

美国大学数学教材

线性代数

Larry Smith 着

卢业广译

(下册)

六安师范专科学校

一九七九年十二月

第十二章(II) 线性变换的矩阵表示(续)

这一章的目的是, 进一步讨论线性变换矩阵表示的理论和技巧. 我们将讨论一些不同的问题和技巧. 要强调的是, 这里我们只是作一些很粗浅的讨论.

[例 1] 射影.

射影是一种简单的线性变换. 例如, 在 $\mathbb{R}^3$ 中考虑平面 $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$ (注意 $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ 是一个 2 维子空间) 和线性变换 $P: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, P 把一个向量 A 变成它在平面 $\mathcal{V}$ 上的射影. (见图 12'. 1) $P: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 的公式是不难求得的. 首先应记住, 对于 $\mathcal{V}$ 中任一向量 A , 我们必定有 $P(A) = A$. 例如

$$P(1, -1, 0) = (1, -1, 0)$$

$$P(0, 1, -1) = (0, 1, -1),$$

并且 $\{(1, -1, 0), (0, 1, -1)\}$ 是 $\mathcal{V}$ 的一组基. 其次要指出, 对于通过原点且垂直于 $\mathcal{V}$ 的直线上的任一向量 B , 我们一定有 $P(B) = 0$.

例如

$$P(1, 1, 1) = 0.$$

由于 $\{(1, -1, 0), (0, 1, -1), (1, 1, 1)\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, 因此我们易于得到 P 的各种式子. 例如, P 关于基 $\{(1, -1, 0), (0, 1, -1), (1, 1, 1)\}$ 的矩阵就是

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

当然, 你可能对这种矩阵表示不满意, 而希望求 P 关于 $\mathbb{R}^3$ 的标准基的矩阵. 这同样并不困难. 注意到

$$(1, 0, 0) = \frac{2}{3}(1, -1, 0) + \frac{1}{3}(0, 1, -1) + \frac{1}{3}(1, 1, 1)$$

$$(0, 1, 0) = -\frac{1}{3}(1, -1, 0) + \frac{1}{3}(0, 1, -1) + \frac{1}{3}(1, 1, 1)$$

$$(0, 0, 1) = -\frac{1}{3}(1, -1, 0) - \frac{2}{3}(0, 1, -1) + \frac{1}{3}(1, 1, 1).$$

因此我们有

$$\begin{aligned} P(1, 0, 0) &= \frac{2}{3}P(1, -1, 0) + \frac{1}{3}P(0, 1, -1) + \frac{1}{3}P(1, 1, 1) \\ &= \frac{2}{3}(1, -1, 0) + \frac{1}{3}(0, 1, -1) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(0, 1, 0) &= -\frac{1}{3}P(1, -1, 0) + \frac{1}{3}P(0, 1, -1) + \frac{1}{3}P(1, 1, 1) \\ &= -\frac{1}{3}(1, -1, 0) + \frac{1}{3}(0, 1, -1) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(0, 0, 1) &= -\frac{1}{3}P(1, -1, 0) - \frac{2}{3}P(0, 1, -1) + \frac{1}{3}P(1, 1, 1) \\ &= -\frac{1}{3}(1, -1, 0) - \frac{2}{3}(0, 1, -1) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

从而 P 关于标准基的矩阵就是

$$N = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

或者写成一般形式

$$P(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z, -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z, -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z\right).$$

现在我们先提出一个问题： P 的什么样的表示能为我们提供更多的性质内容？大家将会看到，矩阵表示 M 连同基 $\{(1, -1, 0), (0, 1, -1), (1, 1, 1)\}$ （所求得的 M 是关于这组基的）能使我们了解到 P 的一切性质。因为它明显地告诉我们， P 是这样的平面上的射影，这个平面由向量 $(1, -1, 0)$ 和 $(0, 1, -1)$ 所生成，无疑它就表示 $\psi = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$ 。

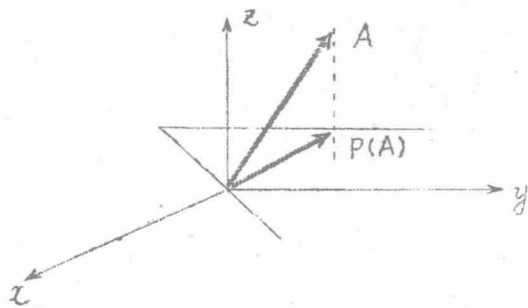


图 12'.1

另一方面，就 P 关于标准基的矩阵表示 N 来说，它所提供的 P 的简单几何性质就比较少。这样，我们就会提出另外一个问题：如何判定一个线性变换 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是不是射影？为了回答这个问题，我们还得从头来定义什么是射影。（应该注意，一个定义可能是有用或无用的，不真或不成立的。）下面的定义易于看出是很有用的。

定义 一个线性变换

$$P: W \rightarrow W$$

称为一个射影，如果 $P^2 = P$ ，也即对 W 中每个向量 A 都有 $P(P(A)) = P(A)$ 。

应当指出，存在这样的线性变换

$$S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

它是在这种定义下的射影，而不是上面所述的到一个平面（或直线）上的射影。我们具体来看一个例子。

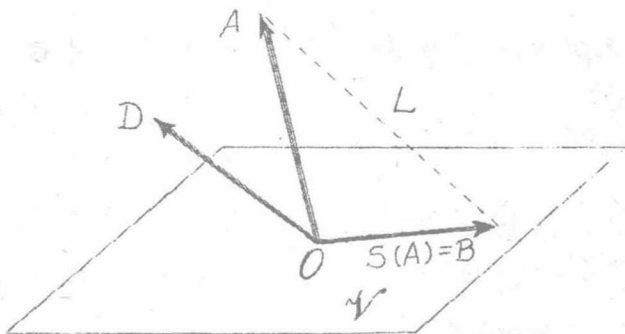


图 12'.2

设 $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$ 是上面讨论过的 $\mathbb{R}^3$ 中的平面. 令 $D = (1, 1, 0)$, 注意 D 不是 $\mathcal{V}$ 中的向量. 我们不妨给出一类到 $\mathcal{V}$ 上的斜射影. 设 A 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个向量, 过向量 A 的端点作一直线平行于 D . 这条直线与平面有唯一的交点(为什么?), 从而确定了平面 $\mathcal{V}$ 内唯一的向量 B . 设 $S(A) = B$ (如图 12'. 2). 根据定义不难验证, $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 确实是一个线性变换. 注意到

$$\begin{aligned} S(A) &= A && \text{当 } A \in \mathcal{V}, \\ S(A) &= 0 && \text{当 } A \in \mathcal{L}(D). \end{aligned}$$

因为 D 不在平面 $\mathcal{V}$ 内, 如果我们选取 $\mathcal{V}$ 的一组基 $\{F, E\}$, 那么 $\{F, E, D\}$ 就是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基. 如果 A 是 $\mathbb{R}^3$ 中的任意向量, 那么

$$A = a_1 F + a_2 E + a_3 D$$

从而

$$\begin{aligned} S(A) &= a_1 S(F) + a_2 S(E) + a_3 S(D) \\ &= a_1 F + a_2 E \end{aligned}$$

由于 E 和 F 属于 $\mathcal{V}$, D 属于 $\mathcal{L}(D)$, 因此

$$\begin{aligned} S^2(A) &= S(a_1 F + a_2 E) = a_1 S(F) + a_2 S(E) \\ &= a_1 F + a_2 E. \end{aligned}$$

所以 $S^2 = S$, 故 S 是一个射影.

事实上我们可以证明, 每一个适合 $\dim(\text{Im } S) = 2$ 的射影

$$S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

都是上述类型的斜射影. 到目前为止, 我们所讨论的比较常用的射影就是所谓的正射影 (D 垂直于 $\mathcal{V}$) 或自共轭射影 (例子见第十五章).

现在我们回到开头所提出的问题上, 即如何判断一个变换是不是射影? 上面所给出的定义, 当且仅当我们能证明某个射影 $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是斜射影时才是有用的. 其实进一步我们还有

定理 12'. 1

设 $\mathcal{W}$ 是 n 维向量空间, $S: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ 是一个

射影. 那么对于 W 来说一定存在一组基 $\{A_1, \dots, A_n\}$, 使得

$$S(A_i) = \begin{cases} A_i & \text{当 } 1 \leq i \leq r \\ 0 & \text{当 } r+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

这里的 $r = \dim(\operatorname{Im} S)$, 因此 S 关于这组基的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

证明 设 $\{B_1, \dots, B_r\}$ 是 $\operatorname{Im} S$ 的一组基, $\{C_1, \dots, C_s\}$ 是 $\operatorname{Ker} S$ 的一组基. 由 (8.10) 我们有

$$n = r + s.$$

因此集合 $\{B_1, \dots, B_r, C_1, \dots, C_s\}$ 由 n 个向量组成, 这正好等于 W 的基向量的个数. 下面我们来证明, 它的确就是 W 的一组基. 为此注意下列二个事实:

$$S(C_i) = 0 \quad \text{对于 } i=1, \dots, s$$

$$S(B_i) = B_i \quad \text{对于 } i=1, \dots, r.$$

第一个等式由 $\{C_1, \dots, C_s\}$ 的定义很明显, 第二个则需证明.

(诚然, 我们还没有利用到 S 是射影这一事实!) 因为 B_i 属于 $\operatorname{Im} S$, 那么我们可以在 W 中找到一个向量 D_i , 使得 $S(D_i) = B_i$. 由于 S 是一个射影, 所以

$$S(B_i) = S(S(D_i)) = S^2(D_i) = S(D_i) = B_i.$$

这就证明了上面的第二个等式.

因为集合 $\{B_1, \dots, B_r, C_1, \dots, C_s\}$ 有 n 个向量, 因此我们可由 (6.9) 推出, 只要 $\{B_1, \dots, C_s\}$ 是线性无关的, 即只要验证基的条件的一半, 那么它一定就是一组基.

假若向量组 $\{B_1, \dots, B_r, C_1, \dots, C_s\}$ 线性相关, 那么我们可以

以找到不全为零的数 $b_1, \dots, b_r, c_1, \dots, c_s$ 使得

$$b_1 B_1 + \dots + b_r B_r + c_1 C_1 + \dots + c_s C_s = 0. \quad (*)$$

将 S 作用到这个等式的两边可得

$$\begin{aligned} 0 &= S(b_1 B_1 + \dots + b_r B_r + c_1 C_1 + \dots + c_s C_s) \\ &= b_1 S(B_1) + \dots + b_r S(B_r) + c_1 S(C_1) + \dots + c_s S(C_s) \\ &= b_1 B_1 + \dots + b_r B_r. \end{aligned}$$

又因为 $B_1, \dots, B_r$ 是 $\text{Im } S$ 的一组基, 因而线性无关, 于是 $b_1 = b_2 = \dots = b_r = 0$, 这样原来的关系式 $(*)$ 就变成

$$c_1 C_1 + \dots + c_s C_s = 0.$$

但是 $C_1, \dots, C_s$ 是 $\text{Ker } S$ 的一组基, 它们也是线性无关的, 因此 $c_1 = \dots = c_s = 0$. 这样, $\{B_1, \dots, B_r, C_1, \dots, C_s\}$ 就不是线性相关的, 因而一定线性无关, 所以 $\{B_1, \dots, B_r, C_1, \dots, C_s\}$ 是 W 的一组基. 令

$$A_1 = B_1$$

$$A_2 = B_2$$

$$\vdots$$

$$A_r = B_r \quad (\text{记住 } r+s=n.)$$

$$A_{r+1} = C_1$$

$$\vdots$$

$$A_n = C_s$$

那么我们就有

$$\begin{aligned} P(A_i) &= P(B_i) = B_i = A_i & \text{对于 } 1 \leq i \leq r \\ &= P(C_{i-r}) = 0 & \text{对于 } r+1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

证明完毕. □

根据 (12'.1) 我们不难推出, 每个适合

$$S^2 = S \quad \text{且} \quad \dim(\text{Im } S) = 2$$

的线性变换 $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 都是一个斜射影.

这一点读者可参考后面的 (14.1), 并注意它和 (12'.1) 之间的

性质区别。

对于一个给定的射影 $S: W \rightarrow W$ ，要具体计算出 (12'.1) 中的基可能很麻烦，但是定理的证明为我们提供了一种方法，这种方法以前曾成功地处理过类似的问题。

[例 2] $\cap$ 零变换。

一个线性变换 $T: W \rightarrow W$ 称为 K 次 $\cap$ 零变换，如果 $T^K = 0$ 且 $T^{K-1} \neq 0$ 。这也就是说，对于 W 中所有的向量 A 有 $T^K(A) = 0$ ，但在 W 中至少存在一个向量 B 使 $T^{K-1}(B) \neq 0$ 。一类典型的 $\cap$ 零变换是微分算子

$$D: \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R}),$$

它是 $n+1$ 次的 $\cap$ 零变换。另一类简单的例子就是移位算子

$$S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

它定义为

$$S(a_1, a_2, \dots, a_n) = (0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}).$$

如果 $\{E_1, \dots, E_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的通常的基，那么

$$S(E_1) = E_2$$

$$S(E_2) = E_3$$

$$\vdots$$

$$S(E_n) = 0,$$

因此 S 关于这组基的矩阵就是

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & & & 0 \\ 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

这时 S 就是 n 次的 $\cap$ 零变换。对于上面两个线性变换来说，其 $\cap$ 零的次数也就是变换所定义的向量空间的维数。这是一种很特殊的情况。实际上，我们可以确定出所有像这样的 $\cap$ 零变换。为此，

我们还需要下列十分重要的事实.

命题 12'. 2 设 $T: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ 是一个 K 次非零线性变换. 如果 $B \in \mathcal{V}$ 是一个向量, 它适合 $T^{K-1}(B) \neq 0$. 那么向量组 $\{B, T(B), \dots, T^{K-1}(B)\}$ 是线性无关的.

证明 假定

$$b_0 B + b_1 T(B) + \dots + b_{K-1} T^{K-1}(B) = 0 \quad (*)$$

是 $\{B, T(B), \dots, T^{K-1}(B)\}$ 的一个线性关系. 下面我们来证明 $b_0 = b_1 = \dots = b_{K-1} = 0$. 因为 $T^K(B) = 0$, 由 (8.1) 我们有

$$0 = T^K(B) = T^{K+1}(B) = \dots$$

将 T^{K-1} 作用于 (*) 的两边即得

$$\begin{aligned} 0 &= b_0 T^{K-1}(B) + b_1 T^K(B) + \dots + b_{K-1} T^{2K-2}(B) \\ &= b_0 T^{K-1}(B) + b_1 0 + \dots + b_{K-1} 0 \\ &= b_0 T^{K-1}(B). \end{aligned}$$

因为 $T^{K-1}(B) \neq 0$, 所以 $b_0 = 0$, 于是线性关系 (*) 变成

$$b_1 T(B) + \dots + b_{K-1} T^{K-1}(B) = 0 \quad (**)$$

将 T^{K-2} 作用于两边即得

$$\begin{aligned} 0 &= b_1 T^{K-1}(B) + b_2 T^K(B) + \dots + b_{K-1} T^{2K-3}(B) \\ &= b_1 T^{K-1}(B) + b_2 0 + \dots + b_{K-1} 0 \\ &= b_1 T^{K-1}(B) \end{aligned}$$

因此 $b_1 = 0$. 这样继续进行下去, 我们就推得 $0 = b_2 = \dots = b_{K-1}$.

从而 $\{B, T(B), \dots, T^{K-1}(B)\}$ 线性无关. $\square$

推论 12'. 3 设 $T: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ 是一个非零线性变换, T 的次数等于 $\mathcal{V}$ 的维数. 设这个数是 K . 那么存在一个向量 $B \in \mathcal{V}$, 使得 $\{B, T(B), \dots, T^{K-1}(B)\}$ 是 $\mathcal{V}$ 的一组基, 并且 $T^K(B) = 0$.

证明 根据 (12'. 2), 向量组 $\{B, T(B), \dots, T^{K-1}(B)\}$ 是线性无关的. 它们有 K 个向量, 且 $K = \dim \mathcal{V}$, 故由 (6.9) 推得它们是 $\mathcal{V}$ 的一组基. 因为 K 又是 T 的次数, 所以 $T^K(B) = 0$. $\square$

因此, 如果 $T: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ 是一个 π 零变换, 并且 T 的次数 $= k = \dim \mathcal{V}$, 那么我们可以在 $\mathcal{V}$ 中选取一个向量 B , 使得 $\{B, T(B), \dots, T^{k-1}(B)\}$ 成为 $\mathcal{V}$ 的一组基, 且 $T^k(B) = 0$. T 关于这组基的矩阵就是

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

如果我们利用这组基把 $\mathcal{V}$ 和 $\mathbb{R}^n$ 等同起来 (如 (8.13 — 8.15)), 那么我们发现 T 就相当于上述的移位算子. 因此, 次数等于 $\mathcal{V}$ 的维数的 π 零变换的构造就可以完全确定. 一般的 π 零变换的构造比较复杂, 它是线性代数中更深入的研究课题.

[例 3] 循环变换.

一个线性变换 $T: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ 称为循环的, 如果 $\mathcal{V}$ 中存在一个向量 A 使得 $\{A, T(A), T^2(A), \dots\}$ 生成 $\mathcal{V}$. 向量 A 称为 T 的循环向量. 循环变换的例子是很多的. 例如由 (12'.3) 可知, 次数等于 $\mathcal{V}$ 的维数的任意 π 零变换 $T: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ 就是循环变换. 实际上在 2 维的情况下, 所有非显然的线性变换都是循环的. 下面我们将从线性无关方面进行类似的讨论.

命题 12'.4 假定 $T: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ 是一个循环线性变换. 设 $\mathcal{V}$ 的维数是 n , $A \in \mathcal{V}$ 是 T 的一个循环向量. 那么向量组 $A, T(A), \dots, T^{n-1}(A)$ 是 $\mathcal{V}$ 的一组基.

证明 集合 $\{A, T(A), \dots, T^{n-1}(A)\}$ 中有 n 个向量, 因此根据 (6.9), 要想证明它们是 n 维空间的一组基, 只要证明它们是线性无关的. 假若它们线性相关, 那么由 (6.2), 则存在一个正整数 $m < n$ 使得

$$T^m(A) \in \mathcal{L}(A, T(A), \dots, T^{m-1}(A)).$$

因此在 T 的作用下

$$\begin{aligned} T^{m+1}(A) &\in \mathcal{L}(T(A), T^2(A), \dots, T^m(A)) \\ &\subset \mathcal{L}(A, T(A), \dots, T^{m-1}(A)) \end{aligned}$$

因为所有的向量 $T(A), T^2(A), \dots, T^m(A)$ 都属于 $\mathcal{L}(A, T(A), \dots, T^{m-1}(A))$, 再应用 T 则得

$$T^{m+2}(A) \in \mathcal{L}(T(A), T^2(A), \dots, T^m(A)) \subset \mathcal{L}(A, T(A), \dots, T^{m-1}(A))$$

这样继续进行下去我们就有

$$T^m(A), T^{m+1}(A), T^{m+2}(A), \dots \in \mathcal{L}(A, T(A), \dots, T^{m-1}(A))$$

于是

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \mathcal{L}(A, T(A), \dots, T^m(A), T^{m+1}(A), \dots) \\ &\subset \mathcal{L}(A, T(A), \dots, T^{m-1}(A)), \end{aligned}$$

因而 $\dim \mathcal{W} \leq m < n$, 这是不可能的. 所以向量组 $A, T(A), \dots, T^{n-1}(A)$ 必定线性无关. $\square$

命题 12.5 线性变换 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是循环的充要条件是

$T \neq eI$, 这里 e 是一个数, $I: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是单位变换.

证明 假设 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. 向量 $A \in \mathbb{R}^2$ 是 T 的循环向量的充要条件是 $T(A) \notin \mathcal{L}(A)$, 也即 $T(A)$ 不属于通过原点由 A 所生成的直线. 这时, $\{A, T(A)\}$ 就是 $\mathbb{R}^2$ 的一组基, 于是我们得到 $\mathbb{R}^2 = \mathcal{L}(A, T(A), \dots)$. 假设 T 不具有循环向量, 那么对每一个 $A \in \mathbb{R}^2$ 都有 $T(A) \in \mathcal{L}(A)$. 特别

$$T(1, 0) \in \mathcal{L}(1, 0) \Rightarrow T(1, 0) = e_1(1, 0)$$

$$T(0, 1) \in \mathcal{L}(0, 1) \Rightarrow T(0, 1) = e_2(0, 1).$$

现在我们来证明 $e_1 = e_2$, 因为我们又有 $0 = T(0, 0)$

$$T(1, 1) \in \mathcal{L}(1, 1) \Rightarrow T(1, 1) = e(1, 1)$$

于是

$$= (e_1, e_2)(1, 1) = e_1(1, 0) + e_2(0, 1)$$

$$e(1, 1) = T(1, 1) = T((1, 0) + (0, 1))$$

$$= T(1, 0) + T(0, 1)$$

$$= e_1(1, 0) + e_2(0, 1)$$

从而

$$(e, e) = (e_1, e_2)$$

因此 $e_1 = e = e_2$, 所以

$$T(1, 0) = (e, 0)$$

$$T(0, 1) = (0, e)$$

这样 T 关于 $\mathbb{R}^2$ 的标准基的矩阵就是

$$\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} = eI$$

因而 $T = eI$.

假设 $T: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ 是一个具有循环向量 A 的循环变换, 那么 T 关于基 $\{A, T(A), \dots, T^{n-1}(A)\}$ 的矩阵就是

$$\begin{pmatrix} 0 & & a_0 \\ 1 & & 0 & a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 \dots 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

这里 $T^n(A) = a_0 A + a_1 T(A) + \dots + a_{n-1} T^{n-1}(A)$. 这个矩阵特别简单, 它说明有一个循环向量是很有用的. 但是一般说来, 一个线性变换未必就有一个循环向量! 这也是线性代数中有待深入研究的课题.

习 题 十 二 II

1. 求射影 $P: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 关于标准基的矩阵, 这里 P 是到平面 $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \mid x + y = 0\}$ 的射影.
2. 对于 $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \mid z = 0\}$ 重做第 1 题.
3. 求 $\mathbb{R}^3$ 的一组基 $\{A_1, A_2, A_3\}$, 使得第 1 题中的射影 P

关于这组基的矩阵形如

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

4. 对于第2题的射影重做第3题.

5. 证明: 微分算子 $D: \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ 是 4 次 0 零变换. 试求 $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ 的形如

$$\mathcal{E} = \{B, D(B), D^2(B), D^3(B)\}$$

的一组基, 这里 $B \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. 试求出 D 关于这组基 $\mathcal{E}$ 的矩阵.

6. 设 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是线性变换

$$T(x, y, z) = (0, x, 2y)$$

证明 T 是 3 次 0 零变换. 求出一个向量 B 使得

$$\{B, T(B), T^2(B)\}$$

是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基. 试求出 T 关于这组基的矩阵. 试求 T 关于标准基的矩阵.

7. 设 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是线性变换

$$T(x, y, z) = (x+y, y+z, x).$$

证明 T 是循环线性变换. (提示: 找一个 B , 使得 $\{B, T(B), T^2(B)\}$ 是一个线性无关的向量组.)

8. 设线性变换 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 定义为

$$T(x, y, z) = (y, x, z).$$

证明 T 不是循环变换.

9. 设线性变换 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 定义为

$$T(x, y, z) = (y, z, x).$$

证明 T 是循环变换。求出基 $\{B, T(B), T^2(B)\}$, 并计算出 T 关于 $\{B, T(B), T^2(B)\}$ 的矩阵。

第十三章 线性方程组

在线性代数的历史发展过程中，几何中的线性变换和代数中的线性方程组起着特别重要的作用。一个线性方程组具有下列形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (L)$$

这里 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是所要求的未知数， mn 个数 a_{ij} , $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, n$ 称为线性方程组 (L) 的系数，当然，它们是确定的。方程组 (L) 的一个解就是一个有序的 n 元数组 $(s_1, \dots, s_n)$ ，它使得 m 个等式

$$\begin{cases} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \cdots + a_{1n}s_n = b_1 \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \cdots + a_{2n}s_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \cdots + a_{mn}s_n = b_m \end{cases}$$

都同时成立。解方程组 (L) 就是求出 (L) 的所有解。

[例 1] 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$$

解 根据以前所学的知识，我们知道，这个方程组的解法

如下：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 & (1) \\ 2x_2 + x_3 = 4 & (2) \\ x_1 - x_2 = -1 & (3) \end{cases}$$

(3) 减去(1) 得到

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_2 + x_3 = 4 \\ -2x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$$

删去第三个方程得到

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x_1 = 3 - x_3 - x_2 \\ x_3 = 4 - 2x_2 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - 1 \\ x_3 = 4 - 2x_2 \end{cases}$$

因此方程组的解就是所有的三元数组

$$(x_2 - 1, x_2, 4 - 2x_2)$$

其中的 x_2 是任意的, 例如

$$(0, 1, 2), (-1, 0, 4)$$

就是它的解, 但

$$(1, 1, 2)$$

不是它的解。

另一方面, 大家都知道, 并不是每一个线性方程组都有一个解。例如线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$$

显然就没有解。因此在研究线性方程组时, 首先是要确定这个线性方程组何时解, 然后再来讨论究竟怎样解。

这里, 若利用前面的矩阵表表示则很方便。事实上, 在研究线性方程组时, 和近代科学研究中一样, 我们经常要用到矩阵。首先我们引进矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

矩阵 A 称为线性方程组的系数矩阵， B 称为方程组的常数矩阵。

这样我们就可以将线性方程组 (L) 缩写成一个简单的矩阵方程

$$AX = B. \quad (M)$$

解这个矩阵方程，我们可以利用线性变换给出一个非常简单的解释。设

$$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

是一个关于标准基的矩阵为 A 的线性变换。因此

$$T(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} x_j, \sum_{j=1}^n a_{2j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj} x_j \right).$$

令 $B = (b_1, \dots, b_m)$ ，它是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个向量。这样，(M) 的一个解就是 $\mathbb{R}^n$ 中使得

$$T(s_1, s_2, \dots, s_n) = (b_1, b_2, \dots, b_m)$$

的一个向量 $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ 。求出 (M) (或与之等价的 (L)) 的所有解，也就是要找出 $\mathbb{R}^n$ 中使得

$$T(s_1, s_2, \dots, s_n) = (b_1, \dots, b_m)$$

的所有向量 $(s_1, \dots, s_n)$ 。因此我们有下列结果

命题 13.1

在上述记号下，线性方程组 (L) 有一个解的充要条件是，向量 $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ 在变换 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 的象中，即 $B \in \text{Im } T$ 。

(13.1) 从理论上讲是很满意的，但是如果 $B \in \text{Im } T$ ，那么由系数矩阵 A 能说明什么呢？回答很简单。我们在 $\mathbb{R}^m$ 中引入下列向量