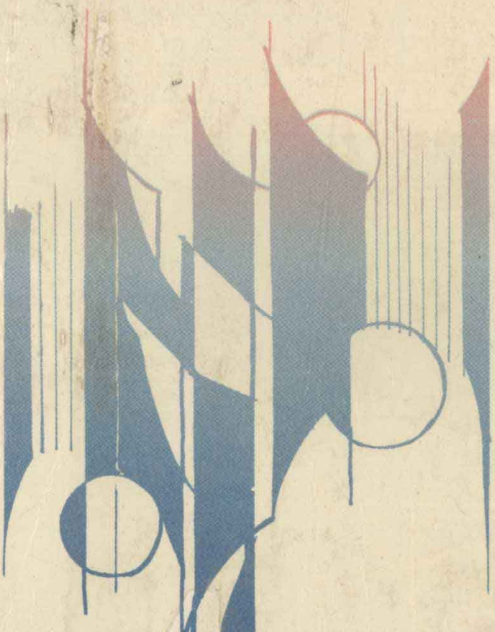
初三中考数学

新编中学教材指要·释疑·题解丛书



科学出版社

新编中学教材指要·释疑·题解丛书

初三中考数学

田云诚　（北京汇文中学）
谢达宏　（北京汇文中学）
刘绍贞　（北京西城教研中心）
盛德先　（北京二龙路中学）　编著
王秋芳　（北京中关村中学）
周　杰　（北京清华附中）
李耀华　（北京前门中学 新教材实验校）

科学出版社

1993

(京)新登字 092 号

内容简介

本丛书由北京市二中、四中、五中、八中、师大附中、人大附中、清华附中等18所重点中学的50多位任课的特级、高级教师编写，按照新大纲和人教社新编课本的章节或单元分章，旨在对课堂学习进行系统总结。每章内容都有重点难点、易混易错分析、典型例题及解题思路，以及自我检测题。每册书后附有统考或会考模拟试题，初三和高三各科书后附有中考或高考模拟试题数种。各种试题均附有正确答案，可备学生自学。本丛书重在日积月累，使学生扎实掌握所学知识，顺利通过各种考试，最终通过高考。本丛书是每个中学生必备的学习辅导书。

新编中学教材指要·释疑·题解丛书
初三中考数学
田云诚　等编著
责任编辑　唐云江
科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码 100717
中央广播电视大学印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
1993年11月第　一　版　　开本：787×1092　1/32
1993年11月第一次印刷　　印张：6 $\frac{1}{4}$
印数 0001－10 000　　字数：128 000
ISBN 7-03-003725-1/G·403
定价：4.20元

前　　言

为了贯彻落实好国家教育委员会《现行普通高中教学计划的调整意见》和《九年义务教育全日制初级中学教学大纲》，依据新编各科教材的必修本、选修本及义务教育三年制初级中学教科书，按照教学规律，又不加重学习负担。我们组织北京市 18 所重点中学的 50 多位特、高级教师编写了这套配合新教材的学习参考书。

希望通过这套丛书的使用，使广大学生加深对各科教材及教师讲授内容的理解，帮助学生抓住重点，突破难点，搞清楚知识的来龙去脉，从而提高学生对基础知识的理解和掌握。希望通过这套丛书的使用培养学生建立科学的解题思路，提高判别能力，提高对各种题型的解题能力，从而提高学生的学习成绩。这就是我编写这套丛书的宗旨。

这套丛书各分册的每章中都含有“知识结构”、“重点难点”、“典型例题及解题思路”、易错易混分析”、“自我检测”或“会考模拟试题”或“高考模拟试题”等部分。本套丛书选题精要，题型新颖，有利于提高学习效率。我们相信通过以上各部分的使用一定能帮广大同学解决学习上的疑难问题，成为广大同学提高学习成绩的好助手。

由于共同研究和编写的时间较为仓促，如不妥之处恳请广大师生提出宝贵的意见和修改建议。

编委会

1993.10

目　录

代数部分

几何部分

总复习部分

自我检测参考答案

代数部分

第十二章　一元二次方程

一、重点难点

（一）　一元二次方程的解法

1. 公式法：对一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 利用求根公式　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$　$(b^2-4ac\geqslant0)$.

2. 因式分解法

3. 配方法

（二）　列方程解应用题

1. 行程问题

2. 工程问题

3. 增长率问题

4. 面积的计算

（三）　分式方程

1. 一般方法：乘以整式（各分式的最简公分母），化为整式方程求解.

2. 换元法解分式方程

3. 分式方程的验根

（四）　无理方程

1. 一般方法：方程两边同时乘方，化为有理方程.

2. 换元法解无理方程

3. 无理方程的验根

（五） 简单的二元二次方程组

1. 由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的二元二次方程组的解法.

2. 由一个二元二次方程和一个可分解为两个二元一次方程的方程组成的方程的解法.

（六） 一元二次方程的根的判别式和根与系数的关系

1. 一元二次方程的根的判别式

对一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$

$\triangle=b^2-4ac$

当$\triangle>0$时，有两个不相等的实数根

$\triangle=0$时，有两个相等的实数根

$\triangle<0$时，没有实数根

2. 一元二次方程的根与系数的关系：

如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的两个根是x_1, x_2，那么 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$；

二、典型例题及解题思路

〔**例** 1〕 解下列方程

(1) $3x^2+4x=2$； (2) $x(2x-1)=3(2x-1)$

(3) $\dfrac{x^2-1}{2}-2=\dfrac{(x-1)^2}{3}-\dfrac{x+3}{6}$

解： (1) $3x^2+4x=2$

$3x^2+4x-2=0$

$a=3, b=4, c=-2$

$b^2-4ac=4^2-4\times 3\times(-2)=40$

$\therefore x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\dfrac{-4\pm\sqrt{40}}{6}=\dfrac{-4\pm2\sqrt{10}}{6}=\dfrac{-2\pm\sqrt{10}}{3}$

$\therefore x_1=\dfrac{-2+\sqrt{10}}{3}, x_2=\dfrac{-2-\sqrt{10}}{3}$

(2) $x(2x-1)=3(2x-1)$

$x(2x-1)-3(2x-1)=0$

$(2x-1)(x-3)=0$

$2x-1=0$ 或 $x-3=0$

$\therefore x_1=\dfrac{1}{2}, \qquad x_2=3$

(3) $\dfrac{x^2-1}{2}-2=\dfrac{(x-1)^2}{3}-\dfrac{x+3}{6}$

方程两边同时乘以 6，得

$3(x^2-1)-12=2(x-1)^2-(x+3)$

$3x^2-3-12=2x^2-4x+2-x-3$

$x^2+5x-14=0, (x+7)(x-2)=0$

$\therefore x_1=-7, x_2=2$

说明：1. 在用公式法解一元二次方程时，首先要将方程通过整理变形化为一般形式再确定 a、b、c 的值. 如(1)小题. 方程的根要化为最简二次根式，化简过程中约分时要注意约去分子和分母的公共约数（因式）要防止出现 $\dfrac{-4\pm2\sqrt{10}}{6}=\dfrac{-2\pm2\sqrt{10}}{3}$ 的错误，而过程应该是 $\dfrac{-4\pm2\sqrt{10}}{6}=\dfrac{2(-2\pm\sqrt{10})}{6}=\dfrac{-2\pm\sqrt{10}}{3}$.

2. 解方程时不能两边同除以一个含有未知数的等式，以防丢根. 如(2)小题，不能两边同除以 $2x-1$，若同除以 $2x-1$，会把 $x=\frac{1}{2}$ 这个根丢掉.

3. 去分母时，方程两边都要乘以公分母，整数部分不要忘乘. 分子是多项式时，去分母后分子要添上括号.

〔**例** 2〕　用配方法解方程

(1) $x^2-3x-1=0$;　　(2) $3x^2+2x-6=0$

解：(1) $x^2-3x=1$

$$x^2-3x+(\frac{3}{2})^2=1+(\frac{3}{2})^2$$

$$(x-\frac{3}{2})^2=\frac{13}{4}, x-\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{13}}{2},$$

$$\therefore x_1=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}=\frac{3+\sqrt{13}}{2},$$

$$x_2=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$$

(2) $3x^2+2x-6=0$

$$x^2+\frac{2}{3}x=2, x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2=2+(\frac{1}{3})^2$$

$$(x+\frac{1}{3})^2=\frac{19}{9}, x+\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{19}}{3}$$

$$\therefore\quad x_1=-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{19}}{3}=\frac{-1+\sqrt{19}}{3},$$

$$x_2=-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{19}}{3}=\frac{-1-\sqrt{19}}{3}$$

用配方法解方程较繁，在没有指定用配方法解方程时，一般不用，但配方法的思路与方法以后用处较多应该掌握.

〔**例** 3〕　解关于 x 的方程

(1) $\dfrac{3x+7}{x-3}=2x-7+\dfrac{2(1-x^2)}{3-x}$

(2) $\dfrac{x-4}{x^2+2x}=\dfrac{1}{x^2-2x}+\dfrac{2}{4-x^2}$

(3) $x+\dfrac{1}{x-1}=a+\dfrac{1}{a-1}$

解： (1) $\dfrac{3x+7}{x-3}=2x-7+\dfrac{2(1-x^2)}{3-x}$

$$\frac{3x+7}{x-3}=2x-7+\frac{2(x^2-1)}{x-3}$$

方程两边同乘以 $x-3$，得

$$3x+7=(2x-7)(x-3)+2(x^2-1)$$

整理，得 $x^2-4x+3=0,(x-1)(x-3)=0$

$$\therefore x_1=1,\quad x_2=3\quad（增根）$$

经检验：$x=1$ 是原方程的根，$x=3$ 是增根舍去.

(2) $\dfrac{x-4}{x^2+2x}=\dfrac{1}{x^2-2x}+\dfrac{2}{4-x^2}$

$$\frac{x-4}{x(x+2)}=\frac{1}{x(x-2)}-\frac{2}{(x+2)(x-2)}$$

方程两边都乘以 $x(x+2)(x-2)$，得

$(x-4)(x-2)=(x+2)-2x$

化简，得 $x^2-5x+6=0,(x-2)(x-3)=0$

$x_1=2,x_2=3,$

经检验，$x=2$ 是原方程的增根，应舍去

$\therefore$原方程的根是 $x=3$

(3) $x+\dfrac{1}{x-1}=a+\dfrac{1}{a-1}$

方程两边同乘以$(x-1)(a-1)$，得

$x(a-1)(x-1)+(a-1)=a(a-1)(x-1)+$

$(x-1)$

$x(a-1)(x-1)-a(x-1)(x-1)-(x-a)=0$

$(a-1)(x-1)(x-a)-(x-a)=0$

$[(a-1)(x-1)-1](x-a)=0$

$x-a=0, x_1=a$

$(a-1)(x-1)-1=0$

$x-1=\dfrac{1}{a-1}, x_2=\dfrac{a}{a-1}$

经检验：$x_1=a, x_2=\dfrac{a}{a-1}$都是原方程的根.

〔**例** 4〕　用换元法解方程

(1)　$(\dfrac{x}{x+1})^2+5(\dfrac{x}{x+1})+6=0$

(2)　$\dfrac{4x^2+2x}{x^2+6}+\dfrac{x^2+6}{2x^2+x}-3=0$

(3)　$\dfrac{3}{x^2-2x-3}=2x^2-4x-1$

解：　(1) $(\dfrac{x}{x+1})^2+5(\dfrac{x}{x+1})+6=0$

分析：方程中$(\dfrac{x}{x+1})^2$与$\dfrac{x}{x+1}$存在平方关系

设　$\dfrac{x}{x+1}=y$，则原方程为

$$y^2+5y+6=0$$

$$(y+2)(y+3)=0$$

$$y_1=-2, y_2=-3$$

当 $y_1=-2$ 时，$\dfrac{x}{x+1}=-2$，　$x_1=-\dfrac{2}{3}$

当 $y_2=-3$ 时，$\dfrac{x}{x+1}=-3$，　$x_2=-\dfrac{3}{4}$

经检验 $x_1=-\dfrac{2}{3}$，$x_2=-\dfrac{3}{4}$ 都是原方程的解.

(2)分析：方程中分式 $\dfrac{4x^2+2x}{x^2+6}=2\times\dfrac{2x^2+x}{x^2+6}$，这样方程中的两个分式恰好互为倒数关系. 此时，设 $\dfrac{x^2+6}{2x^2+x}=y$ 则 $\dfrac{4x^2+2x}{x^2+6}=\dfrac{2}{y}$，代入原方程，得：$\dfrac{2}{y}+y-3=0$

即：$y^2-3y+2=0$，$(y-1)(y-2)=0$

$\therefore y_1=1, y_2=2$

当 $y=1$ 时，$\dfrac{x^2+6}{2x^2+x}=1$，

即：$x^2+x-6=0$，　$x_1=2, x_2=-3$

当 $y=2$ 时，$\dfrac{x^2+6}{2x^2+x}=2$，

即：$3x^2+2x-6=0$

$\therefore x_3=\dfrac{-1+\sqrt{19}}{3}$，$x_4=\dfrac{-1+\sqrt{19}}{3}$，经检验，$x_1, x_2, x_3$，$x_4$ 都是原方程的根.

(3)　$\dfrac{3}{3x^2-2x-3}=2x^2-4x-1$

$$\frac{3}{x^2-2x-3}=2(x^2-2x-3)+5$$

设 $x^2-2x-3=y$，代入原方程，得 $\dfrac{3}{y}=2y+5$，

整理，得　$2y^2+5y-3=0$，$y_1=\dfrac{1}{2}$，$y_2=-3$

当 $y_1=\dfrac{1}{2}$ 时，$x^2-2x-3=\dfrac{1}{2}$ 即：$2x^2-4x-7=0$

$\therefore$　$x=\dfrac{4\pm\sqrt{16+56}}{4}=\dfrac{4\pm6\sqrt{2}}{4}=\dfrac{2\pm3\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore\quad x_1=\frac{2+3\sqrt{2}}{2}, x_2=\frac{2-3\sqrt{2}}{2}$

当 $y_2=-3$ 时，$x^2-2x-3=-3$，

即：$x^2-2x=0$，$\therefore\quad x_3=0, x_4=2$

经检验，x_1、x_2、x_3、x_4 都是原方程的根

解分式方程的一般方法是方程两边同乘以各分式的最简公分母，化为整式方程. 因为去分母时，方程两边同乘的代数式不知是否为零，所以求解以后必须将所得结果代入原方程进行检验，一般在计算无误的情况下，只把求得的解代入所乘代数式进行检验，使所乘代数式等于零的 x 的值是增根应舍去，否则是原方程的根.

对一些特殊类型的分式方程，(如例 4)，如果用一般方法将得到高次方程，求解较困难，所以经常使用换元法. 换元法又称引入辅助未知数法，这是一种非常重要的数学方法，在初等数学乃至高等数学中都有着广泛的应用，选择恰当的辅助未知数，可以使高次方程降次，无理方程转化代为有理方程，分式方程简化. 它是我们解方程的不可缺少的方法. 用换元法解分式方程时，仍然要乘以整式化为整式方程，所以仍有产生增根的可能，所以必须验根.

〔**例** 5〕　解下列无理方程

(1)　$\sqrt{x-2}=8-x$；　　(2)　$\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$

解：(1) $\sqrt{x-2}=8-x$

两边同时平方，得 $x-2=(8-x)^2$，

整理，得 $x^2-17x+66=0$，$(x-11)(x-6)=0$

$x_1=11, x_2=6$.　检验：把 $x=11$ 代入原方程

左边 $=\sqrt{11-2}=3$，右边 $=8-11=-3$

左边≠右边. ∴$x=11$ 是增根应舍去.

把 $x=6$ 代入原方程

左边$=\sqrt{6-2}=2$,右边$=8-6=2$

∴$x=6$ 是原方程的根,

(2) $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$

$\sqrt{2x-4}=1+\sqrt{x+5}$

两边同时平方,得

$2x-4=1+2\sqrt{x+5}+x+5$

$x-10=2\sqrt{x+5}$

两边再同时平方,得

$x^2-20x+100=4(x+5)$

$x^2-24x+80=0$,$(x-4)(x-20)=0$

$x_1=4$,$x_2=20$. 经检验,$x_1=4$ 是增根,舍去,$x=20$ 是原方程的根.

〔**例 6**〕 解下列无理方程

(1) $5-3\sqrt{x^2-1}=x^2$;

(2) $2x^2+8+2\sqrt{2x^2-3x+2}=3x+9$;

(3) $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$

解: (1)$5-3\sqrt{x^2-1}=x^2$

$5-1-3\sqrt{x^2-1}=x^2-1$,即 $4-3\sqrt{x^2-1}=x^2-1$

设 $\sqrt{x^2-1}=y$,原方程化为 $y^2+3y-4=0$

$y_1=1$,$y_2=-4$

当 $y=1$ 时,得 $\sqrt{x^2-1}=1$,$x^2=2$

$x_1=\sqrt{2}$,$x_2=-\sqrt{2}$

当 $y_2=-4$ 时,$\sqrt{x^2-1}=-4$,无解.

经检验 $x_1=\sqrt{2}$，$x_2=-\sqrt{2}$ 是原方程的根.

(2) $2x^2+8+2\sqrt{2x^2-3x+2}=3x+9$

$2x^2-3x+2+2\sqrt{2x^2-3x+2}-3=0$

设 $\sqrt{2x^2-3x+2}=y$，则原方程化为 $y^2+2y-3=0$

$\therefore y_1=-3, y_2=1$

当 $y=-3$ 时，得 $\sqrt{2x^2-3x+2}=-3$，无解.

当 $y=1$ 时得 $\sqrt{2x^2-3x+1}=0$. $x_1=\dfrac{1}{2}$，$x_2=1$

经检验，$x_1=\dfrac{1}{2}$，$x_1=1$ 都是原方程的根.

(3) $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$

分析：被开方数中的两次 x^2+5x 与 $3x^2+15x$ 的系数成比例，若设 $\sqrt{x^2+5x+1}=y$，则 $3x^2+15x=3y^2-3$

$\therefore$ 原方程可化为 $3y^2+2y-5=0$. $(y-1)(3y+5)=0$

$y_1=1$，$y_1=-\dfrac{5}{3}$

当 $y=1$ 时，得 $\sqrt{x^2+5x+1}=1$

$x^2+5x+1=1$，$x^2+5x=0$

$x_1=0$，$x_2=5$

当 $y=-\dfrac{5}{3}$ 时，$\sqrt{x^2+5x+1}=-\dfrac{5}{3}$，无解舍去.

经检验：$x_1=0$，$x_2=5$ 是原方程的根.

〔**例** 7〕　解方程 $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}+\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}=\dfrac{10}{3}$

解：设 $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}=y$，则原方程化为 $y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{10}{3}$，

整理，得 $3y^2-10y+3=0$，$y_1=\dfrac{1}{3}$，$y_2=3$

当 $y_1=\frac{1}{3}$ 时，$\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}=\frac{1}{3}$，解得 $x_1=-\frac{11}{8}$

当 $y_2=3$ 时，$\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}=3$，解得 $x_2=\frac{19}{8}$

经检验：$x_1=-\frac{11}{8}$，$x_2=\frac{19}{8}$ 都是原方程的根

解无理方程的一般方法是方程两边同时乘方，将原方程化为有理方程求解，由于两边同时乘方时，使未知数的允许值范围扩大，可能产生增根，所以必须将所得结果代入原方程检验.

有些无理方程，若两边同时乘方，将会得到高次方程（如例 5），此时可采用换元法，一般可用根号外边的式子去凑根号里边的代数式，以便选取适当的辅助未知数. 用换元法解无理方程也必须验根.

〔例 8〕　解下列方程组

(1) $\begin{cases} x^2-4y^2+x+3y-1=0 \\ 2x-y-1=0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-5xy+6y^2=0 \end{cases}$

解：(1) $\begin{cases} x^2-4y^2+x+3y-1=0 & ① \\ 2x-y-1=0 & ② \end{cases}$

由②，得 $y=2x-1$　　③

将③代入①，得

$x^2-4(2x-1)^2+x+3(2x-1)-1=0$

化简，得 $15x^2-23x+8=0$

$(15x-8)(x-1)=0$，$x_1=\frac{8}{15}$，$x_2=1$

将 $x_1=\frac{8}{15}$代入③，得 $y_1=\frac{1}{15}$

将 $x_2=1$，代入③，得 $y_2=1$

$\therefore\begin{cases}x_1=\frac{8}{15}\\ y_1=\frac{1}{15}\end{cases}$； $\begin{cases}x_2=1\\ y_2=1\end{cases}$是原方程组的解.

(2) $\begin{cases}x^2+y^2=5 & ①\\ x^2-5xy+6y^2=0 & ②\end{cases}$

把②分解因式得$(x-2y)(x-3y)=0$

$x-2y=0$ 或 $x-3y=0$

原方程组可化为下面两个方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2=5\\ x-2y=0\end{cases}\qquad\begin{cases}x^2+y^2=5\\ x-3y=0\end{cases}$$

解这两个方程组，得

$$\begin{cases}x_1=2\\ y_1=1,\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=-2\\ y_2=-1,\end{cases}\quad\begin{cases}x_3=\frac{3\sqrt{2}}{2}\\ y_3=\frac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}\quad\begin{cases}x_4=-\frac{3\sqrt{2}}{2}\\ y_4=-\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$$

由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组叫第一类型的二元二次方程组，一般解法是代入消元法.当求出一个未知数的值后再求另一个未知数的值时，应将其代入二元一次方程中求解，如果代入二元二次方程中会产生增解，如例 8 中的(1).由两个二元二次方程组成的方程组叫第二类型的二元二次方程组，我们只要求至少其中一个方程一边可分解为两个一次因式，而另一边为零，因此可通过降次化为两个二元一次方程，从而原方程组可以化为两个第一类型的二元二次方程组求解.