21世纪高等职业教育通用技术规划教材

（经济类专业）

上海市高职高专经济类专业教学指导委员会组编

应用经济数学

Applied Mathematics for Economics

主编◆鞠正云

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

21 世纪高等职业教育通用技术规划教材(经济类专业)
上海市高职高专经济类专业教学指导委员会组编

应用经济数学

主　编　鞠正云

上海交通大学出版社

前　　言

本书是参照高职高专《经济数学基础课程教学基本要求》，遵循"以应用为目的，以必需、够用为度"的原则，总结和吸收近年来经济数学教学的实践经验和教学改革成果，针对高职高专层次的经济管理类专业学生而编写的。

目前，中国的高等教育已经从过去的精英教育转轨到大众化教育，高职高专教育以培养高技术的应用性人才为目标，传统的数学课程必须在体系结构、思想内容、深度与广度等方面作适当的调整，以适应新形势的要求。因此，在本书的编写过程中，力求紧扣以下三个基本点：第一，提供学生必需、够用的数学基础知识；第二，培养学生科学、良好的思维习惯，提高学生的学习素质；第三，注重培养学生运用数学知识，分析和解决经济生活中实际问题的能力。

另外，还注意了以下三个方面：

(1) 从实际问题引入知识点，并最终回归到数学应用，突出知识的应用性，提高学生学习数学的兴趣。

(2) 注重数学的基本思想、基本方法的讲解，在保证知识的科学性、系统性和逻辑性的前提下，省略过难过繁的理论推导，避免过高的运算技巧，使学生易于理解与接受。

(3) 例题、习题安排较多，题型丰富，涉及面广，难度由浅入深，便于教学取舍。习题包括基本练习和综合训练两部分，基础练习可作课堂练习和课后作业之用，综合训练则可作为复习提高之选。

考虑到经济管理类专业门类较多，对数学知识的需求不尽相同，因而选编的内容较多，对部分内容以"*"号标出作为选修，以供不同专业教学时选学。

本书的编写参阅了较多教材与资料，上海交通大学出版社的编辑对本书的编写、审查做了大量工作，在此一并表示深深的感谢。

限于编者水平，书中错漏之处，欢迎广大师生、读者批评指正，以期再版时改进。

编　者

20011 年 8 月

目　　录

第一部分　微积分基础

第三部分　概率统计初步

第一部分　微积分基础

1　函数

本章重点与难点

★ 函数的概念，定义域及函数值的求法。

★ 基本初等函数的概念及其性质(反三角函数除外)。

★ 复合函数、隐函数、初等函数的概念。

★ 经济中常用的函数关系。

高等数学的核心内容由两部分组成：微分学和积分学，简称为微积分。微积分是研究自然和社会规律的重要数学工具，它不仅在经济领域中有着直接的应用，而且也是学习其他经济数学知识的基础。微积分研究的主要对象是函数，本章主要介绍函数的有关知识，并加以整理和深化。

1.1　实数集

1.1.1　数集

在高等数学课程中，研究问题所涉及的数，绝大部分都是在实数范围内。如果没有特别声明，本书中所提到的数，都是实数；所提到的数集，都是实数集。按照习惯，全体自然数的集合记为 **N**；全体整数的集合记为 **Z**；全体有理数的集合记为 **Q**；全体实数集合记为 **R**。

由于实数集与数轴上的点集之间存在一一对应关系，所以，可用“点”来表示“数”，甚至我们认为点就是数，两者不加区分。

1.1.2　区间

区间是一种特殊的数集。

在实际问题中，一个变量总有一定的变化范围，如果超出这个范围，就会使研究的问题失去意义。在数学中，常用区间表示一个变量的变化范围。

设 a、b 为两个任意的实数，且 $a<b$，

(1) 满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a、b 为端点的闭区间，记

作$[a,b]$，如图 1.1 所示(由于实数 a、b 的任意性，数轴的原点没有标明位置，下同)；

(2) 满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a、b 为端点的开区间，记作(a,b)，如图 1.2 所示；

图 1.1

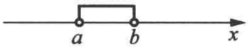

图 1.2

(3) 满足不等式 $a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a、b 为端点的半开区间，记作$[a,b)$或$(a,b]$。

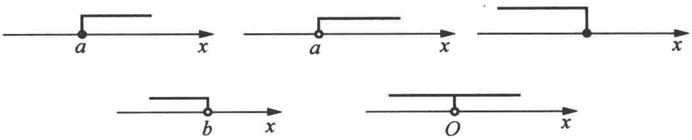

图 1.3

以上区间都是有限区间，它们都有一定的长度，$b-a$ 就是区间的长。除了有限区间之外，还有无限区间，比如：$[a,+\infty)$、$(a,+\infty)$、$(-\infty,b]$、$(-\infty,b)$及$(-\infty,+\infty)$等(如图 1.3 所示)。这里的符号“∞”并不表示一个数，它只是一个记号，读做“无穷大”。规定$[a,+\infty)=\{x|\geqslant a\}$；$(a,+\infty)=\{x|x>a\}$；$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$；$(-\infty,b)=\{x+x<b\}$；$(-\infty,+\infty)=\{x|x\in \mathbf{R}\}$。

1.1.3 邻域

邻域是一种特定的区间。

设 x_0、$\delta(\delta>0)$是两个任意的实数，称开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$为点 x_0 的 δ 邻域，记成$\cup(x_0,\delta)$，x_0 称为邻域中心，δ 称为邻域半径，如图 1.4 所示。

图 1.5 所表示的是一个去心邻域(即不包含点 x_0)，去心邻域也可以用不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 来表示。

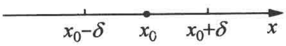

图 1.4

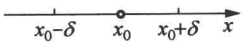

图 1.5

例如，邻域$\cup\left(2,\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2}\right)$。

1.2 函数

1.2.1 函数概念

1.2.1.1 函数的定义

在研究问题的过程中，往往会遇到多个变量，这些变量彼此不是孤立的，它们之间会依照一定规律相互制约，相互依赖。变量之间的这种关系抽象为数学概念，就是函数的概念。

定义 1.1 设有 x,y 两个变量。若对于变量 x 在非空数集 D 内所取的每一个值，依照某种对应法则 f，变量 y 都有唯一确定的值与之对应，则称变量 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$。变量 x 称为自变量，变量 y 称为因变量。自变量 x 的变化范围 D 称为函数的定义域。

给定自变量的一个值 $x_0\in D$，则得到一个函数值 $y_0=f(x_0)$。当自变量 x 在其定义域 D 内变化时，函数的全部取值称为函数的值域，用 $f(D)$ 表示，$f(D)$ 是一个数集。

一个函数由函数的定义域 D 及对应法则 f 确定。对于两个函数来说，如果定义域与对应法则中有一个不相同，那么这两个函数就是两个不同的函数。例如，

$$y=2x,\quad y=\frac{2x^2}{x}。$$

因为其定义域不同，所以是两个不同的函数。

如果对于自变量的一个取值 $x=x_0$，没有确定的函数值 y_0 与之对应，那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处无定义或没有意义。如上面后一个函数在 $x=0$ 点处无意义。求函数的定义域，就是求出那些使得函数有意义的自变量 x 的取值范围。

[例 1.1] 求函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的定义域 D 及函数值 $f(\sqrt{2})$。

解： 由 $4-x^2\geqslant 0$ 得 $-2\leqslant x\leqslant 2$，定义域为 $D=[-2,2]$，函数值 $f(\sqrt{2})=\sqrt{4-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$。

[例 1.2] 求函数 $y=\dfrac{\lg(2-x)}{\sqrt{x+1}}$ 的定义域。

解： 要使函数 $\dfrac{\lg(2-x)}{\sqrt{x+1}}$ 有意义，则有 $\begin{cases}2-x>0\\x+1>0\end{cases}$，即 $-1<x<2$。所以函数的定义域为 $(-1,2)$。

对于那些有实际问题背景的函数来说，其定义域还要根据实际问题来确定。

1.2.1.2 函数的表示法

常用的函数表示法有三种：解析法、列表法和图像法。

1. 解析法

用代数式表达一个函数关系的方法称解析法，例如，

$$y=2x-1;\quad C_{(x)}=0.01x^2+10x+1000。$$

2. 列表法

用表格来表达函数关系的方法称为列表法，如表 1.1 所示。

表 1.1

月　份	1	2	3	4	5	6
销售额 Q(万元)	11	12.5	9.1	8.6	8	8.9
利　润 R(万元)	2.1	2.7	1.6	1.2	1	1.5

表示某商场上半年的销售额与所获得的利润之间的函数关系。

3. 图像法

在直角坐标系中用一条曲线来表示函数关系，这种方法称为图像法。如图 1.6 所示，表示的是某地区某一天气温 C 随时间 t 的变化情况。

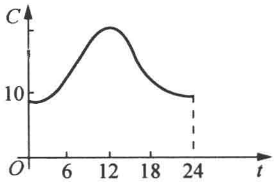

图 1.6

当我们在研究某个函数关系时，以上三种方法可能同时都要用到，即所谓的数形结合、数表结合。因此，函数图像与解析式之间的对应关系一定要熟练，一些常用到的函数图像要记住。

1.2.2 基本初等函数

以下六种函数称为基本初等函数：

(1) 常量函数 $y=c$(c 为任意实数)；

(2) 幂函数 $y=x^\alpha$(α 为任意实数)；

(3) 指数函数 $y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq1$)；

(4) 对数函数 $y=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq1$)；

(5) 三角函数：正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$、正切函数 $y=\tan x$、余切函数 $y=\cot x$、正割函数 $y=\sec x$、余割函数 $y=\csc x$；

(6) 反三角函数：反正弦函数 $y=\arcsin x$、反余弦函数 $y=\arccos x$、反正切函数 $y=\arctan x$、反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$。

这些函数在中学都已学过，读者要熟悉它们的性质与图像（见附录 A）。需要说明的是，本教材对三角函数类只介绍正弦、余弦、正切、余切，不介绍正割、余割及反三角函数。

1.2.3 常用的几类函数

1.2.3.1 分段函数

有些问题中，两个变量之间的关系只用一个数学式子是无法表达的，需用两个或两个以上的式子才能完整表达。例如，某一吨货物的运输费用，在 300 公里以内按每公里 0.05 元计费，300 公里以上则按每公里 0.035 元计费，则运 1 吨货物的运费 y 与路程 x 之间的函数式应是

$$y=\begin{cases}0.05x, & 0\leqslant x\leqslant 300;\\ 15+0.035(x-300), & 300<x<+\infty。\end{cases}$$

像这样一类在其定义域内，需要用两个或两个以上的不同解析式来分段表示的函数，称为分段函数。

[例 1.3] 确定函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & -1\leqslant x\leqslant 1\\ 2x, & 1<x\leqslant 3\end{cases}$ 的定义域并做出函数图像。

解：函数的定义域是$[-1,3]$，其图像如图 1.7 所示。

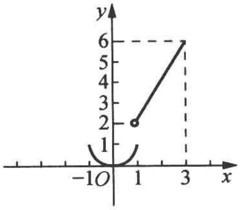

图 1.7

1.2.3.2 反函数

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，值域为 $f(D)$，如果对 $f(D)$中的每一个 y 值，在 D 中总有唯一确定的 x 使得 $y=f(x)$，这样由 y 确定 x 的函数称为函数$y=f(x)$的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$。

我们习惯于用字母 x 表示自变量，用字母 y 表示因变量，因此，在反函数 $x=f^{-1}(y)$中，将字母 x,y 互换，得到实际应用的反函数关系式 $y=f^{-1}(x)$。显然，函数 $y=f^{-1}(x)$的定义域为 $f(D)$，值域为 D。$y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称（见图 1.8）。例如，我们知道指数函数 $y=a^x$ $(x\in(-\infty,+\infty))$与对数函数 $y=\log_a x$ $(x\in(0,+\infty))$是互为反函数的。

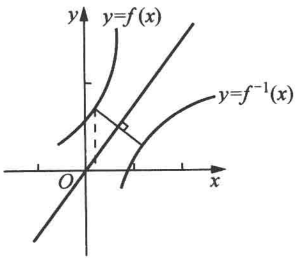

图 1.8

[例 1.4] 求函数 $y=3x-2$ 的反函数。

解：先求出 $x=\dfrac{y+2}{3}$。

再将字母 x,y 互换，得到函数 $y=3x-2$ 的反函数 $y=\dfrac{x+2}{3}$。

1.2.3.3 复合函数

复合函数是经常遇到的一种函数结构。例如 $y=\sin a^x\ (a>0)$，可以看作是由 $y=\sin u, u=a^x$ 这两个基本初等函数所构成。

定义 1.3 设函数 $y=f(u)$的定义域为 $D_f, u=\varphi(x)$的值域为 $\varphi(D)$，如果 $D_f\cap\varphi(D)$非空，那么称 $y=f[\varphi(x)]$为 f 和 φ 这两个函数的复合函数，x 为自变量，y 为因变量，而 u 称为中间变量。我们也称 f 为外层函数，φ 为内层函数。

例如，$y=f(u)=\sqrt{u}, u=\varphi(x)=1-x^2, D_f=[0,+\infty), \varphi(D)=(-\infty,1]$。

$D_f\cap\varphi(D)$非空，$y=f[\varphi(x)]=\sqrt{1-x^2}$是复合函数。定义域为$[-1,1]$。

[例 1.5] 设 $f(x)=x^2, g(x)=2^x$，求 $f[g(x)]$及 $g[f(x)]$。

解：$f[g(x)]=[g(x)]^2=[2^x]^2=2^{2x}, g[f(x)]=2^{f(x)}=2^{x^2}$。

利用复合函数的概念，还可以将一个较复杂的函数分解成几个简单函数的复合，这样便于对函数进行研究。

[例 1.6] 分析下列函数是由哪些比较简单函数复合成的，并依次写出中间变量。

(1) $y=(2x+1)^3$；

(2) $y=\sin^2(2x-3)$。

解：(1) $y=u^3, u=2x+1$；(2) $y=u^2, u=\sin v, v=2x-3$。

1.2.3.4 隐函数

前面所遇到的函数，其因变量 y 都已经用自变量 x 的一个表达式明显表示出来，这样一类函数可统称为显函数。另有一类函数，其因变量 y 对于自变量 x 的函数关系是由一个方程 $F(x,y)=0$ 来表示的，如$x^2+y^2=1(x>0,y>0)$，$xy-e^x+e^y=0$ 等。这样一类函数称为隐函数。如果从方程 $F(x,y)=0$ 中可以解出 y 用 x 表示，那么，称此隐函数可以显化。不过，并不是所有的隐函数都能显化的。

1.2.3.5 初等函数

由基本初等函数通过有限次的四则运算及有限次的复合得到的，并且可用一个式子表示的函数，称为初等函数。如以上所谈到的函数都是初等函数，$y=|x|=\sqrt{x^2}$是初等函数。分段函数一般不是初等函数。

1.3 函数的常见性质

1.3.1 奇偶性

定义 1.4 对于给定的函数 $y=f(x)$，定义域是关于原点的对称区间，x 是其定义域内的任意一点，若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；若 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数。

[例 1.7] 判断下列所给函数的奇偶性。

(1) $f(x)=3x^2+\cos x$；(2) $y=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})$。

解：(1) 因 $f(-x)=3(-x)^2+\cos(-x)=3x^2+\cos x=f(x)$，所以 $f(x)=3x^2+\cos x$ 是偶函数。

(2) 设 $f(x)=y=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})$，

$$f(-x)=\log_a(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\log_a(-x+\sqrt{1+x^2})$$

$$=\log_a\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\log_a(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

故 $y=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数。

由定义可知，奇函数的图像关于原点对称；偶函数的图像关于 y 轴对称。

1.3.2 单调性

定义 1.5 在函数 $y=f(x)$ 的定义域内任取两点 x_1、x_2，且 $x_1<x_2$。若恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称此函数是单调增加的，并称 f 为增函数；若恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称此函数是单调减少的，并称 f 为减函数。增函数、减函数统称为单调函数。

一般来讲，单调增加函数的图像是沿 x 轴正方向逐渐上升的曲线，单调减少函数的图像是沿 x 轴正方向逐渐下降的曲线。如图 1.9 和图 1.10 所示。

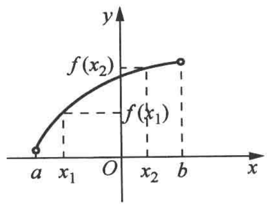

图 1.9

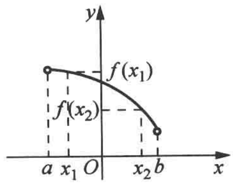

图 1.10

例如:(1) 函数 $y=\sqrt{x}$在其定义域$[0,+\infty)$单调增加。

(2) 函数 $y=x^2$ 在$(-\infty,0)$单调减少,在$(0,+\infty)$单调增加,而在其定义域$(-\infty,+\infty)$上不是单调的。

1.3.3 周期性

定义 1.6 对于函数 $y=f(x)$,若存在非零常数 T,使得对定义域内的任意一点 x,恒有 $f(x+T)=f(x)$,则称函数 $y=f(x)$为周期函数,常数 T 称为这个函数的周期。

满足 $f(x+T)=f(x)$的最小正数 T 称为最小正周期,我们通常所说的函数周期就是指最小正周期。

例如,函数 $y=\sin x$、$y=\cos x$ 都是周期函数,其周期 $T=2\pi$。$y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数。

1.3.4 有界性

定义 1.7 设函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有定义,若存在一个正数 M,对于区间(a,b)内的任意一点 x,恒有$|f(x)|\leqslant M$,则称函数$y=f(x)$在区间(a,b)内有界;否则,称函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内无界。

例如,函数 $y=\sin x$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内有界,因为对于任意实数 x 恒有$|\sin x|\leqslant 1$。对于函数 $y=2^x$,在区间$(-\infty,+\infty)$内是无界的。函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在$(0,1)$内是无界的,在$[1,+\infty)$上是有界的。

以上介绍了函数的四种性质,对一个具体的函数而言,它可能只具备其中的某些性质。

1.4 经济学中常用的函数关系

1.4.1 函数关系的建立

在建立函数关系时,首先要确定问题中的自变量与因变量,其次根据它们之间的关系列出等式,从而得出函数关系式,最后确定函数定义域。确定函数定义域时不仅要考虑函数关系解析式有意义,还要考虑到实际问题中有意义。

[例 1.8] 某工厂生产一种产品,其固定成本为每天1 000 元,生产每件产品的直接成本是 2.5 元,试建立成本的函数关系。

解: 每天生产的成本与每天生产的产品件数有关,而成本又可分为固定成本