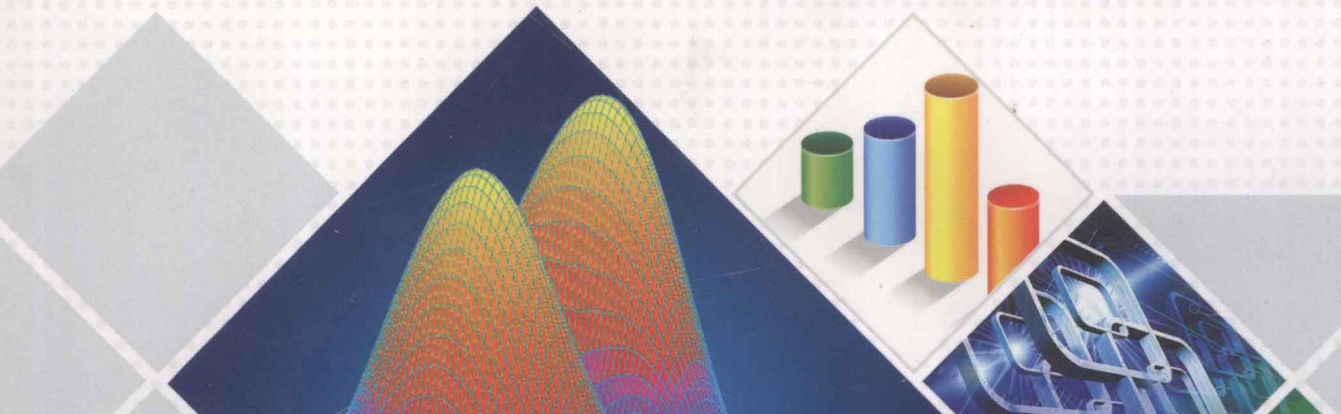
高等教育“十一五”规划教材
公共基础课教材系列

概率论与数理统计

邵珠艳　刘晨琛　主编



科学出版社
www.sciencep.com

高等教育“十一五”规划教材

公共基础课教材系列

概率论与数理统计

邵珠艳　刘晨琛　主编

科学出版社

北　京

内 容 提 要

由概率论与数理统计两部分组成. 内容包括随机事件和概率，随机变量及其分布，多维随机变量及其分布，随机变量的数字特征，数理统计的基础知识，参数估计，假设检验，方差分析和回归分析等内容. 各章每节后编有思考与讨论. 每章附有相当数量的习题，层次有深有浅，以供选用. 书后有一系列数值表及习题答案.

本书可作为医学院校各专业本科、专科学生的教材，也可作为报考硕士研究生考生的复习参考书，还可供工程技术人员、科研人员和教师阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/邵珠艳，刘晨琛主编. —北京：科学出版社，2010
（高等教育“十一五”规划教材·公共基础课教材系列）
ISBN 978-7-03-028597-3

Ⅰ.①概… Ⅱ.①邵…②刘… Ⅲ.①概率论－高等学校－教材②数理统计－高等学校－教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 158675 号

责任编辑：周 恢 /责任校对：王万红
责任印制：吕春珉 /封面设计：耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新 蕾 印 刷 厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010年9月第 一 版 开本:787×1092 1/16
2010年9月第一次印刷 印张:13 1/2
印数:1-3 500 字数:314 200

定价：21.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈新蕾〉）
销售部电话 010-62135763-8212 编辑部电话 010-62135235（VP04）

《概率论与数理统计》编委名单

主　编： 邵珠艳　刘晨琛

副主编： 岳　丽　邵婷婷　刘建康

编　委：（按姓氏笔画排序）

丁际环　丰　晓　古鲁峰　乔　静　李兆丽

刘建康　刘晨琛　邵珠艳　邵婷婷　岳　丽

林艳斌　屈志强

前　言

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律的一门数学学科，它是一门应用性很强的基础课. 根据概率论与数理统计的特点，针对当前教育发展与要求，我们编写本书的基本思路是：重概念、重方法、重应用、重能力的培养. 本书是编者在多年教学经验的基础上编写而成的，为加强学生数学素质的培养，本书在编写上有以下特点：

(1) 较详细地叙述了概率论与数理统计中一些主要概念和方法产生的背景和思路，从直观分析入手逐步过渡到严格的数学表述.

(2) 各章的每节后编写了思考与讨论，每章配以精心挑选的适量习题，以利于学生学习及基本运算能力的培养.

(3) 尽力联系实际，注重提高学生运用概率统计方法解决实际问题的能力.

(4) 按照国家标准，采用规范的概率统计用语.

(5) 对于统计假设检验中的三种判断方法，本书讨论了其中两种. 为了便于应用，本书在统计推断分析中，重点介绍和应用的是当前普遍采用的 P 值方法.

本书共八章分两部分，前四章是概率论部分，主要讲述概率论的基本概念和基本结论，其中心内容是随机变量及其分布，后四章是数理统计部分，主要讲述数理统计的基本概念和常用统计方法，其中心内容是统计推断的三个内容：抽样分布、参数估计和假设检验.

由于编者水平有限，错谬之处在所难免，恳请使用本书的师生和广大读者批评指正.

目　　录

第一章　随机事件及其概率

教学基本要求

(1) 了解随机事件的概念.

(2) 掌握事件间的关系和运算.

(3) 熟练掌握概率的古典概型.

(4) 掌握条件概率的定义、概率的乘法公式.

(5) 熟练掌握全概率公式和贝叶斯公式.

(6) 掌握事件的独立性和 n 重贝努力试验.

第一节　随机事件及其运算

一、必然现象与随机现象

在自然界及人类的社会活动中，可以观察到各种现象. 这些现象大体上可分为两类：一类是**必然现象**或称**确定性现象**（Deterministic Phenomenon）；另一类是**随机现象**（Random Phenomenon）或称**不确定性现象**.

必然现象是指在相同条件下重复试验，所得结果总是确定的现象. 只要试验条件不变，试验结果在试验之前是可以预言的. 例如，在标准大气压下，将水加热到 100℃，水必然沸腾；用手向空中抛出的石子，必然下落；做等速直线运动的物体，如无外力的作用，必然继续做等速直线运动等，这些现象都是必然现象.

随机现象是指在相同条件下重复试验，所得结果不一定相同的现象，即试验结果是不确定的现象. 对这种现象来说，在每次试验之前哪一个结果发生是无法预言的. 例如，新生婴儿，可能是男孩，也可能是女孩；向一目标进行射击，可能命中目标，也可能命不中目标；从一批产品中，随机抽检一件产品，结果可能是合格品，也可能是次品；测量某个物理量，由于许多偶然因素的影响，各次测量结果不一定相同……这些现象都是随机现象.

对随机现象，是否有规律可寻呢？人们经过长期的反复实践，发现这类现象虽然就每次试验结果来说，具有不确定性，但大量重复试验，所得结果却呈现出某种规律性. 例如，

(1) 掷一枚质量均匀的硬币，当投掷次数很大时，就会发现正面和反面出现的次数几乎各占$\frac{1}{2}$. 历史上，不少人做过实验，例如，蒲丰（Buffon）掷过 4040 次，得到

2048 次正面；皮尔逊（K Pearson）掷过 24000 次，得到 12012 次正面.

（2）对一个目标进行射击，当射击次数不多时，对弹孔分布看不出有什么规律性；但当射击次数非常多时，就可发现弹孔的分布呈现一定的规律性：弹孔关于目标的分布略呈对称性，且越靠近目标的弹孔越密，越远离目标的弹孔越稀.

（3）从分子物理学的观点来看，气体分子对器壁的压力是气体分子对器壁碰撞的结果. 由于分子是片刻不停地、杂乱无章地运动着，速度和轨道都是随机的，因而对器壁的碰撞也是随机的. 初看起来器壁所受的压力是不稳定的，可是实验证明，由于分子数目非常大，各分子运动所具有的随机性在集体中互相抵消、互相平衡了，使得器壁所受的总压力呈现一定的稳定性. 分子数目越大，压力越稳定.

从上述各例可以看到，随机现象也包含着规律性，它可在相同条件下的大量重复试验或观察中呈现出来. 这种规律性称为**随机现象的统计规律性**.

概率论和数理统计就是研究随机现象统计规律的一门数学学科.

二、随机试验、事件与样本空间

对随机现象的研究，总是要进行观察、测量或做各种科学试验（为了叙述方便起见，统称为试验）. 例如，掷一枚硬币，观察哪面朝上；向一目标进行射击，观察是否命中；从一批产品中随机抽一产品，检查它是否合格等，这些都是试验. 如果试验具有以下 3 个特点，则称为**随机试验**（Random Test），简称**试验**.

（1）试验可以在相同条件下重复进行.

（2）试验的所有可能结果不止一个，而且是事先已知的.

（3）试验前不可预知哪个结果会出现.

如掷硬币的例子，试验是可以在相同的条件下重复进行的，试验的可能结果有两个，即正面和反面；每次试验必出现其中之一，但投掷之前是不可能预言正面出现还是反面出现.

为了研究随机试验，首先要知道这个试验的所有可能结果是哪些. 随机试验的每一个可能结果称为**基本事件**（Elementary Event），也称为**样本点**（Sample Point），用 e 表示. 全体基本事件的集合称为**样本空间**（Sample Space），记为 Ω.

在讨论一个随机试验时，首先要明确它的样本空间. 对一个具体的试验来说，其样本空间可以由试验的具体内容确定. 下面看几个例子.

例 1.1　掷一枚均匀对称的硬币，观察正反面出现情况，这是个随机试验. 可能结果有 2 个

$$\text{正(正面朝上)},\quad \text{反(反面朝上)}.$$

故样本空间

$$\Omega=\{\text{正},\text{反}\}.$$

例 1.2　将上述硬币掷两次，观察正反面出现情况，这也是一个随机试验. 可能结果有 4 个

$$(\text{正正}),(\text{正反}),(\text{反正}),(\text{反反}).$$

故样本空间

$$\Omega=\{(正正),(正反),(反正),(反反)\}.$$

例 1.3　记录某电话交换台在一段时间内接到的呼唤次数，这个试验的基本事件（记录结果）是一个非负的整数，由于难以规定一个呼叫次数的上界，所以样本空间

$$\Omega=\{0,1,2,3,\cdots\}.$$

例 1.4　从一批灯泡中抽取一只灯泡，测量它的使用寿命．设 t 表示寿命，则样本空间

$$\Omega=\{t: t\geqslant 0\}.$$

例 1.5　观察某地区一昼夜最低温度 x 和最高温度 y．设这个地区的温度不会小于 T_0 也不会大于 T_1，则样本空间

$$\Omega=\{(x,y): T_0\leqslant x<y\leqslant T_1\}.$$

随机试验的任何结果都称为**随机事件**（Random Event），简称**事件**，常用大写字母 A，B，C，…等表示．有了样本空间的概念便可以用集合的语言来定义事件．下面先从一个例子来分析．

例 1.6　在例 1.2 中，若设事件 $A=$ “第一次出现正面”．在一次试验中，A 发生当且仅当在这次试验中出现基本事件（正正），（正反）中的一个．这样可以认为 A 是由（正正），（正反）组成的，而将 A 定义为它们组成的集合．

$$A=\{(正正),(正反)\}.$$

又如事件 $B=$ “两次出现同一面”，B 发生当且仅当基本事件（正正），（反反）中的一个出现，而将 B 定义为它们组成的集合．

$$B=\{(正正),(反反)\}.$$

类似地，事件 $C=$ “至少有一次出现正面”，可定义为集合

$$C=\{(正正),(正反),(反正)\}.$$

一般地，人们将事件定义为基本事件的某个集合，即样本空间的某个子集，称事件 A 发生，当且仅当 A 中的某一个基本事件出现．

任何一个样本空间 Ω 都有一个最大子集（样本空间 Ω 本身）和一个最小子集（空集 $\varnothing$）．由于 Ω 包含所有的基本事件，故在每次试验中，必然有一个基本事件 $e\in\Omega$ 发生，即在试验中，事件 Ω 必然发生，因此 Ω 是**必然事件**（Certain Event）．又因在 $\varnothing$ 中不包含任何一个基本事件，故在任何一次试验中，$\varnothing$ 永远不会发生，因此，$\varnothing$ 是**不可能事件**（Impossible Event）．常用 Ω，$\varnothing$ 分别表示必然事件与不可能事件．

必然事件和不可能事件可以说不是随机事件，但为了今后研究的方便，还是把它们作为随机事件的 2 个极端情形来处理．

三、事件间的关系与运算

在实际问题中，往往要在同一个试验中同时研究几个事件以及它们之间的联系．详细分析事件之间的关系，不仅帮助人们更深入地认识事件的本质，而且可以大大简化一些复杂的事件．

由于事件就是样本空间的子集，事件间的关系与运算和集合间的关系与运算是一致的．在下面的叙述中，为直观起见，用平面上的一个矩形域表示样本空间 Ω，矩形内的

每一点表示样本点（基本事件），并用矩形内的两个圆分别表示事件 A 和事件 B.

1. 事件的包含与相等

若事件 A 中的每一个样本点都属于事件 B（图 1.1），则称**事件 B 包含事件 A**，记做 $B \supset A$ 或 $A \subset B$.

显然，这时事件 A 发生必然导致事件 B 的发生. 故 B 包含 A，也常定义为："若 A 发生必然导致发生 B，则称 B 包含 A". 如掷一颗骰子，事件 $A=$"出现 4 点"的发生必导致事件 $B=$"出现偶数点"的发生，故 $A \subset B$.

对任一事件 A，有 $\varnothing \subset A \subset \Omega$.

如果 A 中任一基本事件必在 B 中（$A \subset B$），而 B 中任一基本事件也必在 A 中（$B \subset A$），则称**事件 A 与 B 相等**，记为 $A=B$.

2. 事件的积（或交）

同时属于 A 和 B 的样本点的集合（图 1.2）称为 **A 与 B 之积**（Produce of Events）**或交**，记为 AB 或 $A \cap B$.

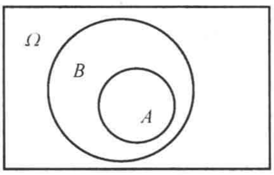


图 1.1

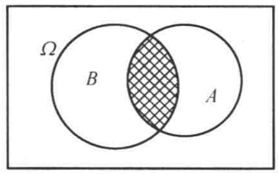


图 1.2

显然，事件 AB 发生等价于事件 A 与事件 B 同时发生，常称 AB 为 A 与 B 同时发生的事件.

一般地，n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 之积记为 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$，可列各事件 A_1，A_2，…之积记为 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$，它们都表示所列诸事件全都发生.

对任意事件 A，有 $\Omega A=A$；且若 $A \subset B$，则有 $AB=A$.

3. 互不相容事件

若事件 A 与 B 不能同时发生（图 1.3），即 $AB=\varnothing$，则称 A 与 B 为**互不相容的事件**（Mutually Exclusive）**或互斥事件**.

如果 A_1，A_2，…，A_n 中的任意两个事件是互不相容的，则称 A_1，A_2，…，A_n 是互不相容的.

4. 事件的和（或并）

至少属于 A 和 B 二者之一的所有样本点组成的集合（图 1.4），称为 A 与 B 之和（Sum of Events）或并，记为 $A+B$ 或 $A \cup B$.

显然，事件 $A \cup B$ 发生，表示 A 发生或 B 发生或 A 与 B 同时发生，即 A 与 B 中至少有一个发生. 因此，常称 $A \cup B$ 为 A 与 B 中至少有一个发生的事件. 一般地，n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的和事件记为 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$，可列个事件 A_1，A_2，…的和事件记为 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$，它们都表示所列诸事件中至少有一个发生.

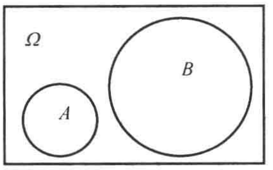


图 1.3

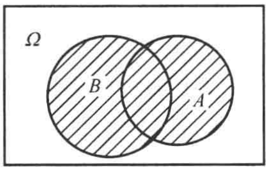


图 1.4

5. 事件的差

包含在 A 中而不包含在 B 中的样本点的集合（图 1.5），称为 A 与 B 之差（Difference），记为 $A-B$.

显然，事件 $A-B$ 发生，表示事件 A 发生而 B 不发生.

6. 对立事件

Ω 与 A 之差 $\Omega-A$，称为 A 的**对立事件**（Complementary Events）或**互逆事件**，记为 $\overline{A}$（图 1.6）.

由定义可知，在任一次试验中，A 与 $\overline{A}$ 不可能同时发生，但 A 与 $\overline{A}$ 二者之中必然有一个发生. 因而，$\overline{A}$ 就是事件"A 不发生".

显然，若事件 A，B 满足 $AB=\varnothing$，$A\cup B=\Omega$，则 A，B 互为对立事件. $B=\overline{A}$，$A=\overline{B}$.

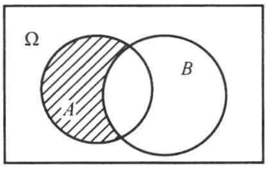


图 1.5

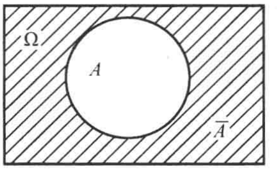


图 1.6

上面利用集合的概念描述了事件的概念、关系及运算，为了将它们与集合论中的相应部分作对照，列表 1.1.

表 1.1

符　号	概　率　论	集　合　论
Ω	样本空间，必然事件	空间（全集）
$\varnothing$	不可能事件	空集
e	基本事件（样本点）	元素
A	事件	子集
$\overline{A}$	A 的对立事件	A 的余集
$A\subset B$	事件 A 发生必然导致事件 B 发生	A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 相等
$A\cup B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	A 与 B 的并集
$A\cap B$	事件 A 与事件 B 同时发生	A 与 B 的交集
$A-B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	A 与 B 的差集
$AB=\varnothing$	事件 A 与事件 B 互不相容	A 与 B 没有公共元素

由于事件、事件的关系及运算与集合、集合的关系及运算是相当的，故根据集合的运算性质可推得事件的运算性质如下.

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) 分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(4) 德·摩根 (De Morgan) 律：

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

德·摩根律在事件的运算中经常用到，它可以推广到更多个事件的情况，即

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i, \tag{1.1}$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i. \tag{1.2}$$

用语言表述为：事件和的对立事件等于对立事件的积，事件积的对立事件等于对立事件的和.

例 1.7 甲、乙、丙 3 人各向靶子射击一次，设 A_i 表示“第 i 人击中靶子”，$i=1, 2, 3$. 试用事件的运算关系表示下列事件.

(1) 仅有乙未击中靶.

(2) 甲、乙至少一人击中而丙未击中靶子.

(3) 至少两人击中靶.

(4) 靶上仅中一弹.

解 (1) 仅有乙未击中靶：$A_1\overline{A}_2A_3$.

(2) 甲、乙至少一人击中而丙未击中靶子：$(A_1\cup A_2)\overline{A}_3$.

(3) 至少两人击中靶：$A_1A_2\cup A_2A_3\cup A_1A_3$.

(4) 靶上仅中一弹：$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

例 1.8 设 A，B，C 是某个试验中的 3 个事件，则

(1) 事件“A 与 B 发生，C 不发生”可表示为 $AB\overline{C}$.

(2) 事件“A，B，C 中至少有一个发生”可表示为 $A\cup B\cup C$.

(3) 事件“A，B，C 中至少有两个发生”可表示为 $AB\cup BC\cup AC$.

(4) 事件“A，B，C 中恰好发生两个”可表示为 $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$.

(5) 事件“A，B，C 中有不多于一个事件发生”可表示为

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C.$$

例 1.9 设有 3 个人各购买了一注福利彩票，以 A 表示“第一个人中奖”，B 表示“第二个人中奖”，C 表示“第三个人中奖”. 试用 A，B，C 表示下列事件.

(1) 至少有一个人中奖.

(2) 恰有一个人中奖.

(3) 至多有一个人中奖.

解 (1) $A\cup B\cup C$.

(2) 恰有一个人中奖是指其中有一个人中奖而另外两个人没中奖，即

$$A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C.$$

（3）至多有一个人中奖是指没有人中奖或恰有一个人中奖，即

$$A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C \cup \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}.$$

思考与讨论

1. 下列各式说明什么包含关系？

（1）$AB=B$.（2）$A+B=B$.（3）$A+B+C=C$.

2. 设有事件 A，B，C. 若 $C=A-B$，那么 C 与 A 有何关系？C 与 B 有何关系？

第二节　频率与概率

一、频率及其性质

一个随机试验有多个可能的结果，但人们在实践中常常发现，各种可能的结果出现的机会并不尽相同. 就是说，在多次重复试验中，有些结果出现的次数明显要多些，有些则要少些，它们具有统计规律性. 例如，我国人口中具有 O 型血的人数明显高于其他血型. 在生产实践中，了解和掌握事件发生的可能性大小具有重要意义. 例如，知道了某电话总机在 24h 内出现某些呼唤次数的可能性大小，就可以根据要求，合理地配置一定的线路设施以及管理人员等. 为了揭示这种规律性，我们在下面给出一个定量的描述.

定义 1.1　在 n 次重复试验中，若事件 A 发生了 k 次，则称 k 为事件 A 发生的频数，称 $\frac{k}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**（Frequency），记为

$$f_n(A) = \frac{k}{n}. \tag{1.3}$$

由定义，易知频率具有以下性质.

（1）$0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$.

（2）$f_n(\Omega) = 1$，$f_n(\varnothing) = 0$.

（3）若 A_1，A_2，…，A_r 为 r 个两两不相容事件，则

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{r} A_i) = \sum_{i=1}^{n} f_n(A_i).$$

这最后一条性质叫频率的有限可加性，它在定义概率时起到重要作用. 我们在这里仅就这一条性质给出一个简单证明.

设两事件 A，B 不相容，又设在 n 次试验中，A，B，$A\cup B$ 发生的频数分别为 n_A，n_B，$n_{A\cup B}$. 由于 A 与 B 不能同时发生，故有 $n_{A\cup B}=n_A+n_B$，从而

$$f_n(A \cup B) = \frac{n_{A\cup B}}{n} = \frac{n_A + n_B}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} = f_n(A) + f_n(B).$$

频率的大小反映了事件 A 发生的频繁程度. 频率越大则意味着事件在试验中发生

的可能性就越大．但是，用频率来表示一个事件发生的可能性的大小却是行不通的．这是因为频率具有波动性，即使在相同条件下重复做多个 n 次试验，其频率值亦可能大不相同．但是，人们在实践中发现，随着试验次数 n 的逐渐增加，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 总是围绕着某一个确定常数 p 稳定地摆动，n 越大，摆动的幅度会越小．这是一种统计规律，称为**频率的稳定性**（the Stability of Frequency）．请看下面“抛硬币”试验的实例，见表 1.2.

表 1.2

试验者	投掷次数（n）	出现正面次数（k）	出现正面的频率［$f_n(A)$］
德・摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
K・皮尔逊	12000	6019	0.5016
K・皮尔逊	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998

频率的稳定性说明随机事件发生的可能性大小，是其本身固有的客观属性，是一个客观存在，它不断地为人们的实践所证实．例如，多年医学研究表明：初生婴儿性别的数量比约为男：女＝1.06：1；我国人群中各血型人数比约为 O：A：B＝36.5%：27.5%：32.3%．又如，统计表明，汉语文献中，99%左右的用字出自 3000 余个常用汉字中，而其他汉字的使用频率约占 1%，英语也有类似的情况，字母 E、T、A 出现的频率要明显高于其他字母．因此，在实际生活中，人们常用统计频率作为概率的近似值.

二、概率的统计定义

定义 1.2　设在同一条件下重复进行的 n 次试验，事件 A 出现 m 次，若试验次数 n 足够大，频率稳定地在某一确定值 p 的附近摆动，则称 p 为事件 A 的**概率**（Probability），记为

$$P(A) = p.$$

此定义为**概率的统计定义**（the Statistical Definition of Probability）．概率的统计定义提供了求概率的近似方法，即当试验次数 n 足够大时，事件 A 的概率近似地等于事件 A 的频率．医学统计中，所谓患病率、死亡率、治愈率等就是指相应的频率，统计例数相当多时，也可理解为相应的概率，并用频率值来估计相应的概率值.

由概率的定义可知，概率具有下列性质

(1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

(2) $P(\Omega) = 1$，$P(\varnothing) = 0$.

对于一个给定的事件 A，概率 $P(A)$ 到底是一个什么数？怎么求？下面先对一种最简单的情况加以讨论.

三、概率的古典定义（古典概型）

在概率论的发展史上，人们最早研究的随机试验是“抛硬币、掷骰子”之类问题的概率计算．这些试验的共同特点如下．

（1）试验的所有可能结果只有 E_1，E_2，…，E_n 有限种，每次试验至少出现其中一种，即事件集合$\{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$具有完备性．

（2）事件 E_1，E_2，…，E_n 两两互不相容，即事件集合$\{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$具有互不相容性．

（3）事件 E_1，E_2，…，E_n 发生的可能性相等，即事件集合$\{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$具有等可能性．

具有这些特征的基本事件 E_1，E_2，…，E_n 称为等概基本事件组．

定义 1.3　设 E_1，E_2，…，E_n 是试验的等概基本事件组，其中事件 A 所包含的基本事件数为 m，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{\text{事件 }A\text{ 包含的基本事件数}}{\text{基本事件的总数}}=\frac{m}{n}. \tag{1.4}$$

这个定义称为**概率的古典定义**（the Classical Definition of Probability），亦称古典概型．古典概型的要点是：要确定等概基本事件组，并计算基本事件的总数；再计算所求事件包含的基本事件个数．在这些计算中，常要用到排列与组合公式，现举例如下．

例 1.10　设电话号码由 5 个数码组成，每个数码可以是 0，1，2，…，9 中的任一个．设 $A_1=$ “5 个数码全相同”，$A_2=$ “5 个数码全不相同”，$A_3=$ “5 个数码中有两个 3”，求这些事件的概率．

解　将每一可能的电话号码作为基本事件，它们可认为是等可能的．由于数码是可重复的，故基本事件总数为 10^5．

显然，A_1 中包含的基本事件数为 10，故

$$P(A_1)=\frac{10}{10^5}=\frac{1}{10^4}.$$

A_2 中包含的基本事件数为 $P_{10}^5=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6$，故

$$P(A_2)=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{10^5}=0.3024.$$

A_3 中包含的基本事件数为 $C_5^2\cdot 9^3$，这是因为数码 3 在电话号码中占两个位置的方法有 C_5^2 种，而其余 3 个数码中的每一个都可以从剩下的 9 个数码 0，1，2，4，…，9 中重复选取，有 9 种方法．故

$$P(A_3)=\frac{C_5^2\cdot 9^3}{10^5}=0.0729.$$

例 1.11　某人的生日恰好是星期天的概率是多少？如果他出生之年二月份有 28 天，试问他的生日是五月份的概率是多少？

解　任何人的生日在一周中的星期数都只有 7 种可能，以这 7 种星期数为生日分别是 7 个基本事件，即这 7 个事件构成的事件集合具有完备性、等可能性和互斥性．

“生日在星期日”是其中之一个基本事件，故事件“生日恰好是星期日”的概率是 1/7.

一年有 12 个月，但各个月份的天数是不尽相同的，故以各个不同月份为生日并非等可能的，因此不能认为“在五月份生日”的概率是 1/12. 他出生之年共 365 天，这 365 个结果构成的事件集合具有完备性、等可能性和互斥性. 故事件“在五月份生日”的概率是 31/365.

例 1.12 把 a 个黑球，b 个白球从袋中依次取出，求 $A=\{$第 k 个取到黑球$\}$ 的概率?

解 我们把 $a+b$ 个球排成一排，考虑第 k 个位置放黑球的概率.

方法 1 把 $a+b$ 个球排一排有 $(a+b)!$ 种排法. 为了在第 k 个位置上放黑球，可先从 a 个黑球中取 1 个放在该位置上，有 a 种放法，再把剩下的 $a+b-1$ 个球排成一排，有 $(a+b-1)!$ 种排法，故

$$P(A)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

方法 2 只需取 k 个球排成一排，有 P_{a+b}^{k} 种排法. 第 k 个位置放黑球有 a 种放法，从另外的 $a+b-1$ 个球中取 $k-1$ 个排成一排有 P_{a+b-1}^{k-1} 种排法，故

$$P(A)=\frac{aP_{a+b-1}^{k-1}}{P_{a+b}^{k}}=\frac{a}{a+b}.$$

方法 3 我们只关心 $a+b$ 个位置上哪些位置放黑球（而不管是第几号黑球），有 C_{a+b}^{a} 种情形，第 k 个位置放黑球有 C_{a+b-1}^{a-1} 种情形，故

$$P(A)=\frac{C_{a+b-1}^{a-1}}{C_{a+b}^{a}}=\frac{a}{a+b}.$$

方法 4 我们只关心第 k 个位置上放什么球，这 $a+b$ 个球都是有可能的，有 a 个球使该位置为黑球，故

$$P(A)=\frac{a}{a+b}.$$

这也是一个很典型的问题. 所得结果与 k 无关，这表明抽签的方法是合理的.

例 1.13 桥牌比赛中，4 人从 52 张牌中各分得 13 张，求 4 张 A 集中在一人手中的概率.

解 把 52 张牌平均分成 4 组，易知样本点总数为 $C_{52}^{13}C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}$. 又设 B 为所求事件，要 B 发生，可考虑从 4 人中任选出一人拿 4 张 A 再配上 9 张其他牌，然后把其余 39 张牌平均分成 3 组，从而得到

$$P(B)=\frac{C_4^1C_4^4C_{48}^{9}C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}}{C_{52}^{13}C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}}=\frac{4C_{48}^{9}}{C_{52}^{13}}=0.0106.$$

亦可以这样考虑：4 张 A 集中在特定一人手中的概率为 $C_4^4\cdot C_{48}^{9}/C_{52}^{13}$，从而 4 张 A 集中在一人手中的概率为

$$P(B)=4\,\frac{C_4^4C_{48}^{9}}{C_{52}^{13}}=0.0106.$$