

$$(a+bi)^2 - (a^2+b^2) = a - bi$$

$$-2b^2 + 2abi = a - bi$$

又 a，$b \in R$

$$\therefore \quad \begin{cases} -2b^2 = a \\ 2ab = -b \end{cases}$$

由此解得：$Z = 0$，$\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{2}i$。

【例4】 设复数 α 所表示的点，在连接点 $1+i$ 和 $1-i$ 的线段上运动，求 α^2 所表示的点的轨迹，並指出它是什么曲线。

〔**解**〕 设轨迹上任意一点所对应的复数为

$$Z = x + yi \quad x, y \in R$$

由题意可设 $\alpha = 1 + ti$，$-1 \leqslant t \leqslant 1$，

$$\because \quad x + yi = (1+ti)^2 = 1 - t^2 + 2ti$$

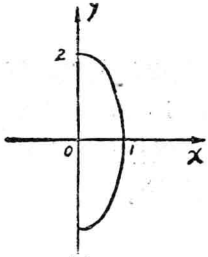

图1-1

$$\therefore \quad \begin{cases} x=1-t^2 \\ y=2t \end{cases}$$

消去 t，得 $y^2=-4(x-1)$，$0\leqslant x\leqslant 1$。

∴ 所求轨迹为一段抛物线弧（如图 1-1 ）。

我们比较熟悉实数集，解题方法也多些，因而把一些复数问题转化为实数问题，往往容易获解，如例 4 就是通过解析法求解的。而有些实数问题也可转化为复数问题来解决（见例20和例21）。

任何一个有理数总可以表示为两个整数之比的形式，它或是有限小数（包括整数），或是无限循环小数。反之亦然。因此，有理数问题又可转化为整数问题。

【例5】 设 $y=f(x)$，$x\in R^+$，若 $n\in Z$ 时，$f(x^n)=nf(x)$成立，求证该式当 $n\in Q$ 时也成立。

〔证〕

设有理数 $a=\dfrac{q}{p}$，p 和 q 为互质的整数

$\because \quad x\in R^+ \quad \therefore \quad x^{\frac{1}{p}}\in R^+ \quad$ 又 $q\in Z$

$$\therefore \quad f\left[\left(x^{\frac{1}{p}}\right)^q\right]=qf\left(x^{\frac{1}{p}}\right)$$

又 $$f(x)=f\left[\left(x^{\frac{1}{p}}\right)^p\right]=pf\left(x^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$\therefore \quad f\left(x^{\frac{1}{p}}\right)=\frac{1}{p}f(x)$$

$$\therefore \quad f(x^a)=f\left(x^{\frac{q}{p}}\right)=\frac{q}{p}f(x)$$

$$=af(x)$$

即本题得证。

§1.2 自然数集、整数集和数学归纳法

自然数集和整数集有一个共同特性：相邻两数之差为1. 由此可得推论：设 $m, n \in Z$，若 $m > n$，则有 $m \geqslant n+1$. 更重要的是，由于相邻两数之差为常数，为递推创造了条件，使数学归纳法在自然数集或整数集中得到广泛应用。

1. 数学归纳法的原理

应用数学归纳法证明命题 $f(n)(n \in N)$ 的步骤是：

（1）验证当 $n=n_0$ 时命题 $f(n)$ 成立，这里 n_0 是某一自然数；

（2）假设当 $n=k$ 时命题 $f(n)$ 成立，即 $f(k)$ 正确，在这假设下可推出当 $n=k+1$ 时，命题 $f(n)$ 也成立，即 $f(k+1)$ 正确；

（3）根据（1）、（2），对于一切 $n \geqslant n_0$ 的自然数，命题 $f(n)$ 是成立的。

在应用数学归纳法时，必须注意以下几点：

第一，证明步骤中，三条缺一不可. 其中（1）为归纳基础，若 $n_0=1$，则证得的结论对一切自然数均成立. 一般，n_0 应根据具体命题的性质而定，仅有（1），只证明了特殊的命题.（2）是归纳的依据，其中所作的假设"当 $n=k$ 时，命题 $f(n)$ 成立"叫做归纳假设. 特别要注意(3)也是不可少的。

第二，数学归纳法是对于与自然数 n 有关的命题的一种

证明方法，不难理解：

若把上述证明步骤中的（1）、（2）改为

（1）验证当 $n=m$ 时，命题 $f(m)$ 成立，$m\in Z$；

（2）假设 $n=k$ 时命题 $f(n)$ 成立，即 $f(k)$ 正确，再证明 $n=k+1$ 时命题 $f(n)$ 也成立，则可知当 $n\geqslant m$（$n\in Z$）时，命题 $f(n)$ 正确。

第三，证明 $f(k+1)$ 正确时，必须应用归纳假设。这是我们由"$f(n_0)$ 正确"递推到"$f(n)$ 正确"的关键。否则，就不是应用数学归纳法了。

【例 6】应用数学归纳法证明

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^n}=\frac{\sin\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}}\qquad(n\in N)$$

错误的证明

（1）验证 $n=1$ 时命题成立，

（2）设 $n=k$ 时，命题成立，即

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^k}=\frac{\sin\alpha}{2^k\sin(\frac{\alpha}{2^k})}$$

当 $n=k+1$ 时

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2^2}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^k}\cos\frac{\alpha}{2^{k+1}}$$

$$=\frac{2^{k+1}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^{k+1}}\sin\frac{\alpha}{2^{k+1}}}{2^{k+1}\sin\frac{\alpha}{2^{k+1}}}$$

$$=\frac{2^k\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^k}\sin\frac{\alpha}{2^k}}{2^{k+1}\sin\frac{\alpha}{2^{k+1}}}=\cdots\cdots$$