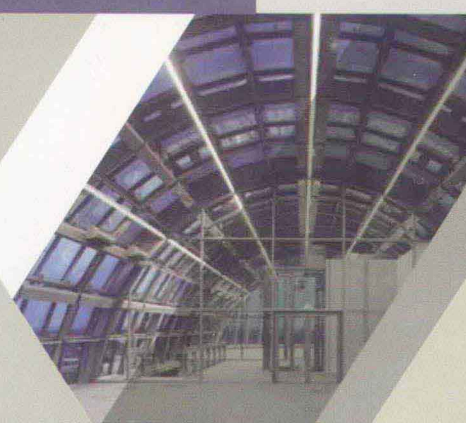
大学工科数学核心课程系列教材

自主创新
方法先行

线性代数

主 编 胡觉亮



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

大学工科数学

自主创新
方法先行

线性代数

Xianxing Daishu

主　编　胡觉亮

副主编　宗云南　王定江

王航平　裘哲勇

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书以学生熟悉的、背景丰富的解线性方程组讲起，围绕线性方程组的讨论，采用学生易于接受的方式，科学、系统地介绍了线性代数的行列式、线性方程组、矩阵、向量空间、矩阵的特征值和特征向量、二次型等内容，涵盖了数学考研大纲中有关线性代数的所有内容，并建有教材网站。附录中配备了 MATLAB 数学软件的相关实验内容。每节给出一些思考题，每章配有 A，B 两类难度不一的习题，便于学生复习、巩固、提高之用。

本书可作为普通高等学校，特别是以培养创新性应用型人才为目标的本科院校线性代数课程的教材，也可作为自学考试、报考硕士研究生的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 胡觉亮主编. -- 北京 ：高等教育出版社，2013.6
ISBN 978-7-04-037355-4

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①胡… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 107447 号

策划编辑 杨 波　　责任编辑 杨 波　　封面设计 赵 阳　　版式设计 余 杨
插图绘制 邓 超　　责任校对 刘丽娴　　责任印制 尤 静

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印　　刷 北京凌奇印刷有限责任公司
开　　本 787mm × 960mm　1/16
印　　张 11.75
字　　数 200 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2013 年 6 月第 1 版
印　　次 2013 年 6 月第 1 次印刷
定　　价 17.80 元

物 料 号 37355-00

学数学需掌握理论与方法，更要培养数学素养

——“大学工科数学核心课程系列教材”序言

我国于 2010 年颁布了《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020 年)》，教育部 2011 年开始实施了《高等学校本科教学质量与教学改革工程》，2012 年又出台了“教育部关于全面提高高等教育质量的若干意见”。这为我国实现高等教育强国目标提出了战略部署，为高校培养具有实践能力、创新精神、国际视野的高素质高级专门人才提出了更高要求。我国高等教育进入大众化教育阶段的新形势、新任务，让我们深刻地感受到新一轮教育教学改革的必要性和紧迫性，也为大学工科数学教育教学改革明确了方向。

根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的“大学数学基础课程教学基本要求”，结合本科高校的特点，以培养高素质应用型人才、复合型人才和卓越工程师为目标，浙江省高等学校数学类专业与数学基础课程教学指导委员会组织编写了大学工科数学核心课程系列教材，含《高等数学》(上、下册)、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《数学物理方程》与《数学软件与大学数学实验》。本系列教材融合了编者的长期教学经验和教学改革成果，着眼于培养学生学习能力、实践能力和创新能力，让学生不仅学会数学知识、理论与方法，还使其数学思想和数学思维得到培养。该系列教材的特点可概括如下：

(1) **问题驱动，融合背景**。在内容的编排上既考虑如何与中学衔接，又考虑到内在的逻辑关系，并注意到专业后续课程的需要。教材注重讲解“如何应用基本理论和方法分析与解决实际问题”的思想方法，适度增加工程技术应用领域中的案例、具有趣味性和活学活用的数学建模内容。融入数学建模方法，增加 MATLAB 数学软件介绍，培养学生运用其理论和方法解决实际问题的能力。内容力求简明，削减一些公式演算内容，降低对一些定理、公式的证明和一些数学表达形式的要求，使学生在正确理解的基础上，能够熟练地应用基本理论与方法。

(2) **剖析思想，深入浅出**。突出思想性，保持严谨性，着力揭示数学思想与概念的本质和解决问题的思想方法，充分体现数学理论的“源”与“流”的关系。为了使学生的数学思维得到必要的训练，教材的叙述与推理保持应有的严谨性，对于某些重要结论仍保留必要的分析、证明与讨论。讲解力求深入浅出，富有启发性。教材编写尽力从学生熟悉的实例和知识出发，用其熟悉的语言、知识、思

想方法或直观的几何形象,凭借联想、类比等思维方法,进行自然的、合乎规律的扩展和深化;尽量以问题为导向,采用“提出问题、讨论问题、解决问题”的方式来展开,以适应学生的思维习惯;语言叙述力求直观清晰、通俗易懂。

(3) **体例新颖,强化训练。**以加强学生数学素养的养成、综合应用能力的增强为目标,设计新体例。新体例将充分体现问题引入、数学模型、理论与方法、综合训练、拓展阅读、研究性学习等特点。注重基本运算能力的培养,特别注重数学思想方法的培养,以适量的应用实例为学生提供应用能力训练的素材;为培养学生的综合能力,精心设计了各种不同类型的习题,包括基本理论题、有一定难度的综合题和研究性应用题。书中附录编入 MATLAB 上机演练与实验题目。

(4) **资源丰富,实现共享。**系列教材具有丰富的课程数字化资源,教学设计能较好反映教学中重点、难点的巧妙处理。利用现代化网络技术,把这些精彩的数字教学资源(含讲稿、教案、课件、案例、专题论文和研究性课题)集成,建成一个数字化的课程教学资源网站,构建一个内容丰富的、师生共享的、“活的”课程教学环境。

该系列教材力求内容简明,体系科学合理,揭示数学思想,融入数学建模,展示思维方法,引入现代数学软件,强化应用能力和创新能力的培养,深入浅出,富于启发性,促进学生学习。本系列教材适合于高等院校工科专业的本科生,也可供理科专业和其他相关专业大学生、研究生学习。

浙江省高等学校数学类专业
与数学基础课程教学指导委员会
主任委员 裘松良
2012 年 5 月 15 日

前　言

本书是科技部创新方法工作专项项目——“科学思维、科学方法在高等学校教学创新中的应用与实践”的研究成果之一，也是浙江省精品课程建设成果之一，它是编者们总结十几年的教学经验、依据固化多年的教学研究与教学改革成果编写而成。

线性代数的重要性在于它考虑了一类简单且基础的数学模型，而大量的理论及应用问题可以通过“线性化”变成线性代数问题。特别是随着计算机技术的飞跃发展及广泛应用，有些非线性问题高精度地线性化与大型线性问题的可计算性正在逐步实现，从而线性问题的重要性显得日益突出起来。无论从理论还是应用的角度，线性代数正受到科技、管理工作者的特别重视，已成为他们必须具备的数学知识。

线性代数作为一门数学基础课，大量的定义、定理及证明，使之具有高度的抽象性和严谨的逻辑性。通过学习使学生得到逻辑思维能力、运算能力、抽象与分析能力、综合与推理能力的严格训练；线性代数知识具有广泛的应用背景，通过学习使学生能用所学知识去描述问题、解决问题，提高数学建模及求解模型的能力，为后续课程打好基础；线性代数的教学过程中包含大量的学习方法，通过学习使学生在学会知识的过程中变得会学，通过掌握已知学会研究未知的方法，提高学生自主学习、自主获取新知识的能力，实现学习的目的——知识的继承与创新。

本书从学生熟悉的、背景丰富的解线性方程组讲起，并以线性方程组为主线展开内容的阐述，内容结构自然、由浅入深、易于接受。每章通过引例提出问题，以问题解决为目标，引入知识点，展开内容的介绍，提高学生的学习兴趣与探知欲望，培养学生探索问题、解决问题的思想与方法，将复杂的定理证明和拓展的学习内容在教材网站上（http://math.hdu.edu.cn/xxds）给出，使教材的结构更为简洁、精炼，有助于学生集中精力掌握最基本、最重要的知识。每节给出一些思考题，每章配有 A，B 两类难度要求的习题，便于学生复习、巩固、提高之用，每章最后均给出若干应用例子，体现线性代数的应用性，有利于培养学生运用数学方法解决实际问题的能力。教材结构充分体现了数学产生、发展的途径之一，“问题—方法—理论—应用”。在附录中配备了 MALTAB 数学软件的相关实验内容。教材网站包含了部分定理的证明、应用案例、考研指导、释疑解答等拓展的

学习资料。

本书由胡觉亮（浙江理工大学）主编，宗云南（浙江理工大学）、王定江（浙江工业大学）、王航平（中国计量学院）、裘哲勇（杭州电子科技大学）为副主编，其中第一、二、三章由宗云南、胡觉亮编写，第四章（除第五节）由王定江编写，第五章由裘哲勇编写，第六章及第四章第五节由王航平编写，附录 MALTAB 实验由韩曙光（浙江理工大学）编写，全书由胡觉亮、宗云南统稿。教材网站由张智丰（杭州电子科技大学）、董建明（浙江理工大学）规划设计。

在本书的编写过程中，编者阅读并吸纳了国内外很多线性代数教材的精华，对由此所受到的启迪及收获向参考文献的各位作者表示衷心的感谢。编者要感谢浙江大学的吴庆标教授，浙江理工大学的徐定华教授，浙江工业大学的周明华教授以及浙江理工大学的易小兰、江仁宜、徐映红、马晓艳、韩维、李瑛、杨瑞、蒋义伟、江明月，杭州电子科技大学的刘晓庆、熊瑜、厉娅玲、司君如，浙江工业大学的罗和治、丁晓东，中国计量学院的吴龙树、李世伟，浙江理工大学科技与艺术学院的贺建辉、葛美宝等老师，他们对本书的初稿进行了认真审阅并提出了宝贵的意见和建议。最后特别感谢高等教育出版社为本书出版所作出的努力。

由于编者水平和学识有限，书中不足和疏漏之处难免，恳请广大读者批评指正，并将意见和建议通过高等教育出版社（邮箱：yangbo@hep.com.cn）反馈给我们，以便今后有机会修订时对本书做出改进和完善。

编　者

2013 年 2 月 18 月

目　　录

第一章　线性方程组的解法

求解线性方程组是科学研究和工程应用中最普遍和最重要的问题,大量科学研究和工程应用中的数学问题,或多或少都与线性方程组的求解有关.本章介绍求解线性方程组的消元法及其矩阵形式.

引例　交通流量问题

随着城市人口以及交通流量的增加,城市道路交通拥堵问题已成为制约经济发展、降低人民生活质量、削弱经济活力的瓶颈之一.为解决这个世界性难题,各国政府和民间都进行了广泛的研究,提出了改善交通管理水平、增强交通参与者的素质、扩大道路容量、限制车辆增长速度等政策及车牌限行、设置单向行驶道路等措施.以上的政策和措施的一个基础性工作就是各道路的车流量的统计与分流控制,以便采取措施使各道路的交通流量设法达到平衡,所谓交通流量平衡是指在每个路口进入的车辆数与离开的车辆数相等.图 1-1 是某一城市的道路交通网络图,所有车道都是单行道.箭头给出了车辆的通行方向,数字是高峰期每小时进入或离开路口的车辆数.在满足交通流量平衡的条件下,试问如何分流车辆.

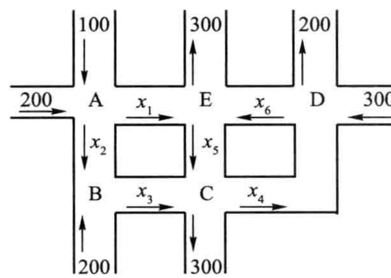


图 1-1

为了保证交通流量平衡,得线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 300, \\ x_2 - x_3 = -200, \\ x_3 - x_4 + x_5 = 300, \\ x_4 - x_6 = -100, \\ x_1 - x_5 + x_6 = 300. \end{cases} \tag{1.1}$$

问题归结为讨论线性方程组(1.1)是否有解?若有解,求出方程组的解.

第一节　线性方程组的消元法

一、线性方程组的概念

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为实未知量,$a_1,a_2,\cdots,a_n,b$ 为实数,n 为正整数.方程

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$$

称为含未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的**线性方程**.由 m 个含未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性方程组成的方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases}\tag{1.2}$$

称为 n 元**线性方程组**,其中 $a_{ij},b_i(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 为实数.若

$$x_1=c_1,\ x_2=c_2,\ \cdots,\ x_n=c_n\tag{1.3}$$

满足(1.2)中的每一个方程,则称(1.3)为方程组(1.2)的**解**.

如果线性方程组(1.2)有解,则称方程组(1.2)是**相容**的;否则,称方程组(1.2)是**不相容**的.

线性方程组解的全体所构成的集合称为该线性方程组的**解集**.显然,如果线性方程组不相容,其解集必为空集.能表示线性方程组全部解的表达式称为方程组的**通解**或**一般解**.

具有相同解集的线性方程组称为**同解方程组**或**等价方程组**.

二、线性方程组的消元法

中学所学的解线性方程组的消元法是求解线性方程组简单有效的方法.现在我们回忆消元法的过程.

例 1　利用消元法求解线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2=3, & (1)\\ 4x_1+5x_2=6. & (2)\end{cases}$$

解　将方程(1)乘 -4 加到方程(2)上,得等价方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2=\ \ 3, & (3)\\ \quad\ -3x_2=-6. & (4)\end{cases}$$

由方程(4)解得 $x_2=2$,再代入方程(3),得 $x_1=-1$,则原方程组的解为 $x_1=-1$,$x_2=2$.该方程组有唯一解.

例 2　利用消元法求解线性方程组

$$(\mathrm{I})\begin{cases}5x_1+6x_2+7x_3=5, & (1)\\ 4x_1+8x_2+4x_3=5, & (2)\\ 3x_1+6x_2+3x_3=9. & (3)\end{cases}\qquad(\mathrm{II})\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1, & (1)\\ x_1+2x_2-x_3=3, & (2)\\ 5x_1+8x_2-x_3=11. & (3)\end{cases}$$

解　(I)方程(3)的两边乘不为零的常数 $\frac{1}{3}$,得

$$\begin{cases}5x_1+6x_2+7x_3=5, & (4)\\ 4x_1+8x_2+4x_3=5, & (5)\\ x_1+2x_2+x_3=3. & (6)\end{cases}$$

交换方程(4)与(6)的位置,得

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=3, & (7)\\ 4x_1+8x_2+4x_3=5, & (8)\\ 5x_1+6x_2+7x_3=5. & (9)\end{cases}$$

方程(7)乘 -4 加到方程(8)上;方程(7)乘 -5 加到方程(9)上,得

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=3, & (10)\\ 0=-7, & (11)\\ -4x_2+2x_3=-10. & (12)\end{cases}$$

交换方程(11)与(12)的位置,得

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=3, & (13)\\ -4x_2+2x_3=-10, & (14)\\ 0=-7. & (15)\end{cases}$$

方程(15)是矛盾方程,故方程组(Ⅰ)无解.

(Ⅱ)方程(1)乘 -1 加到方程(2)上;方程(1)乘 -5 加到方程(3)上,得

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1, & (4)\\ x_2-2x_3=2, & (5)\\ 3x_2-6x_3=6. & (6)\end{cases}$$

方程(5)乘 -3 加到方程(6)上,得

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1, & (7)\\ x_2-2x_3=2, & (8)\\ 0=0. & (9)\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x_1=-3x_3-1,\\ x_2=2x_3+2.\end{cases}$$

令 $x_3=c$,得方程组的通解为

$$\begin{cases}x_1=-3c-1,\\ x_2=2c+2,\\ x_3=c,\end{cases}$$

其中 c 为任意常数.此时方程组有无穷多解.

总结例 1 与例 2,我们发现利用消元法求解线性方程组的过程,本质上是对线性方程组的方程进行下列三种变换:

(1) 交换任意两个方程的位置;

(2) 某一方程两边乘不为零的常数;

(3) 把某一方程的倍数加到另一方程上去.

上述三种变换称为线性方程组的**同解变换**.

另外,我们还可以看到,线性方程组可能无解、可能有解,在有解时可能是唯一解或无穷多解,关于这方面的更深入的研究可参考下一节与第三章第六节.

思考题一

1. 在例 1 与例 2 中,细心的读者会发现,这里用消元法求解线性方程组与中学所介绍的形式上有所不同,您能指出它们各自的优点所在吗?

2. 线性方程组的解与未知量的记号表示有关吗?

3. 给定方程组 $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 4x + 5y = 6. \end{cases}$ 将每个方程交换未知量 x 与 y 的位置,得方程组 $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 5x + 4y = 6. \end{cases}$ 试问这两个方程组同解吗?

第二节 矩阵及其初等行变换

一、矩阵

例 3 利用消元法求解线性方程组

$$\begin{cases} x + 2y = 3, & (1) \\ 4x + 5y = 6. & (2) \end{cases}$$

解 将方程(1)乘 -4 加到方程(2)上,得

$$\begin{cases} x + 2y = 3, & (3) \\ \quad -3y = -6. & (4) \end{cases}$$

由方程(4)解得 $y = 2$, 代入方程(3),得 $x = -1$, 则原方程组的解 $x = -1, y = 2$.

仔细比较例 1 和例 3 两个方程组,我们发现线性方程组的解是由未知量系数 a_{ij} 和方程右边的常数 b_i 所决定,而与线性方程组的未知量用哪个记号表示无关.鉴于此,在讨论线性方程组(1.2)的求解时,我们可以舍弃未知量(但把未知量牢记于心中),建立方程组(1.2)与 m 行 $n + 1$ 列的数表

$$\left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \tag{1.4}$$

的一一对应关系:该数表的第 $j(j=1,2,\cdots,n)$ 列是未知量 x_j 前的系数,第 $n+1$ 列是方程右边的常数 $b_i(i=1,2,\cdots,m)$;第 i 行代表方程组(1.2)的第 i 个方程.我们称该数表为方程组(1.2)的**增广矩阵**,简记为 $\boldsymbol{B}$.而把数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

称为方程组(1.2)的**系数矩阵**,简记为 $\boldsymbol{A}$.

例 4 写出线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

的系数矩阵与增广矩阵.

解 方程组的系数矩阵与增广矩阵分别为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \left(\begin{array}{ccc:c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{array}\right).$$

以上讨论启发我们,为了简化线性方程组的求解,在代数上给出了数表——矩阵的概念(名词“矩阵(matrix)”是由西尔维斯特(Sylvester)首先使用的).

定义 1 由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots m;j=1,2,\cdots n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 m 行 n 列**矩阵**,简称 $m \times n$ 矩阵,其中 a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列的**元素**. $m \times n$ 矩阵可以表示为 $(a_{ij})_{m\times n}$,一般用大写的黑体英文字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$ 表示矩阵.

元素为实数的矩阵称为**实矩阵**,元素为复数的矩阵称为**复矩阵**.本书如无特殊声明,所讨论的矩阵都是指实矩阵.