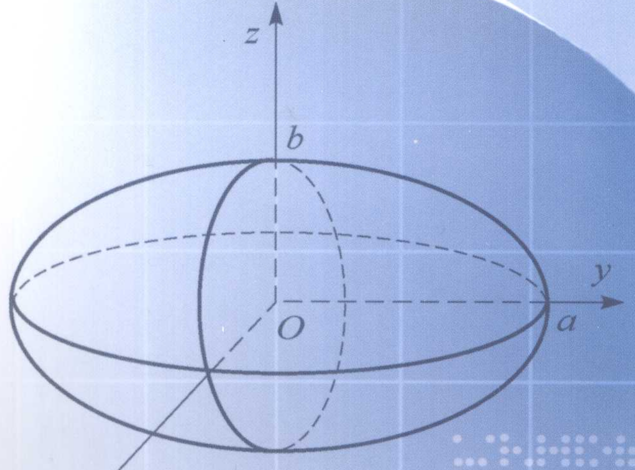
高等教育本科规划教材

· 数学系列

高等数学

（上 册）

◆ 主编　宋 翌 谭雪梅



北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等数学

（上册）

主　编　宋　翌　谭雪梅

副主编　阳彩霞　胡学瑞　张清平　林志刚

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书是根据编者多年的教学实践，按照《本科教育高等数学课程教学基本要求》，以“掌握概念、强化应用、培养技能”为指导思想，体现高等教育以应用为目的，以必需、够用为度的基本原则．本书在体系上注重突出高等数学课程循序渐进、由浅入深的特点．在方法上关注现实、案例驱动．教材共五章，内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理及导数的应用——微分学的精华、不定积分以及定积分．

本书在内容上以淡化理论证明、强调应用和计算为主，并保持结构严整、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂、例题较多、便于自学等特点，每一小节都配有课后习题，每一章结尾安排有总习题，书后附有参考答案和提示．

本书可供各二、三类本科院校及二级学院和民办高校，应用型高等院校理、工、农、医等各专业高等数学课程教学，也可作为科技工作者和教师的参考书．

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．上册/宋翌，谭雪梅主编．—北京：北京理工大学出版社，2013.5
ISBN 978-7-5640-7534-7

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①宋…　②谭…　Ⅲ．①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 057607 号

出版发行／北京理工大学出版社
社　　址／北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编／100081
电　　话／(010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址／http://www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／北京通县华龙印刷厂
开　　本／787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张／16.25
字　　数／320 千字
版　　次／2013 年 5 月第 1 版　　2013 年 5 月第 1 次印刷
定　　价／32.00 元

责任编辑／张慧峰
责任校对／周瑞红
责任印制／边心超

前　言　Preface

本书是我们在多年从事高等数学的教学中认真总结、分析和吸收全国高等数学教学改革的经验基础上，根据教育部颁发的《本科教育高等数学课程教学基本要求》，遵循“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，结合我们多年从事高等数学方面的科学研究与教学改革经验及同类教材发展趋势，针对本科层次所需高等数学知识要求而编写完成，是一本适宜于理、工、农、医类专业学生学习高等数学课程的教材.

本书力求体现基础课为专业服务的思想，在保证科学性的基础上，注意讲清概念，减少理论推导，注重学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养. 内容及其难度以二、三类本科院校理、工、农、医类专业的需要为基础，以学生专业学习与岗位工作需要为依据，理论知识以够用为度，涉及性质与定理的内容，以图形描述或数值表达或文字说明加以适当解释，辅以逻辑推理. 以“专业结合，突出应用”为原则，教材体系突出，体现数学知识专业化、应用问题数学化，突出高等数学在各专业中的应用性. 以“案例驱动，问题导向”为原则，数学概念要以实际案例为背景导入，知识的展开以解决问题为导向，形成数学知识来源于实际问题，反过来又应用于实际问题的良性循环.

本教材共分五章，主要内容有函数与极限、导数与微分、中值定理及导数的应用、不定积分与定积分及其应用. 每章每节都有习题. 本书可供各二、三类本科院校及二级学院和民办高校，应用型高等院校理、工、农、医、管各专业高等数学课程教学，也可作为科技工作者的参考书.

参加本书编写的有武汉生物工程学院的宋翌、谭雪梅、阳彩霞、李小衬、胡雪瑞、林志刚、张清平等教师. 全书由宋翌老师完成最后统稿.

在编写过程中得到了北京理工大学出版社的指导和帮助，以及各编写同志

所在院校的大力支持与协作，在校稿和打印中，得到武汉生物工程学院王毅、杨柳青、何伟荣、管开创、张问、何天齐等同学的大力帮助．在此一并表示感谢．

由于编者水平有限，有不妥之处，敬请广大读者批评指正．

编　者

目 录 Contents

第一章 函数与极限 …… 1
1.1 函数 …… 1
一、函数的概念 …… 1
二、函数的几种特性 …… 3
三、初等函数 …… 5
四、常用经济函数 …… 9
五、建立函数关系（实例） …… 12
1.2 数列的极限 …… 15
一、数列极限的定义 …… 15
二、收敛数列的性质 …… 18
1.3 函数的极限 …… 21
一、函数极限的定义 …… 21
二、函数极限的性质 …… 26
1.4 无穷小量与无穷大量 …… 28
一、无穷小量 …… 28
二、无穷大量 …… 29
1.5 极限的运算法则 …… 31
一、极限的四则运算法则 …… 31
1.6 极限存在准则 两个重要极限 …… 35
1.7 无穷小量的比较 …… 41
1.8 函数的连续性 …… 44
一、函数的连续性 …… 44
二、函数的间断点 …… 47

三、初等函数的连续性 …… 49
1.9 闭区间上连续函数的性质 …… 51
一、有界性与最值定理 …… 51
二、零点定理与介值定理 …… 51

第二章 导数与微分 …… 57

2.1 函数的导数 …… 57
一、引例 …… 57
二、导数的定义 …… 58
三、导数的几何意义 …… 61
四、可导与连续的关系 …… 62
2.2 导数的四则运算及复合运算 …… 64
一、导数的四则运算 …… 65
二、反函数的求导法则 …… 67
三、复合函数的求导法则 …… 69
四、基本求导法则与求导公式 …… 71
2.3 函数的微分 …… 73
一、微分的定义 …… 73
二、微分的几何意义 …… 75
三、基本初等函数的微分公式与微分运算法则 …… 75
四、微分在近似计算中的运用 …… 77
2.4 高阶导数 …… 80
2.5 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 …… 83
一、隐函数的导数 …… 83
二、对数求导法 …… 84
三、由参数方程所确定的函数的导数 …… 85

第三章 中值定理及导数的应用——微分学的精华 …… 89

3.1 中值定理 …… 89
一、罗尔（Rolle）定理 …… 89
二、拉格朗日（Lagrange）中值定理 …… 90
三、柯西（Cauchy）中值定理 …… 92
3.2 洛必达法则 …… 94
一、“$\frac{0}{0}$”型未定式 …… 95
二、“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式 …… 96
三、其他类型未定式 …… 96
3.3 泰勒公式 …… 98

3.4 函数的单调性 函数的极值与最值 …… 103
一、函数单调性的判别方法 …… 103
二、函数极值的判别法 …… 105
三、函数最值的求法 …… 107
3.5 曲线的凹凸性及函数图像的描绘 …… 109
一、曲线的凹凸性与拐点 …… 109
二、函数图形的描绘 …… 111
3.6* 平面曲线的曲率 …… 113
一、弧微分 …… 113
二、曲率及其计算公式 …… 114
三、曲率半径，曲率圆 …… 117
3.7* 方程的近似解 …… 119
一、二分法 …… 119
二、切线法 …… 120
3.8 应用模型 …… 122
一、捕鱼业的产量与效益模型 …… 122
二、边际分析与弹性分析简介 …… 124

第四章 不定积分 …… 132

4.1 不定积分的概念 …… 132
一、原函数与不定积分 …… 132
二、基本积分公式 …… 134
三、不定积分的基本性质 …… 135
四、不定积分的运算性质 …… 135
4.2 换元积分法 …… 138
一、第一类换元法 …… 138
二、第二类换元法 …… 144
4.3 分部积分法 …… 153
4.4* 有理函数的积分 …… 159
4.5 积分表的使用 …… 163

第五章 定积分 …… 169

5.1 定积分的概念与性质 …… 169
一、两个引例 …… 169
二、定积分的概念 …… 171
三、定积分的性质 …… 173
5.2 牛顿—莱布尼兹公式 …… 176
一、变上限的定积分及其导数 …… 177
二、牛顿—莱布尼兹公式 …… 179

第一章 函数与极限

极限概念是微积分学一个最基本、最重要的概念. 一方面，它是建立微积分学的基础. 另一方面，极限的思想和分析方法将贯穿微积分学的始终，函数的连续性、导数与积分等都将借助于极限方法来描述. 本章主要讨论函数的极限与连续的基本概念、基本性质和基本运算，并介绍它们的一些实际应用.

1.1 函　数

函数是微积分学的主要研究对象，用数学方法解决生活中的应用问题，首先就是要建立函数关系.

一、函数的概念

在研究各种实际问题的过程时，经常会遇到两种不同类型的量：一种是变的，即在所研究问题的过程中可取不同的数值；另一种在所研究问题的过程中保持不变，只取一个固定值，前者为变量，后者为常量. 在同一个过程中，往往有几个变量同时变化，但是它们的变化不是孤立的，而是按照一定的规律互相联系着. 变量之间的互相依赖关系，就是下面我们要介绍的函数关系.

案例 1 ［圆的面积］ 圆的面积与它的半径之间的关系可表示为

$$A=\pi r^2.$$

案例 2 ［存款利息］ 我们去银行存钱，假设一年期整存整取的年利率为 4.14%，则存款金额 x 与一年到期时的利息 y 之间的对应关系如表 1.1 所示.

表 1.1

存款金额 x/元	500	1 000	2 000	5 000	10 000	20 000
一年到期时利息 y/元	20.7	41.4	82.8	207	414	828

案例 3 ［短信收费］ 移动公司规定短信收费标准为：当月所发短信不超过 500 条，只收月租费 25 元，超过 500 条的，每条加收 0.1 元，则短信费用和用户当月所发短信条数的关系可用下面的形式给出：

$$y=\begin{cases}25, & x\leqslant 500,\\ 25+0.1(x-500), & x>500.\end{cases}$$

分析 以上列举的案例，虽然是来自不同的领域，而且具有不同的表示形式，有公式、表格、图形，但它们的共性是：都反映了在同一过程中有着两个相互依赖的变量，当其中一个量在某数集内取值时，按一定的规则，另一个量有唯一确定的值与之对应. 变量之间的这种关系就是函数关系.

定义 1 设数集 $D\subset\mathbf{R}$，变量 $x\in D$，若当变量 x 在非空数集 D 内任取一数值时，变量 $y\in\mathbf{R}$ 依照某一对应法则 f 总有唯一确定的数值与之对应，则称 f 为 D 到 $\mathbf{R}$ 的函数. 通常记作 $f: D\to\mathbf{R}$，或 $y=f(x)$，$x\in D$. 其中 x 称为自变量，y 称为因变量，自变量 x 的取值范围 D 称为函数的定义域，相应 y 的取值集合称为函数的值域.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，则称该函数在 x_0 有定义，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

定义域和值域都是数集，这里介绍一般数集常用区间或邻域的形式. 常见的区间：

开区间 $(a, b)=\{x \mid a<x<b\}$；闭区间 $[a, b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$；

半开半闭区间 $[a, b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$ 或 $(a, b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$.

还有所谓无穷区间：

$$[a, +\infty)=\{x \mid a\leqslant x<+\infty\}；(-\infty, b]=\{x \mid -\infty<x\leqslant b\}；$$

$$(-\infty, +\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}.$$

邻域也是一个经常用到的概念. 以点 x_0 为中心的任何开区间称为点 x_0 的邻域，记作 $U(x_0)$. 设 δ 是任一正数，则开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 就是点 x_0 的一个邻域，这个邻域称为点 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0, \delta)$，即

$$U(x_0, \delta)=(x_0-\delta, x_0+\delta),$$

点 x_0 称为此邻域的中心，δ 称为此邻域的半径.

点 x_0 的 δ 邻域把邻域中心 x_0 去掉后称为点 x_0 的去心邻域，记作 $\mathring{U}(x_0, \delta)$，即

$$\mathring{U}(x_0, \delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}.$$

例 1 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{3}{5x^2+2x}$；(2) $y=\sqrt{9-x^2}$；(3) $y=\dfrac{1}{\ln(x-1)}$.

解 (1) 在分式 $\dfrac{3}{5x^2+2x}$ 中分母不能为零，所以 $5x^2+2x\neq0$，解得 $x\neq-\dfrac{2}{5}$ 且 $x\neq0$，即定义域为 $\left(-\infty, -\dfrac{2}{5}\right)\cup\left(-\dfrac{2}{5}, 0\right)\cup(0, +\infty)$.

(2) 在偶次根式中，被开方式必须大于等于零，所以有 $9-x^2\geqslant0$，解得 $-3\leqslant x\leqslant3$，即定义域为 $[-3, 3]$.

(3) 在对数式中，真数必须大于零，所以 $x-1>0$，即 $x>1$. 又分式中分母不能为零，所以 $\ln(x-1)\neq0$，即 $x-1\neq1$，即 $x\neq2$. 综合起来得出所求函数的定义域为

$$D=(1, 2)\cup(2, +\infty).$$

根据函数的定义可知，定义域、对应法则构成了函数二要素. 显然，如果两个函数的二要素相同，那么我们就认为这两个函数是同一个函数.

函数的表示方法一般有三种：图示法、表格法和公式法．其中图示法和公式法是数学学习过程中最常用的两种表示方法，常结合使用．

二、函数的几种特性

函数的几种特性包括奇偶性、单调性、周期性和有界性．由于函数的几种特性在中学都已学习过，这里只作简要说明．

1. 函数的奇偶性

曲线 $y=x^3$ 关于坐标原点对称，即自变量取一对相反数值时，相对应的一对函数值也恰是相反数，这时，称 $y=x^3$ 为奇函数，如图 1.1 所示．曲线 $y=x^2$ 关于 y 轴对称，即自变量取一对相反数时，相对应的一对函数值却相等，这时，称 $y=x^2$ 为偶函数，如图 1.2 所示．

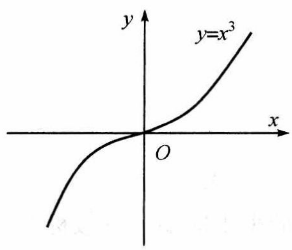


图 1.1

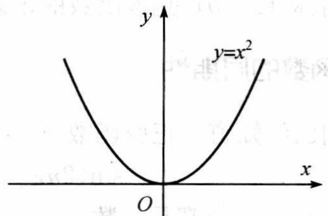


图 1.2

一般地，设函数 $y=f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果对任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数．

根据定义可知，奇、偶函数的定义域必关于原点对称．奇函数的图像关于原点对称；偶函数的图像关于 y 轴对称．

例 2　判断下列函数的奇偶性．

(1) $f(x)=3x^2-2x^4+1$；(2) $f(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$；

(3) $f(x)=5x^3-2$；(4) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解　(1) 因为 $f(-x)=3(-x)^2-2(-x)^4+1=3x^2-2x^4+1=f(x)$，所以 $f(x)=3x^2-2x^4+1$ 为偶函数．

(2) 因为 $f(-x)=\dfrac{a^{-x}-a^{-(-x)}}{2}=\dfrac{a^{-x}-a^x}{2}=-\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}=-f(x)$，所以 $f(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$ 是奇函数．

(3) 因为 $f(-x)=5(-x)^3-2=-5x^3+2$，显然 $f(-x)\neq f(x)$，$f(-x)\neq -f(x)$，所以 $f(x)=5x^3-2$ 是非奇非偶函数．

(4) $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$，故 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数．

2. 函数的单调性

如图 1.1 所示，观察函数 $y=x^3$ 的图像，从左向右看（沿着 x 轴的正方向），这是一条上升的曲线，即函数值随着自变量值的增大而增大，这样的函数称为在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的. 如图 1.2 所示，在区间 $(-\infty, 0)$ 内，观察函数 $y=x^2$ 的图像，我们会看到，情况完全相反，这是一条下降的曲线，即函数值随着自变量值的增大而减少，这样的函数称为在区间 $(-\infty, 0)$ 内是单调减少的.

一般地，设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义，如果对于 (a, b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加；如果对于 (a, b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调减少.

单调增加函数与单调减少函数统称为单调函数，若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是单调函数，则称 (a, b) 是该函数的单调区间.

3. 函数的周期性

我们已经知道，正弦函数 $y=\sin x$ 是周期函数，即有

$$\sin(2n\pi+x)=\sin x, \quad (n=\pm 1, \pm 2, \cdots).$$

即 $\pm 2\pi$，$\pm 4\pi$，…都是函数 $y=\sin x$ 的周期，而 2π 是它的最小正周期，一般称 2π 为正弦函数的周期.

一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在正数 T，使 $f(T+x)=f(x)$ 成立，则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数，称 T 是它的一个周期.

若 T 是函数的一个周期，则 $\pm 2T$，$\pm 3T$，…也都是它的周期. 对周期函数 $y=f(x)$，若它在所有的周期中存在一个最小正数，通常，我们称周期中的最小正周期为周期函数的周期.

周期为 T 的周期函数，在长度为 T 的各个区间上，其函数的图像有相同的形状. 对正弦函数 $y=\sin x$，在长度为 2π 的各个区间上，其图像的形状显然是相同的.

4. 函数的有界性

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上，函数 $y=\sin x$ 的图像介于两条平行线直线 $y=-1$ 和 $y=1$ 之间，即有 $|\sin x|\leqslant 1$，这时称 $y=\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界函数. 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内，函数 $y=x^3$ 的图像（如图 1.1 所示）向上、向下都是可以无限延伸，不可能找到两条平行于 x 轴的直线，使这个图像介于这两条直线之间，这时称 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是无界函数.

一般地，设函数 $y=f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果存在一个正数 M，对于所有的 $x\in D$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是有界函数. 如果不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 D 上是无界函数.

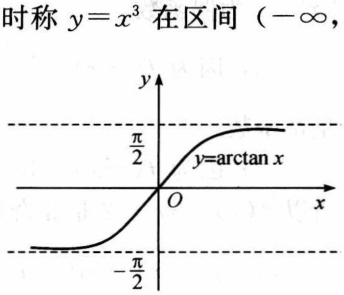


图 1.3

有界函数的图像必介于两条直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间.

例如，反正切函数 $y=\arctan x$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界函数（如图 1.3 所示）.

三、初等函数

1. 基本初等函数

基本初等函数通常是指：常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数.

(1) 常数函数 $y=C$（C 为常数），它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，其图像如图 1.4 所示.

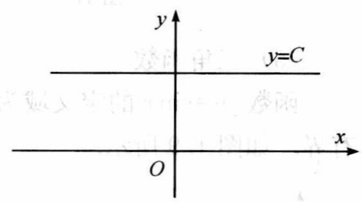


图 1.4

(2) 幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为实数），它的定义域随 α 而异. 如 $y=x^2$，$y=x^{\frac{2}{3}}$，定义域为$(-\infty, +\infty)$；如 $y=x^3$，$y=x^{\frac{1}{3}}$，定义域为 $(-\infty, +\infty)$；如 $y=x^{\frac{1}{2}}$，定义域为 $[0, +\infty)$；如 $y=x^{-1}$，定义域为 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$；如 $y=x^{-\frac{1}{2}}$，定义域为 $(0, +\infty)$ 等.

当 $\alpha>0$ 时，函数的图像通过原点 $(0, 0)$ 和点 $(1, 1)$，在 $(0, +\infty)$ 内单调增加. 如图 1.5 所示.

当 $\alpha<0$ 时，函数的图像不过原点，但仍通过点 $(1, 1)$，在 $(0, +\infty)$ 内单调减少. 如图 1.6 所示.

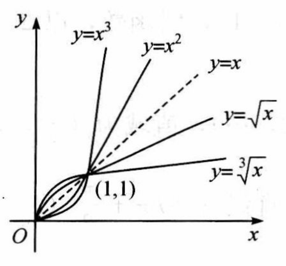


图 1.5

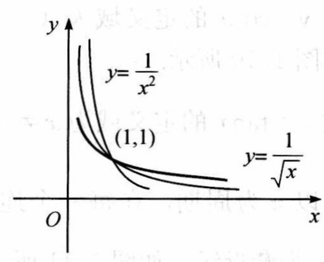


图 1.6

当 α 为奇数时，函数 $y=x^{\alpha}$ 是奇函数；当 α 为偶数时，函数 $y=x^{\alpha}$ 是偶函数.

(3) 指数函数

$$y=a^x \ (a>0, a\neq 1).$$

它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，函数的图像全部在 x 轴上方，且通过点 $(0, 1)$. 当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少. 如图 1.7 所示.

(4) 对数函数

$$y=\log_a x \ (a>0, a\neq 1).$$

它的定义域是 $(0, +\infty)$，函数的图像全部在 y 轴右侧，值域是 $(-\infty, +\infty)$. 无论 a 取何值，曲线都通过点 $(1, 0)$. 如图 1.8 所示.

当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少.

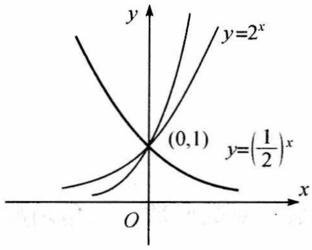


图 1.7

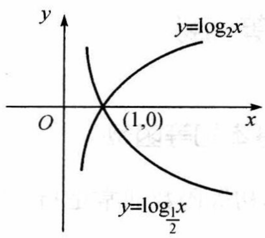


图 1.8

（5）三角函数

函数 $y=\sin x$ 的定义域为（$-\infty$，$+\infty$），值域为 $[-1, 1]$，奇函数，以 2π 为周期，有界. 如图 1.9 所示.

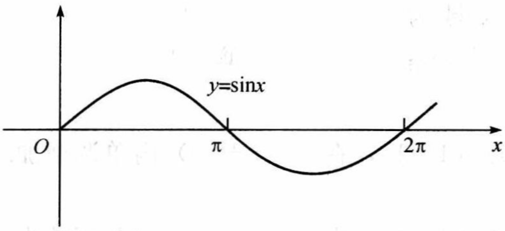


图 1.9

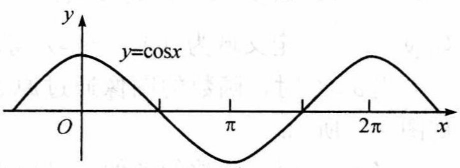


图 1.10

函数 $y=\cos x$ 的定义域为（$-\infty$，$+\infty$），值域为 $[-1, 1]$，偶函数，以 2π 为周期，有界. 如图 1.10 所示.

函数 $y=\tan x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$（$k=0$，$\pm1$，$\pm2$，…），值域为（$-\infty$，$+\infty$），奇函数，以 π 为周期，在每一个连续区间内单调增加，以直线 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$（$k=0$，±1，±2，…）为渐近线. 如图 1.11 所示.

函数 $y=\cot x$ 的定义域为 $x\neq k\pi$（$k=0$，±1，±2，…），值域为（$-\infty$，$+\infty$），奇函数，以 π 为周期，在每一个连续区间内单调减少，以直线 $x=k\pi$（$k=0$，±1，±2，…）为渐近线. 如图 1.12 所示.

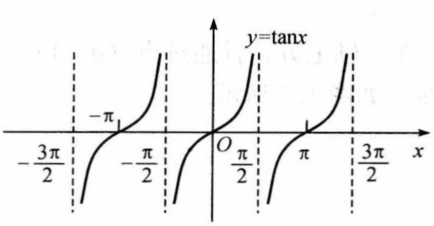


图 1.11

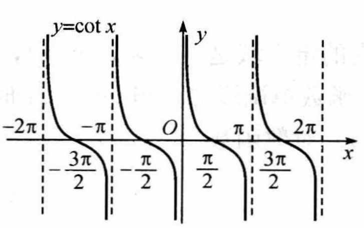


图 1.12

正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，$\cos x\neq0$.

余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$，$\sin x\neq 0$.

（6）反三角函数

反正弦函数 $y=\arcsin x$ 的定义域是 $[-1,1]$，值域是 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，是单调增加的奇函数，有界．如图 1.13 所示．

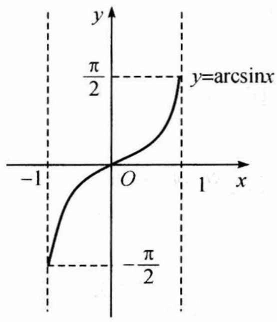


图 1.13

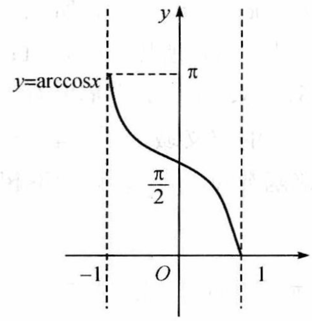


图 1.14

反余弦函数 $y=\arccos x$ 的定义域是 $[-1,1]$，值域是 $[0,\pi]$，是单调减少函数，有界．如图 1.14 所示．

反正切函数 $y=\arctan x$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，是单调增加的奇函数，有界．如图 1.15 所示．

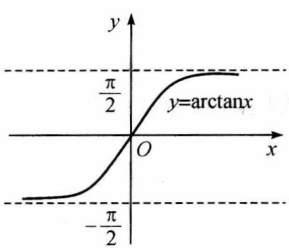


图 1.15

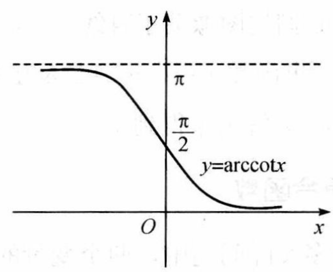


图 1.16

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $(0,\pi)$，是单调减少的函数，有界．如图 1.16 所示．

（7）分段函数

有些函数，对于其定义域内自变量 x 不同的取值，不能用一个统一的数学表达式表示，而要用两个或两个以上的式子表示，这类函数称为分段函数．分段函数是常见的非初等函数．如绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

需要注意的是，分段函数是用若干个表达式表示的一个函数，其定义域是各个取值区间

的并集.

例 3 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & -4\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x<3,\\ 5x-1, & x\geqslant 3.\end{cases}$$

求 $f(-\pi)$，$f(1)$，$f(3.5)$ 及函数的定义域.

解 因为 $-\pi\in[-4,1)$，所以 $f(-\pi)=\sin(-\pi)=0$；

因为 $1\in[1,3)$，所以 $f(1)=1$；

因为 $3.5\in[3,+\infty)$，所以 $f(3.5)=5\times(3.5)-1=16.5$；

函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-4,+\infty)$.

(8) 取整函数 $y=[x]$，表示不超过 x 的最大整数，其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $R_f=\mathbf{Z}$.

例如：$[\pi]=3$， $[7.1]=7$， $[-6.8]=-7$， $\left[\dfrac{2}{3}\right]=0$.

2. 反函数

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 值域是 M，若对于 M 中的每一个 y 值，存在唯一确定的 x 值（满足 $y=f(x)$）与之对应，则得到了一个定义在 M 上的以 y 为自变量，x 为因变量的新函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，称其为 $y=f(x)$ 的反函数.

习惯上，用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，通常将 $y=f(x)$ 的反函数改写为 $y=f^{-1}(x)$，$y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在其定义域内具有相同的单调性，在同一直角坐标系中，它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 4 求函数 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 的反函数.

解 将 x 解出来得到 $x=y^3-1$，所以函数 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 的反函数为 $y=x^3-1$.

3. 复合函数

在很多实际问题中，两个变量的联系有时不是直接的.

函数 $y=\mathrm{e}^{\sin x}$，x 是自变量，y 是 x 的函数，为了确定 y 的值，对给定的 x 值，应先计算 $\sin x$，若令 $u=\sin x$，再由已求得的 u 值计算 e^u，便得到 y 的值：$y=\mathrm{e}^u$.

这里，可把 $y=\mathrm{e}^u$ 理解成 y 是 u 的函数；把 $u=\sin x$ 理解成 u 是 x 的函数，那么函数 $y=\mathrm{e}^{\sin x}$ 就是把函数 $u=\sin x$ 代入 $y=\mathrm{e}^u$ 中而得到的. 按这种理解，函数 $y=\mathrm{e}^{\sin x}$ 就是由 $y=\mathrm{e}^u$ 和 $u=\sin x$ 这两个函数复合在一起构成的，称为复合函数.

一般地，设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$. 如果 $u=\varphi(x)$ 的值域或其部分包含在 $y=f(u)$ 的定义域中，则 y 通过中间变量 u 构成 x 的函数，称为 x 的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$. 其中，x 是自变量，u 称作中间变量.

说明 (1) 不是任何两个函数都可以构成一个复合函数，例如 $y=\ln u$ 和 $u=-(x^2+1)$，就不能构成复合函数，因为对任意 x，函数 $u=-(x^2+1)<0$；而 $y=\ln u$ 中必须 $u>0$ 才有意义.

(2) 复合函数不仅可以有一个中间变量，还可以有多个中间变量，例如 $y=\mathrm{e}^u$，$u=\sin v$，$v=\sqrt{x}$ 复合成函数 $y=\mathrm{e}^{\sin\sqrt{x}}$，这里 u，v 都是中间变量.

(3) 复合函数通常不一定是由纯粹的基本初等函数复合而成，而更多的是由基本初等函数经过四则运算形成的简单函数构成的，这样复合函数的合成和分解往往是对简单函数来说的.

例 5　指出下列复合函数是由哪些简单函数复合而成.

(1) $y=\sin(x^3+4)$；(2) $y=5^{\cot\frac{1}{x}}$.

解　(1) 设 $u=x^3+4$，则 $y=\sin(x^3+4)$ 由 $y=\sin u$，$u=x^3+4$ 复合而成.

(2) 设 $u=\cot\dfrac{1}{x}$，则 $y=5^u$；设 $v=\dfrac{1}{x}$，则 $u=\cot v$，所以，$y=5^{\cot\frac{1}{x}}$ 可以看成是由 $y=5^u$，$u=\cot v$，$v=\dfrac{1}{x}$ 三个函数复合而成的.

4. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次的复合并且能用一个解析式表示的函数叫做初等函数. 如

$$y=\arctan\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}},\ y=\sqrt[5]{\ln\cos^3 x},\ y=\mathrm{e}^{\operatorname{arccot}\frac{x}{3}},$$

都是初等函数.

四、常用经济函数

在用数学方法解决经济问题时，首先要找出经济变量之间的函数关系，建立数学模型. 下面介绍几种常用的经济函数.

1. 需求函数和供给函数

一种商品在市场上的需求量 Q 与它的价格 p 密切相关. 通常价格贵，需求量就少，价格便宜，需求量就多. 需求和价格之间的关系可以简化为一种函数关系. 我们先不考虑其他因素，简单地认为价格定了需求量就随之确定，这样需求量就是价格的函数，即需求函数，记作 $Q=Q(p)$. 显然，需求函数为价格 p 的单调减少函数.

常用需求函数有以下几种类型：

(1) 线性需求函数 $Q=a-bp$ $(a>b>0)$；

(2) 二次需求函数 $Q=a-bp-cp^2$ $(a>0，b>0，c>0)$；

(3) 指数需求函数 $Q=a\mathrm{e}^{-bp}$ $(a>b>0)$.

需求函数 $Q=Q(p)$ 的反函数，就是价格函数，记作 $P=P(q)$，也反映商品的需求与价格的关系.

某种商品的供给量 S 也受商品价格 p 的制约，产品价格高，厂方就增加生产，使供给量增加. 反之，价格下降将使供给量减少，我们也可以把它简化为一种函数关系. 供给量与