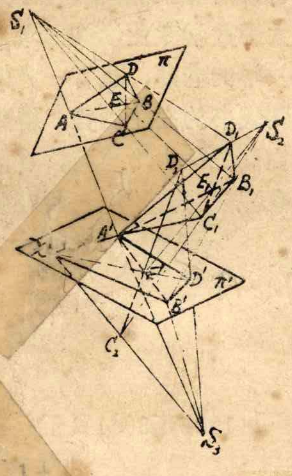
高等几何习题解答

周泉源编



安徽师范大学函授部

目　　录

* 第七章未配习题

第一章　正交变换与仿射变换

§1　点变换

（1）设φ_1，φ_2，…，φ_n是集合S的任何n个变换，证明不论如何乘，只要不改变φ_i的次序，则$\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_n$的结果是唯一的。

证：应用数学归纳法证明。

当$n=3$时，有$(\varphi_1\varphi_2)\varphi_3=\varphi_1(\varphi_2\varphi_3)$，结论成立。

设$n=k$时，结论成立，即不论如何结合，只要不改变φ_i的次序，$\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_k$的结果是唯一的。现证$n=k+1$时，结论亦必成立。

根据假设，可知，

$$(\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_k)\varphi_{k+1}=[(\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_j)(\varphi_{j+1}\cdots\varphi_k)]\varphi_{k+1}\quad(1\leqslant j\leqslant k)$$

$$=(\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_j)(\varphi_{j+1}\cdots\varphi_k\varphi_{k+1})。$$

（2）设φ_1，φ_2是集合S的两个变换，证明$(\varphi_1\varphi_2)^{-1}=\varphi_2^{-1}\varphi_1^{-1}$。

证一：$\because(\varphi_1\varphi_2)(\varphi_1\varphi_2)^{-1}=\varepsilon$，

又$(\varphi_1\varphi_2)(\varphi_2^{-1}\varphi_1^{-1})=\varphi_1(\varphi_2\varphi_2^{-1})\varphi_1^{-1}=\varphi_1\varphi_1^{-1}=\varepsilon$，所以$(\varphi_1\varphi_2)^{-1}$和$\varphi_2^{-1}\varphi_1^{-1}$都是方程$(\varphi_1\varphi_2)x=\varepsilon$的解，由解的唯一性，得知：

$(\varphi_1\varphi_2)^{-1}=\varphi_2^{-1}\varphi_1^{-1}$。

证二：设φ_1：$A\to B$　　φ_2：$B\to C$

则　　φ_1^{-1}：$B\to A$，φ_2^{-1}：$C\to B$。

∴　$\varphi_1\varphi_2$：$A\to C$，$(\varphi_1\varphi_2)^{-1}$：$C\to A$，$\varphi_2^{-1}\varphi_1^{-1}$：$C\to A$

故知　　$(\varphi_1\varphi_2)^{-1}=\varphi_2^{-1}\varphi_1^{-1}$。

（3）设φ是m与m'之间的一一对应，M是m的一个元，问$\varphi^{-1}[\varphi(M)]=$？　$\varphi[\varphi^{-1}(M)]=$？若$\varphi$是$m$的变换，此二问题的答案如何？

解：∵$\varphi(M)=M'$　　$\varphi^{-1}(M')=M$，

∴$\varphi^{-1}[\varphi(M)]=\varphi^{-1}(M')=M$。

∵$M\overline{\in}m'$（“$\overline{\in}$”表示“不属于”）∴$\varphi^{-1}(M)$无意义，故$\varphi[\varphi^{-1}(M)]$无意义。

若φ是m的变换，则$\varphi^{-1}(M)=M'$，$\varphi(M')=M$，

∴　$\varphi^{-1}[\varphi(M)]=\varphi^{-1}(M')=M$，

$\varphi[\varphi^{-1}(M)]=\varphi(M')=M$。

§2　正交变换

（1）1°　求将（2，3）变为(0，-1)的平移变换，再将所得变换用于抛物线$y^2-x-8y+18=0$上。

2°求将(3，1)变为(-1，3)的绕原点的旋转变换，再将所得变换用于$y^2-x-8y+18=0$上。

解：1°　设所求平移变换为$\begin{cases}x'=x+a\\ y'=y+b,\end{cases}$

则　　$a=-2$，$b=-4$。

所求平移变换为：$\begin{cases}x'=x-2\\ y'=y-4\end{cases}$或$\begin{cases}x=x'+2\\ y=y'+4。\end{cases}$将此变换用

于所给的抛物线，则得变换后的曲线方程为：$y'^2 - x' = 0$。

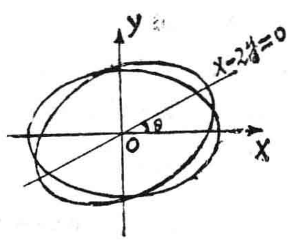
2° 设所求旋转变换为：$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta, \end{cases}$

则 $\theta = \pi/2$。

所求旋转变换为 $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = y' \\ y = -x', \end{cases}$ 将此变换用于所给抛物线则得变换后的曲线方程为：

$$x'^2 + 8x' - y' + 18 = 0.$$

（2）求中心在原点，半轴为3和2并以直线$x-2y=0$为贯轴的椭圆方程。



解：中心在原点，半轴为3和2，且以x轴为贯轴（长轴）的椭圆方程为 $x^2/9 + y^2/4 = 1$ （1）

将x轴绕原点旋转到直线$x-2y=0$，则旋转角θ为 $\mathrm{tg}\theta = 1/2$，$\sin\theta = 1/\sqrt{5}$，$\cos\theta = 2/\sqrt{5}$。

故知旋转变换式为：

$$\begin{cases} x' = (2x - y)/\sqrt{5} \\ y' = (x + 2y)/\sqrt{5} \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = (2x' + y')/\sqrt{5} \\ y = (-x' + 2y')/\sqrt{5} \end{cases}$$

代入椭圆方程（1）便得所求的椭圆方程为

$$5x'^2 - 4x'y' + 8y'^2 - 36 = 0$$

（3）先用几何法，再用代数法证明。一直线绕一点旋转θ角，则此直线与新直线所成角为θ。

证：几何法。过定点P_0作$P_0N \perp l$于N，将P_0N绕P_0旋转θ角，得P_0N'，过N'作垂直于P_0N'的直线l'，则l'

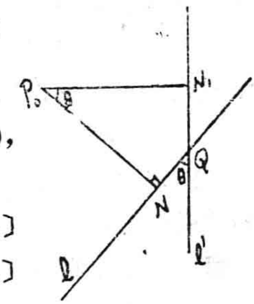
即为 l 绕 P_0 旋转 θ 角所得的新直线。

设 l 与 l' 交于 Q，则因 $\angle P_0NQ=\angle P_0N'Q=\pi/2$，故知

$$\angle(l,\ l')=\angle NP_0N'=\theta.$$

代数法：设定点为 $P_0(x_0,y_0)$，则绕 P_0 旋转 θ 角的变换公式为：

$$\begin{cases} x'-x_0=(x-x_0)\cos\theta-(y-y_0)\sin\theta \\ y'-y_0=(x-x_0\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta. \end{cases}$$



设 l' 的方程为：$a'x'+b'y'+c'=0$，

则 l 的方程便是：

$$a'[(x-x_0)\cos\theta-(y-y_0)\sin\theta+x_0]$$
$$+b'[(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta+y_0]$$
$$+C'=0.$$

即 $(a'\cos\theta+b'\sin\theta)x+(-a'\sin\theta+$

（图 2）

$b'\cos\theta)y+C^*=0$ （C^*是常数）

$$\therefore \mathrm{tg}\angle(l,l')=\frac{\dfrac{a'\cos\theta+b'\sin\theta}{a'\sin\theta-b'\cos\theta}+\dfrac{a'}{b'}}{1-\dfrac{a'\cos\theta+b'\sin\theta}{a'\sin\theta-b'\cos\theta}\cdot\dfrac{a'}{b'}}=\frac{a'^2\sin\theta+b'^2\sin\theta}{-a'^2\cos\theta-b'^2\cos\theta}$$

$$=-\mathrm{tg}\theta.$$

$|\mathrm{tg}\angle(l,\ l')|=|\mathrm{tg}\theta|$，$\therefore\angle(l,\ l')=\theta$.

（4）求证：三角形面积经过正交变换后不变。

证：平面上任意正交变换公式为

$$\begin{cases} x'=x\cos\theta-\varepsilon y\sin\theta+a \\ y'=x\sin\theta+\varepsilon y\cos\theta+b \end{cases}\qquad \varepsilon=\pm1.$$

设$\triangle ABC$的各顶点坐标为$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ $C(x_3, y_3)$。经过正交变换后所得$\triangle A'B'C'$的各顶点坐标为$A'(x_1', y_1')$，$B'(x_2' y_2')$，$C'(x_3' y_3')$，则

$$2S_{\triangle A'B'C'} = \begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix} \text{的绝对值。}$$

$$\because \begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1\cos\theta-\varepsilon y_1\sin\theta+a & x_1\sin\theta+\varepsilon y_1\cos\theta+b \\ x_2\cos\theta-\varepsilon y_2\sin\theta+a & x_2\sin\theta+\varepsilon y_2\cos\theta+b \\ x_3\cos\theta-\varepsilon y_3\sin\theta+a & x_3\sin\theta+\varepsilon y_3\cos\theta+b \end{vmatrix}$$

$$= \varepsilon\cos^2\theta \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} - \varepsilon\sin^2\theta \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \varepsilon \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\therefore 2S_{\triangle A'B'C'} = \begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix} \text{的绝对值} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

的绝对值$=2S_{\triangle ABC}$。

（5）求以直线 $ax+by+c=0(a^2+b^2\neq0)$ 为轴的轴反射变换公式。

解：设平面上任一点$P(x,\ y)$，经过轴反射后的对应点为$P'(x',\ y')$，则

$$\begin{cases} b(x-x')-a(y-y')=0 & (\because pp'\perp l) \\ ax+by+c=-(ax'+by'+c). & (\because p,p'\text{在}l\text{的两侧}) \end{cases}$$

$\because a^2+b^2\neq0$，解出 x'、y' 便得

$$\begin{cases} x'=[(b^2-a^2)x-2aby-2ac]/(a^2+b^2) \\ y'=[-2abx+(a^2-b^2)y-2bc]/(a^2+b^2). \end{cases}$$

此即所求之轴反射变换公式。

（6）求证：1°两个平移的乘积一定是可以交换的。

2°绕原点的两个旋转的乘积一定是可以交换的。

证：1°，设有二平移变换为

$$T_1:\begin{cases} x'=x+a \\ y'=y+b, \end{cases}\qquad T_2:\begin{cases} x'=x+c \\ y'=y+d \end{cases}$$

则 $$T_1\cdot T_2:\begin{cases} x''=x+c+a \\ y''=y+d+b, \end{cases}$$

$$T_2\cdot T_1:\begin{cases} x''=x+a+c \\ y''=y+b+d, \end{cases}$$

$\therefore$ $$T_1\cdot T_2=T_2\cdot T_1.$$

2°，设绕原点的两个旋转为

$$T_1:\begin{cases}x' = x\cos\theta_1 - y\sin\theta_1\\ y' = x\sin\theta_1 + y\cos\theta_1\end{cases} \quad T_2:\begin{cases}x' = x\cos\theta_2 - y\sin\theta_2\\ y' = x\sin\theta_2 + y\cos\theta_2,\end{cases}$$

则 $$T_1\cdot T_2\begin{cases}x'' = (x\cos\theta_2 - y\sin\theta_2)\cos\theta_1 - (x\sin\theta_2 + \\ y\cos\theta_2)\sin\theta_1\\ y'' = (x\cos\theta_2 - y\sin\theta_2)\sin\theta_1 + (x\sin\theta_2 + \\ y\cos\theta_2)\cos\theta_1,\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}x'' = x\cos(\theta_1+\theta_2) - y\sin(\theta_1+\theta_2)\\ y'' = x\sin(\theta_1+\theta_2) + y\cos(\theta_1+\theta_2).\end{cases}$$

同理 $$T_2\cdot T_1:\begin{cases}x'' = x\cos(\theta_1+\theta_2) - y\sin(\theta_1+\theta_2)\\ y'' = x\sin(\theta_1+\theta_2) + y\cos(\theta_1+\theta_2).\end{cases}$$

$$\therefore \qquad T_1\cdot T_2 = T_2\cdot T_1$$

(7)是否有某个平移和某个旋转的乘积是可以交换的?

解. 设有某个平移T_1和某个旋转T_2:

$$T_1:\begin{cases}x' = x + a\\ y' = y + b,\end{cases}$$

$$T_2:\begin{cases}x' = (x - x_0)\cos\theta - (y - y_0)\sin\theta + x_0\\ y' = (x - x_0)\sin\theta + (y - y_0)\cos\theta + y_0,\end{cases}$$

则 $$T_1\cdot T_2:\begin{cases}x'' = (x - x_0)\cos\theta - (y - y_0)\sin\theta + x_0 + a\\ y'' = (x - x_0)\sin\theta + (y - y_0)\cos\theta + y_0 + b,\end{cases}$$

$$T_2\cdot T_1:\begin{cases}x'' = (x + a - x_0)\cos\theta - (y + b - y_0)\sin\theta + x_0\\ y'' = (x + a - x_0)\sin\theta + (y + b - y_0)\cos\theta + y_0.\end{cases}$$

即 $\begin{cases} x'' = (x-x_0)\cos\theta-(y-y_0)\sin\theta+(a\cos\theta-b\sin\theta+x_0) \\ y'' = (x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta+(a\sin\theta+b\cos\theta+y_0). \end{cases}$

假定 $T_1 \cdot T_2 = T_2 \cdot T_1$，则需且只需

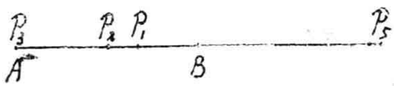
$\begin{cases} a = a\cos\theta - b\sin\theta \\ b = a\sin\theta + b\cos\theta. \end{cases}$ 即$\cos\theta = 1, \sin\theta = 0$,或$a = b = 0$。

所以除去恒等变换与平移或恒等变换与旋转外，一般的平移与旋转的乘积是不可互换的。

§3 仿射变换

（1）已知两基点A, B，求作分点P使(ABP)分别等于-2，-1，0，1，2，问那些是不可能的？

解：对应单比值为-2，-1，0，2的分点，如图为P_1，P_2，P_3，P_5。



（图3）

在欧氏平面上（ABP）$=1$为不可能（$P\to\infty$）。

（2）在仿射对应的定义里，如果

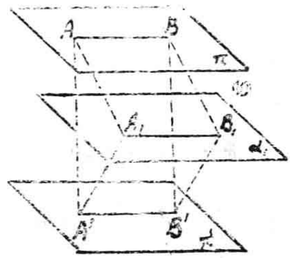
1° $\pi /\!/ \alpha_1 /\!/ \cdots /\!/ \alpha_{n-1} /\!/ \pi'$ 或2° π'，$\alpha_1, \cdots$，α_{n-1}，π' 共线。

求证：π到π'的仿射对应是透视仿射对应。

证：1° 只需就三个平面π，α_1，π' 的情形证明即可。

设$\pi /\!/ \alpha_1 /\!/ \pi'$，$A$，$B$是$\pi$上任意二点，经过透视仿射对

应得到α_1上对应点A_1，B_1，再一次透视仿射对应得到π'上对应点$A'B'$。



（图4）

$\because$ $AB \underline{\parallel} A_1B_1$，$A_1B_1 \underline{\parallel} A'B'$，

$\therefore AB \underline{\parallel} A'B'$。

故知 $AA' \parallel BB'$，

π到π'的对应为透视仿射对应。

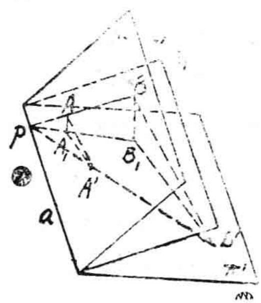
2° 设π，α_1，π'交于a，

若 $AB \parallel a$，则 $AB \underline{\parallel} A_1B_1 \underline{\parallel} A'B'$，

$\therefore$ $AA' \parallel BB'$

若AB交a于P，则A_1B_1，

$A'B'$也交a于P。



由 $(ABP)=(A_1B_1P)=(A'B'P)$，

即 $\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{PA'}{PB'}$。

$\therefore$ $AA' \parallel BB'$。π到π'为透视仿射对应。 （图5）

（3）求使三点（0，0），（1，1），（1，-1）变到三点（2，3）（2，5）（3，-7）的仿射变换。

解：设所求的仿射变换式为：$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1 \\ y' = a_2x + b_2y + c_2, \end{cases}$

则由题设条件得 $c_1=2, c_2=3, a_1+b_1+c_1=2$，$a_1-b_1+c_1=3$，

$a_2+b_2+c_2=5, a_2-b_2+c_2=-7$。由此便得

$$\begin{cases} a_1+b_1=0 \\ a_1-b_1=1, \end{cases} \quad \begin{cases} a_2+b_2=2 \\ a_2-b_2=-10, \end{cases}$$

$\therefore$ $a_1=1/2$，$b_1=-1/2$，$a_2=-4$，$b_2=6$。

故所求仿射变换为 $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 2 \\ y' = -4x + 6y + 3. \end{cases}$

（4）求使直线 $x=0$，$y=0$，$x+2y-1=0$ 分别变为直线 $x+y=0$，$x-y=0$，$x+2y-1=0$ 的仿射变换。

解：设所求仿射变换为 $\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1 \\ y' = a_2x + b_2y + c_2, \end{cases}$

则 $x' + y' = (a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)y + (c_1 + c_2)$，

$x' - y' = (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2)$，

$x' + 2y' - 1 = (a_1 + 2a_2)x + (b_1 + 2b_2)y + (c_1 + 2c_2 - 1)$。

$\because$ $x = 0 \to x' + y' = 0$，$\therefore$ $b_1 + b_2 = 0$，$c_1 + c_2 = 0$。

$y = 0 \to x' - y' = 0$，$\therefore$ $a_1 - a_2 = 0$，$c_1 - c_2 = 0$。

$x + 2y - 1 = 0 \to x' + 2y' - 1 = 0$ $\therefore$ $a_1 + 2a_2 = \lambda$，

$b_1 + 2b_2 = \lambda$ $\quad c_1 + 2c_2 - 1 = -\lambda$。

解出 $\lambda = 1$。$\therefore a_1 = a_2 = 1/3, b_1 = -b_2 = -2$，$c_1 = c_2 = 0$。

故所求的仿射变换为：

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x - 2y \\ y' = \frac{1}{3}x + 2y. \end{cases}$$

（5）求仿射变换使两直线 $a_1x + b_1y + c_1 = 0$，$a_2x + b_2y + c_2 = 0$（其中 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$）分别变为 y 轴，x 轴，且使不在两直线上的一点（x_0，y_0）变为（1，1）。

解一：根据题给条件，可直接得知所求的仿射变换为：

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{a_1x_0 + b_1y_0 + c_1}(a_1x + b_1y + c_1) \\ y' = \dfrac{1}{a_2x_0 + b_2y_0 + c_2}(a_2x + b_2y + c_2). \end{cases}$$

事实上，此变换使直线 $a_1x+b_1y+c_1=0 \to x'=0$，$a_2x+b_2y+c_2=0\to y'=0$ 且使点 $(x_0,\ y_0)\to(1,\ 1)$。又因为 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$，$a_1x_0+b_1y_0+c_1\neq 0$，$a_2x_0+b_2y_0+c_2\neq 0$。

故知

$$\begin{vmatrix} \dfrac{a_1}{a_1x_0+b_1y_0+c_1} & \dfrac{b_1}{a_1x_0+b_1y_0+c_1} \\ \dfrac{a_2}{a_2x_0+b_2y_0+c_2} & \dfrac{b_2}{a_2x_0+b_2y_0+c_2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

所以这变换为所求的仿射变换。

解二：设所求仿射变换为 $\begin{cases} x'=a_{11}x+a_{12}y+a_{13} \\ y'=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}, \end{cases}$

则 $a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0$ 与 $a_1x+b_1y+c_1=0$ 表示同一直线。所以 $a_{11}=\lambda a_1$，$a_{12}=\lambda b_1$，$a_{13}=\lambda c_1$。

同理 $a_{21}=\mu a_2$，$a_{22}=\mu b_2$，$a_{23}=\mu c_2$。

又 $a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}=1$，$a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}=1$，

$$\therefore \quad \lambda=\frac{1}{a_1x_0+b_1y_0+c_1}, \quad \mu=\frac{1}{a_2x_0+b_2y_0+c_2}.$$

故所求仿射变换为

$$\begin{cases} x'=\dfrac{1}{a_1x_0+b_1y_0+c_1}(a_1x+b_1y+c_1) \\ y'=\dfrac{1}{a_2x_0+b_2y_0+c_2}(a_2x+b_2y+c_2). \end{cases}$$

（6）求仿射变换使直线 $x+2y-1=0$ 上的每个点都不变，且使点 $(1,\ -1)$ 变为 $(-1,\ 2)$。

解一：设所求仿射变换为 $\begin{cases} x'=a_1x+b_1y+c_1 \\ y'=a_2x+b_2y+c_2. \end{cases}$

在已知直线上取二点，例如（1，0），（3，－1）。在仿射变换下，此二点不变，故 $a_1+c_1=1$，$a_2+c_2=0$。

$$3a_1-b_1+c_1=3,\ 3a_2-b_2+c_2=-1.$$

又 $\quad a_1-b_1+c_1=-1$，$a_2-b_2+c_2=2$，

解出：$a_1=2, b_1=2, c_1=-1, a_2=-3/2, b_2=-2, c_2=3/2$。

故所求的仿射变换为：

$$\begin{cases} x'=2x+2y-1 \\ y'=-3x/2-2y+3/2. \end{cases}$$

解二：设所求的仿射变换为：

$$\begin{cases} x'=a_1x+b_1y+c_1 \\ y'=a_2x+b_2y+c_2, \end{cases}$$

并设（x，y）为变换的不变点，则有

$$\begin{cases} (a_1-1)x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+(b_2-1)y+c_2=0. \end{cases}$$

因为直线 $x+2y-1=0$ 上的一切点都不变，故知

$$(a_1-1):a_2:1=b_1:(b_2-1):2=c_1:c_2:-1,$$

令 $\quad a_1-1=\lambda,\ b_1=2\lambda,\quad c_1=-\lambda.$

$\quad a_2=\mu,\quad b_2-1=2\mu,\quad c_2=-\mu.$

再由 $\quad a_1-b_1+c_1=\lambda+1-2\lambda-\lambda=-1,\ \therefore\lambda=1,$

$\quad a_2-b_2+c_2=\mu-2\mu-1-\mu=2,\quad \therefore\mu=-3/2.$

故 $\quad a_1=2,\ b_1=2,\ c_1=-1,\ a_2=-3/2,\ b_2=-2,$

$\quad c_2=3/2.$

所求仿射变换为 $\begin{cases} x'=2x+y-1 \\ y'=-3x/2-2y+3/2. \end{cases}$

（7）求仿射变换$\begin{cases} x' = 7x - y + 1 \\ y' = 4x + 2y + 4 \end{cases}$的不变直线。

解：设所求的不变直线是 $ax + by + c = 0$ 则

$$ax' + by' + c = (7a + 4b)x + (-a + 2b)y + (a + 4b + c).$$

因 $ax' + by' + c = 0$ 与 $ax + by + c = 0$ 表示同一直线，故有

$$\begin{cases} 7a + 4b = \lambda a \\ -a + 2b = \lambda b \\ a + 4b + c = \lambda c \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} (7 - \lambda)a + 4b = 0 \\ -a + (2 - \lambda)b = 0 \\ a + 4b + (1 - \lambda)c = 0. \end{cases}$$

$\because$ a、b、c 不全为零，故得

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad 解出\ \lambda = 1,\ 3,\ 6.$$

当 $\lambda = 1$ 时，方程组恒有非零解$(0, 0, k)$，但对应的不变直线不存在。（$\because a^2 + b^2 = 0$）

当 $\lambda = 3$时，方程组有非零解 $a = -b$，$c = 3b/2$，故得不变直线 $2x - 2y - 3 = 0$。

当 $\lambda = 6$时，方程组有非零解 $a = -4b$，$c = 0$，故得不变直线 $4x - y = 0$。

（8）求证：在仿射变换下，两个不变点的连线上的任何点都不变。

证一：设仿射变换为：$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 \end{cases}$

点(x_1, y_1) (x_2, y_2)是两个不变点，令P(x, y)是这两点连线上的任一点，则有

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

于是 $x'=a_1x+b_1y+c_1=a_1\cdot\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}+b_1\cdot\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}+c_1$

$$=\frac{1}{1+\lambda}[(a_1x_1+b_1y_1+c_1)+\lambda(a_1x_2+b_1y_2+c_1)]$$

$$=\frac{1}{1+\lambda}\{[(a_1-1)x_1+b_1y_1+c_1]+\lambda[(a_1-1)x_2+b_1y_2+c_1]\}$$

$$+\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$$

$$=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=x.$$

同理　　$y'=y$。

故二不变点连线上的任一点都是不变点。

证二：设在仿射变换下，A、B是二不变点，即$A\to A$，$B\to B$。

令C'是直线AB上任一点，假定在仿射变换下，$C\to C'$，因为仿射变换具有结合性，故A、B、C、C'共线，且有$(ABC)=(ABC')$。$C'\equiv C$　即AB上每一点都不变。

（9）问在仿射变换下，菱形有哪些性质保持不变？

解：在仿射变换下，菱形保持不变的性质有：（1）对边平行；（2）对角线互相平分。（对边相等由（1）可导出）。

因此在仿射变换下，菱形变成平行四边形。

（10）下列图形的仿射对应图形各是什么？

1°　平行四边形，2°　梯形，3°　等腰三角形，4°　两个全等的矩形，5°　三角形的内心。

解：1°平行四边形→平行四边形。