

高等院校精品课程建设教材

高等数学

及其思想方法与实验

GAODENG SHUXUE

JIQI SIXIANG FANGFA YU SHIYAN

吴炯圻 陈跃辉 唐振松 编著

(上册)



厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS

国家一级出版社
全国百佳图书出版单位

013/730

:1

2013

高等院校精品课程建设教材

高等数学

及其思想方法与实验

(上册)

吴炯圻 陈跃辉 唐振松 编著

北方工业大学图书馆



C00332127



厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS

国家一级出版社
全国百佳图书出版单位

图书在版编目(CIP)数据

高等数学及其思想方法与实验.上册/吴炯圻,陈跃辉,唐振松编著. —厦门:
厦门大学出版社,2013.5

ISBN 978-7-5615-4586-7

I. ①高… II. ①吴…②陈…③唐… III. ①高等数学-高等学校-教学参考资料

IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 059663 号

厦门大学出版社出版发行

(地址:厦门市软件园二期望海路 39 号 邮编:361008)

<http://www.xmupress.com>

xmup@xmupress.com

沙县方圆印刷有限公司印刷

2013 年 5 月第 1 版 2013 年 5 月第 1 次印刷

开本:720×970 1/16 印张:22 插页:2

字数:383 千字 印数:1~3 000 册

定价:32.00 元

本书如有印装质量问题请直接寄承印厂调换

内容简介

本书以数学思想方法为指导,阐述微积分学的基本内容、基本方法和有关应用,分为上、下两册。上册(1—6章)包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用和微分方程;下册(7—11章)包括空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分和无穷级数。各章均附有数学实验和思想方法选讲各一节,书末附有各章习题的参考答案。此外,上册书末还附有几种常用曲线、积分表、Mathematica 的使用简介。

本书适用于一般理工科、经济、管理各专业学习高等数学课程的学生,也可供其他专业的师生教学参考。

前 言

本套《高等数学》教材是福建省教育厅高校精品课程立项建设的一个成果,是我校长期开设这门课程的经验总结,凝聚了校内、外许多老师多年辛勤劳动的心血。

全书以数学思想方法为指导,阐述微积分学的基本内容、基本方法和有关应用,分为上下两册。上册(1—6章)包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用和微分方程;下册(7—11章)包括空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分和无穷级数。各章均附有数学实验和思想方法选讲各一节,书末还附有几种常用曲线、积分表、Mathematica 的使用简介与各章习题的参考答案。

本书适用于一般理工科、经济、管理各专业学习高等数学课程的学生(少课时的专业对教材中附上星号*的章节可以选用或不用),也可供其他专业的师生教学参考。

本书的特点是:

1. 顺应现代教育思想的潮流和教育观念的变革,适合素质教育的推进,突出数学思想方法的作用。在讲授数学的内容时,重视概念引入的背景和应用意识的培养,重视提出问题和解决问题的思路的启发,重视数学思想的渗透与基本数学方法的训练;此外,每章最后一节都结合该章的数学知识有系统地讲解数学思想方法,旨在帮助读者进一步加深对数学原理及其思想方法的理解、适当了解相关的数学历史事件和当今的发展信息,开阔视野、增加学习兴趣。

2. 在教学内容上,在保证达到“高等数学课程教学大纲”要求的前提下,努力吸收当前一些教材改革中的成功举措,融合多所高校先进的教学经验;注意文理渗透,体现微积分基本思想在理、工、经、管等领域中的应用。为了加强应用意识和创新能力的培养,每章附有一节数学实验,用于指导读者通过上机实验,验证公式、建立数学模型、学习计算方法。

3. 继承传统教材结构严谨、逻辑清晰的优点,做到突出重点、抓住关键;尽可能保证理论完整、推理严密,又力求通俗易懂、便于自学;同时还注意到各类读者对这一课程的不同需要。

本书由吴炯圻教授(2003年福建省高等学校教学名师奖获得者)、副院长

陈跃辉、高等数学教研室主任唐振松副教授编著。具体地,各章的数学实验和思想方法选讲分别由陈跃辉和吴炯圻编写;第2、3、4、5和9章的编写主要由唐振松负责;第10、11章主要由陈跃辉负责;第1、6、7、8章及全书的文字统一处理工作主要由吴炯圻负责。

我校校长李进金教授(2007年福建省高等学校教学名师奖获得者)对《高等数学》课程建设和本教材的编写非常关心和支持;王桂芳教授、邱宜坪教授和许多同事对本书的早期版本提出了宝贵的意见与建议;李克典教授对本书下册的修改稿提出了许多重要的意见与建议。谨此向他们表示衷心的感谢。

本书较多地参考了李进金教授主编的《高等数学》教材,也参考了国内多部优秀的同类教材。除了在书末列出这些参考文献之外,我们在此向这些文献的作者们致以诚挚的谢意。

同时,我们向支持本书编写、试用和出版的各单位有关领导和广大师生致谢。

本书自2007年出版以来,得到许多同行专家的高度评价,谨此向他们表示衷心感谢。这次重印之前,我们作了进一步完善,主要是纠正一些笔误和打印错误。限于编著者的学识、水平和能力,书中可能仍有不足与错漏之处,欢迎使用本书的老师和读者不吝指正。

编著者

于闽南师范大学数学与统计学院
2013年5月

目 录

第一章 函数与极限	(1)
§ 1.1 函 数	(1)
§ 1.2 极 限	(17)
§ 1.3 极限运算法则	(26)
§ 1.4 极限存在准则、两个重要极限	(30)
§ 1.5 无穷小与无穷大、无穷小的比较	(34)
§ 1.6 函数的连续性	(40)
§ 1.7 闭区间上连续函数的性质	(48)
§ 1.8* 数学实验	(51)
§ 1.9* 极限与连续思想方法选讲	(56)
第二章 导数与微分	(63)
§ 2.1 导数的概念	(63)
§ 2.2 函数的求导法则	(71)
§ 2.3 高阶导数	(79)
§ 2.4 隐函数与参数方程所确定的函数的导数	(84)
§ 2.5 函数的微分	(89)
§ 2.6* 数学实验	(99)
§ 2.7* 导数与微分思想方法选讲	(102)
第三章 微分中值定理与导数的应用	(110)
§ 3.1 微分中值定理	(110)
§ 3.2 洛必达法则	(117)
§ 3.3 泰勒公式	(122)
§ 3.4 函数的单调性与曲线的凹凸性	(127)
§ 3.5 函数的极值与最大值最小值	(132)
§ 3.6 函数图形的描绘	(138)
§ 3.7* 数学实验	(142)
§ 3.8* 微分中值定理与导数应用的思想方法选讲	(145)

第四章 不定积分	(155)
§ 4.1 不定积分的概念与性质	(155)
§ 4.2 换元积分法	(161)
§ 4.3 分部积分法	(173)
§ 4.4 有理函数的积分	(178)
§ 4.5* 数学实验	(186)
§ 4.6* 不定积分思想方法与化归法选讲	(187)
第五章 定积分及其应用	(195)
§ 5.1 定积分的概念和性质	(196)
§ 5.2 微积分的基本定理	(204)
§ 5.3 定积分的计算	(209)
§ 5.4 广义积分	(216)
§ 5.5 定积分在几何上的应用	(224)
§ 5.6 定积分在物理和经济上的应用举例	(235)
§ 5.7* 数学实验	(240)
§ 5.8* 定积分思想方法选讲	(242)
第六章 微分方程	(249)
§ 6.1 微分方程的基本概念	(249)
§ 6.2 可分离变量方程与齐次方程	(254)
§ 6.3 一阶线性微分方程	(261)
§ 6.4 可用降阶法求解的高阶方程	(265)
§ 6.5 二阶线性微分方程解的结构	(269)
§ 6.6 二阶常系数齐次线性方程	(273)
§ 6.7 二阶常系数非齐次线性方程	(276)
§ 6.8 二阶线性微分方程的应用	(281)
§ 6.9* 数学实验	(286)
§ 6.10* 微分方程思想方法选讲	(287)
附录 1 几种常用曲线	(295)
附录 2 积分表	(298)
附录 3 Mathematica 5.0 使用简介	(309)
习题参考答案(上册)	(328)
参考书目	(345)

第一章

函数与极限

函数是微积分的主要研究对象;极限理论和方法是微积分的理论基础和基本工具. 因此,理解与掌握极限思想方法是学好微积分的关键. 本章主要介绍极限和函数的连续性等基本概念及其性质.

§ 1.1 函 数

本节主要复习中学已经学习过的函数概念和它的基本性质. 在这之前,先简要介绍集合论和拓扑学中的一些基本概念. 实际上,这两门学科已经成为现代数学的基础.

§ 1.1.1 集合

1. 集合的基本概念与运算

集合(简称为集)是数学的一个基本概念,在现代数学中起着非常重要的作用. 当研究范围明确时,集合通常理解为具有某种性质的事物的全体. 集合中的每一个事物都被称为该集合的一个元素. 某事物 a 与集合 E 具有下列两种关系之一:

(1) a 是 E 的元素,记作 $a \in E$; (2) a 不是 E 的元素,记作 $a \notin E$.

由有限个元素组成的集合,可将它的元素一一列举出来. 这种表示法称为枚举法. 例如,由元素 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 组成的集合 A ,记作

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

对于一般的集合,通常采用性质描述法表示:设 E 是具有性质 P 的元素 x 的全体所组成的集合,就记作

$$E = \{x \mid x \text{ 具有性质 } P\} \text{ 或 } E = \{x \mid P(x)\}.$$

通常,以 $\mathbf{Z}$ 、 $\mathbf{Q}$ 、 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 分别表示整数集、有理数集、实数集和复数集.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,即若 $x \in A$,则必有 $x \in B$,就称 A 是 B 的子集,记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$.

如果 $A \subseteq B$ 与 $A \supseteq B$ 同时成立,则称 A 与 B 相等,记作 $A = B$. 例如,设有集合 $A = \{-1, -2\}$, $B = \{x \mid x^2 + 3x + 2 = 0\}$,则 $A = B$. 若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq$

B , 则称 A 是 B 的真子集, 记作 $A \subset B$. 例如 $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

不含任何元素的集合称为空集, 记作 $\emptyset$. 如集合

$$\{x \mid x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 = 0\} = \emptyset.$$

规定空集是任意集 A 的子集, 即 $\emptyset \subseteq A$.

集合的基本运算有并、交、差.

设 A 和 B 是两个集合, 由 A 和 B 的所有元素构成的集合, 称为 A 与 B 的并, 记为 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

由 A 和 B 的所有公共元素构成的集合, 称为 A 与 B 的交, 记为 $A \cap B$, 即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

由属于 A 而不属于 B 的所有元素构成的集合, 称为 A 与 B 的差, 记为 $A \setminus B$, 即

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

如果在某个过程中, 我们所研究的对象同属于某一个集合 S , 那么这个集合称为全集或基础集. 本书在一般情况下用实数集 $\mathbf{R}$ 当全集.

一般地, 设 A 是全集 S 的子集, 那么 S 中不属于 A 的元素全体组成的集合称为 A 的余集, 记为 $\bar{A}$, 即

$$\bar{A} = S \setminus A.$$

例如, 对于全集 $\mathbf{R}$, 子集 $A = \{x \mid 0 \leq x < 1\}$ 的余集就是

$$\bar{A} = \mathbf{R} \setminus A = \{x \mid x < 0 \text{ 或 } x \geq 1\}.$$

2. 邻域、开集、闭集、区间

对于实数 a 及正数 δ , 数集 $\{x \mid |x - a| < \delta\}$ 称为 a 的 (以点 a 为中心、以 δ 为半径的) δ 邻域, 记作 $U(a, \delta)$, 即 $U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\}$; 而 $\{x \mid a - \delta < x \leq a\}$ 和 $\{x \mid a \leq x < a + \delta\}$ 分别称为 a 的左 δ 邻域和右 δ 邻域, 如图 1-1-1 所示.

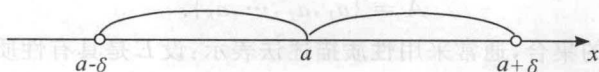


图 1-1-1

数集 $\{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$ 称为点 a 的去心 δ 邻域, 记为 $\mathring{U}(a, \delta)$. 当不强调 δ 的大小时, a 的 δ 邻域和 δ 去心邻域分别简称为 a 的邻域和去心邻域, 并分别记作 $U(a)$ 和 $\mathring{U}(a)$. 左、右 δ 邻域也有类似的简称.

设 a 与 b 是两个不同的实数, 且 $a < b$, 数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 称为开区间, 记

作 (a, b) , 即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\},$$

其中 a 与 b 称为开区间 (a, b) 的端点.

因此, 邻域是一个以 a 为中心的开区间, 即 $U(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta)$.

数集 $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间, 记作 $[a, b]$, 即

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\},$$

其中 a 与 b 称为闭区间 $[a, b]$ 的端点.

又, 数集 $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$ 和 $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ 均称为半开区间, a 与 b 称为它们的端点.

以上这四种区间都称为有限区间, 数 $b - a$ 称为这些区间的长度.

类似地, 我们可以定义五类无限区间:

$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}, (-\infty, b) = \{x \mid x < b\},$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = \mathbf{R},$$

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}, (-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}.$$

其中部分区间在数轴上表示如图 1-1-2.

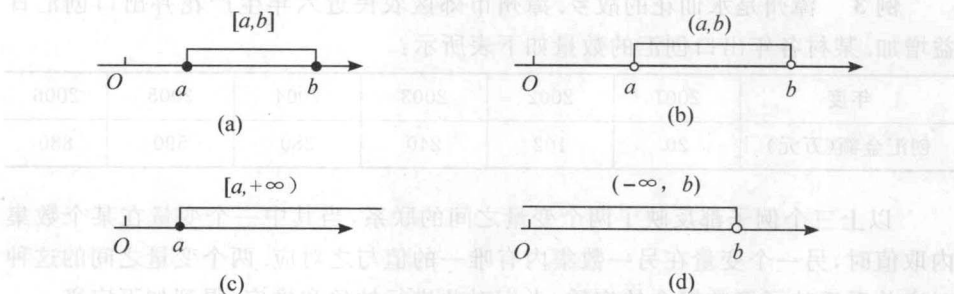


图 1-1-2

对 (a, b) , $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$ 和 $(-\infty, +\infty)$ 这四类区间做进一步的分析发现, 它们中的任何一点 x_0 都至少存在一个邻域 $U(x_0)$, 使得 $U(x_0)$ 整个被包含于 x_0 所在的区间. 一般地, 设 E 是 $\mathbf{R}$ 的一个子集, 若对任意 $x_0 \in E$ 都存在 $U(x_0) \subset E$, 则称 E 是一个开集. 因此, 这四种区间都是开集, 特别, 开区间和邻域 $U(a)$ 都是开集.

又, 设 F 是 $\mathbf{R}$ 的一个子集, 若存在开集 E 使得 $F = \mathbf{R} \setminus E$, 则称 F 是一个闭集. 这就是说, 闭集是开集的余集; 反之, 开集也是闭集的余集. 于是, 闭区间 $[a, b]$, $(-\infty, b]$ 和 $[a, +\infty)$ 都是闭集.

邻域、开集和闭集都是拓扑学的重要概念. 在第八章我们还会进一步介绍.

§ 1.1.2 函数的基本概念

1. 函数的定义

在生产、生活或科学技术领域中,我们会遇到两种类型的量:一种是在一定条件下保持不变的量,称为常量,如每天的时间总量 T 都是 24 小时,地面上重力加速度 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, T 和 g 是常量;另一种是在一定过程中变化着的量,称为变量,如运动的路程及花费的时间,一天之中的气温等.

在某个过程中,往往同时出现两个或多个变量,它们不是孤立地在变化,而是互相联系着地在变化.下面考察几个例子:

例 1 正方形的面积 S 与它的边长 a 之间的关系可用 $S = a^2$ 来表示,即对任意的 $a \in (0, +\infty)$,只要求出 a^2 ,就得到以 a 为边长的正方形的面积 S .

例 2 一个物体作匀加速直线运动,出发后 t 秒时所走过的路程 s 可按如下公式确定:

$$s = \frac{1}{2}at^2, t \in [0, T] \text{ (其中 } a \text{ 是加速度, } T \text{ 是最大运动时间)}.$$

例 3 漳州是水仙花的故乡.漳州市郊区农民近六年生产花卉出口创汇日益增加.某村各年出口创汇的数量如下表所示:

年度	2001	2002	2003	2004	2005	2006
创汇金额(万元)	20	102	240	380	590	880

以上三个例子都反映了两个变量之间的联系,当其中一个变量在某个数集内取值时,另一个变量在另一数集内有唯一的值与之对应.两个变量之间的这种对应关系反映了函数概念的实质.人们对此进行抽象和推广,得到如下定义.

定义 设 D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的一个非空子集,若对 D 中的每一个 x ,按照对应法则 f ,实数集 $\mathbf{R}$ 中有唯一的数 y 与之相对应,我们称 f 为从 D 到 $\mathbf{R}$ 的一个函数,记作

$$f: D \rightarrow \mathbf{R}.$$

上述 y 与 x 之间的对应关系记作 $y = f(x)$,并称 y 为 x 的函数值, D 称为函数的定义域,数集 $f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.若把 x, y 看成变量,则 x 称为自变量, y 称为因变量.

那么,定义域 D 就是自变量 x 的取值范围,而值域 $f(D)$ 是因变量 y 的取值范围.特别,当值域 $f(D)$ 是仅由一个实数 C 组成的集合时, $f(x)$ 称为常值函数.这时, $f(x) = C$,也就是说,我们把常量看成特殊的因变量.

由定义可知,例 1 的对应关系确定了一个定义在 $(0, +\infty)$ 上以 a 为自变量

的函数;例2确定了一个定义在 $[0, T]$ 上以 t 为自变量的函数;例3则确定了一个定义在数集 $\{2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006\}$ 上以年份为自变量的函数.

几点说明:

(1) 为了使用方便,我们将符号“ $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ ”记为“ $y = f(x)$ ”,并称“ $f(x)$ 是 x 的函数(值)”.当强调定义域时,也常记作

$$y = f(x), x \in D.$$

(2) 函数 $y = f(x)$ 中表示对应关系的符号 f 也可改用其他字母,例如“ φ ”,“ F ”等等.这时函数就记为 $y = \varphi(x)$, $y = F(x)$,等等.

(3) 用 $y = f(x)$ 表示一个函数时, f 所代表的对应法则已完全确定,对应于点 $x = x_0$ 的函数值记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

例如,设 $y = f(x) = \sqrt{4-x^2}$,它在点 $x = 0, x = -2$ 的函数值分别为

$$y|_{x=0} = f(0) = \sqrt{4-0^2} = 2, y|_{x=-2} = \sqrt{4-(-2)^2} = 0.$$

(4) 从函数的定义知,定义域和对应法则是函数的两个基本要素,两个函数相同当且仅当它们的定义域和对应法则都相同.

(5) 在实际问题中,函数的定义域可根据变量的实际意义来确定;但在解题中,对于用表达式表示的函数,其省略未表出的定义域通常指的是:使该表达式有意义的自变量取值范围.

例4 求函数 $y = \sqrt{2x-1} + \log_5(1-x)$ 的定义域.

解 要使函数式子有意义, x 必须满足 $\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 1-x > 0 \end{cases}$,于是,所求函数的定义域为

$$D = \left\{ x \mid \frac{1}{2} \leq x < 1 \right\}.$$

2. 函数的表示法

(1) 解析法(表示函数的主要方法)

当函数的对应法则用数学式子表示时,这种表示函数的方法称为解析法.如 $y = x^2 - 3, x \in (1, +\infty)$ 或 $y = x^2 - 3, x > 1$ 或 $y = x^2 - 3 \ (x > 1)$ 是用解析法表示的同一个函数,后二者直接用不等式表示定义域,系传统方式,因较简洁,故仍经常采用.解析法是表示函数的主要方法.

例5 设 x 为任一实数.不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分,对 $x \in \mathbf{R}$,用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.例如, $[\pi] = 3, [-2] = -2, [-4.7] = -5, y = [x], x \in \mathbf{R}$ 所表示的函数称为取整函数.

一个函数也可以在其定义域的不同部分用不同的解析式表示,如:

$$\text{例 6 } y = \begin{cases} 1-x & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ x^2 & x \in (0, +\infty) \end{cases}.$$

$$\text{例 7 } \text{绝对值函数 } y = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}.$$

$$\text{例 8 } y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}.$$

易知,对于任何实数 x ,都有 $x = (\operatorname{sgn} x) |x|$ 成立. 这个函数称为符号函数.

例 6、7、8 这种形式的函数,称为分段函数.

(2) 列表法(按需采用的特殊方法)

若函数 $y = f(x)$ 采用含有自变量 x 的值与它在函数 $f(x)$ 中对应值的表格来表示,则称这种表示函数的方法为列表法. 如上述例 3 及通常所用的三角函数表、对数表等等,都是用列表法表达函数的例子.

(3) 图像法(直观形象的辅助方法)

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D ,那么对于任意取定的 $x \in D$,其函数值为 $y = f(x)$. 这样,以 x 为横坐标、 y 为纵坐标,就在 xOy 平面上确定了一点 (x, y) . 当 x 遍取 D 上的每一个数值时,就得到平面点集

$$C = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\},$$

称其为函数 $y = f(x)$ 的图像. 采用图像给出函数的方法称为图像法. 图 1-1-3、图 1-1-4 与图 1-1-5 就是用图像法分别表示的取整函数、绝对值函数和符号函数.

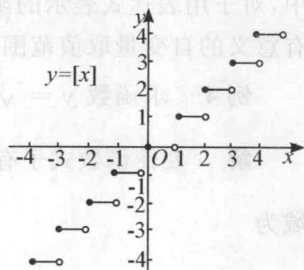


图 1-1-3

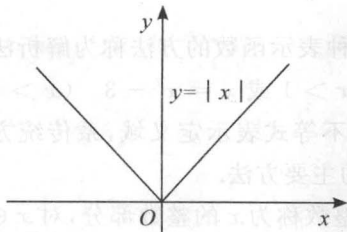


图 1-1-4

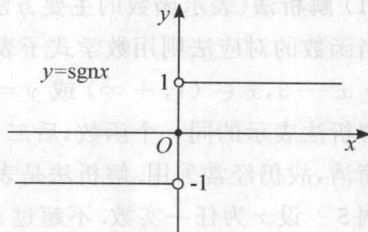


图 1-1-5

§ 1.1.3 函数的基本性质

1. 函数的有界性

定义 设函数 $y = f(x)$ 在某一实数集 D_1 上有定义(即 D_1 是 $f(x)$ 的定义域 D 的子集),若存在常数 M (或 m) 使得不等式

$$f(x) \leq M \text{ (或 } f(x) \geq m \text{)}$$

对所有 $x \in D_1$ 都成立,则称函数 $y = f(x)$ 在 D_1 上有上界(或有下界),同时称 M 为 $f(x)$ 在 D_1 上的一个上界(或 m 为 $f(x)$ 在 D_1 上的一个下界).若 $f(x)$ 在 D_1 既有上界又有下界,则称 $f(x)$ 在 D_1 上有界,或 $f(x)$ 在 D_1 上是有界函数,否则,则称函数 $f(x)$ 在 D_1 上无界,或称在 D_1 上函数 $f(x)$ 是无界函数.

如三角函数 $y = \sin x, y = \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是有界的,因为对所有实数 x ,有 $|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$. 函数 $y = x^2$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 无界(没有上界),在区间 $[-1, 1]$ 上有界. 函数 $y = -\frac{1}{x}$ 在开区间 $(0, 1)$ 上无界(没有下界),但在区间 $(1, 3)$ 有界.

由定义可知,函数 $f(x)$ 在 D_1 上有界当且仅当存在一个常数 $K > 0$,使得

$$|f(x)| \leq K, x \in D_1.$$

2. 函数的单调性

定义 设函数 $y = f(x)$ 在某一实数集 D 上有定义,若对于任意的 $x_1, x_2 \in D$,当 $x_1 < x_2$ 时恒有

(1) $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 D 上单调增加;

(2) $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 D 上单调减少.

单调增加与单调减少的函数统称为单调函数.

注 把(1)中的条件改为 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 D 上不减;把(2)中的条件改为 $f(x_1) \geq f(x_2)$ 成立时,则称 $f(x)$ 在 D 上不减. 不减与不减的函数统称为广义单调函数. 本书主要涉及单调函数(也称为“严格单调函数”),把广义单调函数可能具有的类似性质留给读者自行探讨.

例如,函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调增加的,但在 $(-\infty, 0]$ 上是单调减少的;在整个定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调函数.

函数 $f(x) = x^3$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的.

3. 函数的奇偶性

定义 设实数集 D 满足: $x \in D$ 当且仅当 $-x \in D$, 则称 D 是一个对称集.

设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 是一个对称集,若 $f(x)$ 满足 $f(-x) = f(x), x \in D$,

则称函数 $f(x)$ 是偶函数;若 $f(x)$ 满足

$$f(-x) = -f(x), x \in D,$$

则称函数 $f(x)$ 是奇函数.

偶函数的图像关于 y 轴对称(图 1-1-6), 奇函数的图像关于坐标原点对称(图 1-1-7).

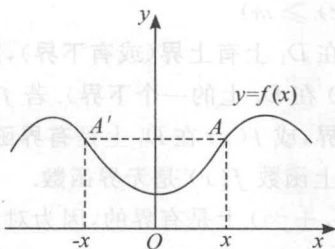


图 1-1-6

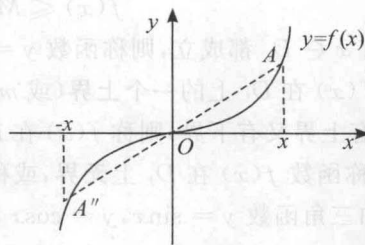


图 1-1-7

例如, 函数 $y = \sin x$ 是奇函数, 函数 $y = \cos x$ 是偶函数, 而函数 $y = \sin x + \cos x$ 既不是奇函数也不是偶函数.

4. 函数的周期性

定义 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为集 D , 若存在一个非零的数 T , 使得对于任意 $x \in D$, 有 $x \pm T \in D$ 且

$$f(x \pm T) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数, 同时称 T 为 $f(x)$ 的周期.

显然, 若 T 为 $f(x)$ 的一个周期, 则 $2T, 3T, 4T, \dots$ 也都是它的周期, 故周期函数有无限多个周期. 若在周期函数 $f(x)$ 的所有正周期中有一个最小者, 则称这个最小者为函数 $f(x)$ 的最小正周期. 通常所说的周期就是指最小正周期.

例如, 函数 $\sin x, \cos x$ 都是以 2π 为周期的函数; 函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的函数.

并非每一个周期函数都有最小正周期. 如, 对于定义在 $\mathbf{R}$ 上的狄利克雷 (Dirichlet) 函数:

$$f(x) = D(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \text{ 为有理数时} \\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数时} \end{cases}$$

任意有理数都是它的周期, 但它没有最小正周期.

§ 1.1.4 反函数

自变量与因变量的关系往往是相对的. 我们不仅需要研究变量 y 随变量 x 变化而变化的情况, 有时也要研究变量 x 随变量 y 变化而变化的状况. 例如, 自

由落体下落的距离 s 与时间 t 的关系是

$$s = \frac{1}{2}gt^2, t \in [0, T], \quad (1.1.1)$$

这时 s 是 t 的函数. 但是, 如果反过来, 要由物体下落的距离 s 来确定所需的时间 t , 可由式 (1.1.1) 解出 t , 把它表示为 s 的函数

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}}, s \in [0, H], \quad (1.1.2)$$

其中 H 是物体在开始下落时与地面的距离. 由式 (1.1.1) 和式 (1.1.2) 这对函数启发人们引入反函数的概念.

定义 设已知函数 $y = f(x)$, $x \in D$ 的值域为 $f(D)$. 若对于 $f(D)$ 中每一个值 y , D 中有唯一确定的值 x 使得 $f(x) = y$, 就在 $f(D)$ 上定义了一个函数, 并称其为函数 $y = f(x)$ 的反函数, 记为

$$x = f^{-1}(y), y \in f(D).$$

$y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 互为反函数. 习惯上把自变量记为 x , 因变量记为 y , 所以反函数 $x = f^{-1}(y)$ 也可写作 $y = f^{-1}(x)$. 相对于反函数 $y = f^{-1}(x)$ 而言, 原来的函数 $y = f(x)$ 称为直接函数. 容易看出, 在同一坐标平面上, 反函数 $y = f^{-1}(x)$ 与直接函数 $y = f(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称, 如图 1-1-8 所示.

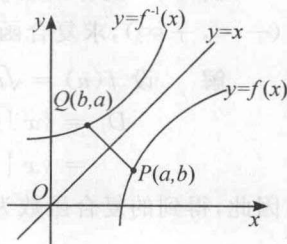


图 1-1-8

$y = f(x)$ 要满足什么条件才能保证其反函数一定存在呢? 根据定义可推出如下的反函数存在定理:

定理 单调函数必有反函数. 单调增加的函数的反函数必单调增加, 单调减少的函数的反函数必单调减少.

例 9 函数 $y = x^2$ 在 $[0, +\infty)$ 上是单调增加的函数, 它的反函数 $y = \sqrt{x}$ 在其定义域 $[0, +\infty)$ 上也是单调增加的函数.

§ 1.1.5 复合函数

在许多自然现象中, 两个变量的联系有时不是直接的, 而是通过另一个变量联系起来的.

例 10 某汽车行驶 10 小时, 每公里耗油量为 0.2 升, 行驶速度为每小时 60 公里. 于是汽车在行驶过程中, 耗油量 y 是行驶距离 s 的函数

$$y = f(s) = 0.2s, s \in [0, +\infty),$$

而行驶距离 s 又是行驶时间 t 的函数

$$s = g(t) = 60t, t \in [0, 10].$$