Chinese Association of Quantitative Economics

中国数量经济学会

中国数量经济学会

21世纪数量经济学

Quantitative Economics in the 21st Century

第13卷

◎主　编　李　平　何伦志

◎副主编　李富强　宋香荣

社会科学文献出版社
SSAP
SOCIAL SCIENCES ACADEMIC PRESS (CHINA)

Chinese Association of Quantitative Economics
中国数量经济学会

中 国 数 量 经

21世纪数量经济学

Quantitative Economics in the 21st Century

第13卷

◎主　编　李　平　何伦志
◎副主编　李富强　宋香荣

社会科学文献出版社
SOCIAL SCIENCES ACADEMIC PRESS (CHINA)

图书在版编目（CIP）数据

21世纪数量经济学．第13卷/李平，何伦志主编．—北京：社会科学文献出版社，2013.6
ISBN 978-7-5097-4554-0

Ⅰ.①2… Ⅱ.①李… ②何… Ⅲ.①数量经济学－文集
Ⅳ.①F224.0-53

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第080337号

21世纪数量经济学　第13卷

主　　编／李　平　何伦志
副 主 编／李富强　宋香荣

出 版 人／谢寿光
出 版 者／社会科学文献出版社
地　　址／北京市西城区北三环中路甲29号院3号楼华龙大厦
邮政编码／100029

责任部门／经济与管理出版中心（010）59367226
电子信箱／caijingbu@ssap.cn
项目统筹／恽　薇　高　雁
经　　销／社会科学文献出版社市场营销中心（010）59367081　59367089
读者服务／读者服务中心（010）59367028

责任编辑／张　扬　王丽平
责任校对／曹艳浏　李杰明
责任印制／岳　阳

印　　装／三河市尚艺印装有限公司
开　　本／787mm×1092mm　1/16
印　　张／40.75
版　　次／2013年6月第1版
字　　数／698千字
印　　次／2013年6月第1次印刷
书　　号／ISBN 978-7-5097-4554-0
定　　价／138.00元

前　言

本书是《21 世纪数量经济学》丛书的第 13 卷。

中国数量经济学会 2012 年年会于 2012 年 7 月 27 日至 29 日在新疆乌鲁木齐举行，会议由中国数量经济学会主办，新疆大学和新疆财经大学承办，新疆维吾尔自治区博士后联谊会协办。来自政府部门、研究机构、大专院校和企业的 420 多位数量经济学专家、学者参加了本次年会，会议共收到学术论文 356 篇。

年会上，1996 年诺贝尔经济学奖得主詹姆斯·莫里斯教授、英国南安普敦大学当代中国研究中心主任陆懋祖教授、新疆大学何伦志教授分别作了主旨讲演。

名家讲坛上，日本九州大学大佳圭介教授、日本香川大学姚峰教授、北京航空航天大学韩立岩教授、新疆大学鲍敦全教授、新疆财经大学王建军教授分别讲授了内生经济增长和扩展的社会开销资本、时间序列因果分析的新进展、国际资产配置模型、略论新疆经济的后发优势、新疆多维贫困县识别模型与影响因素研究等前沿性学术问题。会议分成数量经济理论与方法、宏观经济增长与运行、货币银行、资本市场与金融危机、财政税收、投资贸易、区域经济与协调发展、企业与产业经济、实验经济学及其他新疆经济社会发展等小组进行了专题讨论，100 多位学者在小组学术交流会上介绍了自己的最新研究成果，会议收到了良好的效果。

本书是由本次年会提交的论文中遴选出来的优秀论文集结成册的，共 36 篇，分为 5 个部分：数量经济学理论与方法，宏观经济，金融、资本市场，企业、产业经济，区域经济、协调发展。入选的这些论文均有较高的学术水平，具有一定的理论意义或实践意义。

囿于编者的能力和水平，本书一定存在不足和疏漏，欢迎广大读者批评指正。

编　者

2012 年 11 月

目　录

1. 数量经济学理论与方法

1.1　指数平滑模型的时间延迟及矫正 …………………… 贾雨文　武义青 / 3

1.2　单位根检验中的 Wald 检验量研究：Bootstrap 法 VS 临界值法 ………………………………………………… 江海峰　陶长琪 / 17

1.3　改进的 SS 检验及其在固定效应模型和截面相关模型的斜率异质性检验中的应用 …………………………… 徐　凤 / 37

1.4　面板数据动态平滑转移回归模型的间接推断估计及其应用 ……………………………………… 宋　涛　刘随随　白仲林 / 52

1.5　小样本高维宏观经济统计数据 VAR 诊断模型及其估计方法性质比较研究 ………………………… 周　建　龚玉婷 / 66

1.6　初始实力非对称对实验者博弈策略选择的影响 ………………………………………………… 李　爽　石　磊 / 87

1.7　互惠单独失效条件下声誉效应的实验经济学研究 ……………………………………………… 马　博　王国成 / 99

1.8　主成分分析评估指数的构造条件和案例 ……… 林海明　杜子芳 / 111

1.9　恰好识别方程两种估计方法的一个误区 ……… 李景华　朱尚伟 / 122

1.10　基于农户主体的微观模拟平台及其在粮食安全问题研究中的应用 ……………………………… 万相昱　张　涛 / 132

2. 宏观经济

2.1　内生经济增长框架下政府 R&D 资助方式的探讨 ……………………………………………………… 沈坤荣　郑　安 / 155

2.2 我国的经济波动来自供给冲击还是需求冲击?
——对我国 GDP 波动持久性的度量 ……… 孙晓涛 王少平 / 182
2.3 价格波动会影响通货膨胀吗? CUKIERMAN 假说的
中国经验验证 …………………………………………… 张焕明 / 197
2.4 二元财政、城乡差距与地区经济增长
——基于面板向量自回归模型的实证分析
…………………………………………………… 田 柳 赵 军 / 217
2.5 热钱对 CPI 的传导路径分析
——以中国股市、楼市、大宗商品市场为路径
…………………………………………………… 杨海青 黎 实 / 230

3. 金融 资本市场

3.1 基于 Copula 函数和极值理论的金融传染度量
——测度美国次贷危机对重要经济体的传染效应
…………………………………… 郭立甫 高铁梅 姚 坚 / 253
3.2 供给因素、结构变化、汇率与我国的双边贸易 ………… 黄万阳 / 273
3.3 基于时变 Lévy 过程分析我国股市收益率波动
…………………………………………………… 何诚颖 王占海 / 294
3.4 基差变化与沪深 300 指数和股指期货的波动性
——基于马可夫状态转换模型的考察
…………………………………… 卢宗辉 蓝海平 龚映清 / 320
3.5 基于带解释变量杠杆 SV 模型上证指数收益率
周内效应及特征分析 ………………………… 朱喜安 马兴祥 / 335

4. 企业 产业经济

4.1 "十二五"时期我国节能潜力与节能降耗目标分析
…………………………………………………… 郭国峰 王彦彭 / 359
4.2 "新农合"的再分配效应:基于中国农村微观
调查数据的分析 ……………………… 白重恩 董丽霞 赵文哲 / 376

4.3　中国农业全要素生产率及其收敛性分析
——基于 DEA-Malmquist 指数的实证研究 …………… 韩　中 / 393
4.4　环境规制影响了中国工业行业的利润水平吗?
……………………………………… 李小平　卢现祥　陶小琴 / 411
4.5　中国装备制造业全要素生产率的变动分析 ……………… 刘　艳 / 439
4.6　生产补贴会促进企业出口吗?
——来自中国制造业企业的证据
……………………………………… 陈勇兵　盛　月　周世民 / 459
4.7　异质性企业空间选择与地区生产率差距：基于中国工业
企业数据的实证研究 ………………………………………… 李晓萍 / 479
4.8　中国制造业产业集聚与地区专业化存在空间溢出效应吗?
——来自空间杜宾模型的经验证据 ………… 金春雨　程　浩 / 511
4.9　风险投资对企业公司治理结构的影响：基于内生性
视角的研究 ………………………… 许承明　孙　杨　夏　锐 / 533

5. 区域经济　协调发展

5.1　中国经济低碳转型绩效的历史变迁与地区差异
…………………………………………………… 朱承亮　岳宏志 / 549
5.2　中国对吉尔吉斯斯坦农产品出口增长：基于 CMS 模型的
实证分析 ……………………………………………………… 李道军 / 574
5.3　基于主成分分析的西部 12 省区市对外开放竞争力研究
……………………………………… 戴　磊　孙　慧　任　巍 / 583
5.4　比较优势、后发优势与新疆跨越式发展
……………………………………… 孙金山　徐　明　李新英 / 593
5.5　经济增长与环境污染关系研究
——以新疆为例 ……………………… 李强谊　马晓钰　郭莹莹 / 605
5.6　新疆 R&D 投入的特征分析 ……………………… 侯震梅　周　勇 / 617
5.7　欠发达地区制造业出口与发展潜力的影响因素
——基于新疆面板数据的实证研究 ………… 龚新蜀　顾成军 / 626

1. 数量经济学理论与方法

1.1　指数平滑模型的时间延迟及矫正

贾雨文　武义青①

摘　要：本文讨论了指数平滑模型的时间延迟值的计算，讨论了布朗多项式平滑预测模型产生的时间波动问题，证明了在平稳状态下多项式模型的时间波动可以自行消除，建立了预测步长矫正值的计算方法。

关键词：指数平滑模型　时间延迟　多项式模型

1.1.1　时间序列数据处理中的时间延迟问题

随手打开一幅股票或期货交易的图表，马上可以看到一些数日均值的曲线，在时间上明显落后于实际交易数据的连线，而且平均日数越长，时间延迟量越大。这种经济数据在时间上不同步的现象非常不利于现实的经济活动分析，更不利于深入的理论研究。

对于平均日数确定的平均值的计算，它的时间延迟量也是确定的，比较容易处理。例如，对一个五日平均的经济量

$$\hat{X}_n = \frac{X_n + X_{n-1} + \cdots + X_{n-4}}{5}$$

---

① 贾雨文（1938.1～），男，河北科技大学教授；武义青（1962.9～），男，博士，河北经贸大学校长助理，研究员，中国数量经济学会常务理事。

若 X_n 发生的时刻为 t_n，则 $\hat{X}_n$ 对应的时刻值应为

$$\hat{t}_n = \frac{t_n + t_{n-1} + \cdots + t_{n-4}}{5}$$

特别地，若时间间隔等距离，不妨设 $t_n = n$，则可简化为

$$\hat{t}_n = \frac{n + (n-1) + \cdots + (n-4)}{5} = n - 2$$

即 $\hat{X}_n$ 对应的时刻比 X_n 延迟了两个时间单位。

有了 $\hat{X}_n$ 对应的时刻值 $\hat{t}_n$，就可以用平行位移或多项式插值一类方法计算出在真实时刻 t_n 上的 $\hat{X}_n$ 对应值。这样，相关的经济数据在时间上就是同步的，便于分析研究。

指数平滑与预测方法，是时间序列经济活动分析中应用很广的一种定量分析方法。它的时间延迟值的计算和矫正就比较烦琐，本文就讨论并解决这一问题。

1.1.2 指数平滑公式

设在时刻 $t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots$ 上定义一族经济量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$。通常 t_n 间可以不等距，但要求 $t_n < t_{n+1}$。取定常数 α，$0 < \alpha < 1$，称为平滑系数，人们称下式为指数平滑公式。

$$\hat{X}_n = \alpha X_n + (1-\alpha)\hat{X}_{n-1} \qquad (n \geqslant 2) \tag{1}$$

进而若记 $s_n^{(0)} = x_n$，对 $p \geqslant 1$，则有 p 阶指数平滑公式

$$s_n^p = \alpha s_n^{(p-1)} + (1-\alpha) s_{n-1}^{(p)} \qquad (n \geqslant 2, p \geqslant 1) \tag{2}$$

直接用（1）（2）式去平滑处理数据，发现它们存在明显的时间延迟现象。以下，我们讨论这种时间延迟值的计算和矫正方法。

1.1.3 指数平滑公式时间延迟后的时间值的计算

容易看出，（1）式中 $\hat{x}_n$ 对应的时刻不再是 t_n，而是

$$\hat{t}_n = \alpha t_n + (1-\alpha)\hat{t}_{n-1}$$

类似地，$s_n^{(p)}$ 对应的时刻应为

$$\hat{t}_n^{(p)} = \alpha \hat{t}_n^{(p-1)} + (1-\alpha)\hat{t}_{n-1}^{(p)} \tag{3}$$

其中，$\hat{t}_n^{(0)} = t_n$。称 $\hat{t}_n$ 和 $\hat{t}_n^{(p)}$ 为平滑延迟后的时间值。

特别地，若 t_n 是等间距的，不妨简记为 $t_n = n$，即用时间序号表示时刻值，则反复使用母函数方法，可以得到

$$\begin{aligned}
\hat{t}_n^{(1)} &= n - \frac{\beta}{\alpha}(1-\beta^{n-1}) \\
\hat{t}_n^{(2)} &= n - \frac{2\beta}{\alpha}(1-\beta^{n-1}) + (n-1)\beta^n \\
\hat{t}_n^{(3)} &= n - \frac{3\beta}{\alpha}(1-\beta^{n-1}) + \frac{(n-1)(n+4)}{2}\beta^n - \frac{n(n-1)}{2}\beta^{n+1} \\
\hat{t}_n^{(4)} &= n - \frac{4\beta}{\alpha}(1-\beta^{n-1}) + \frac{(n-1)(n^2+7n+18)}{6}\beta^n - \frac{n(n-1)(n+4)}{3}\beta^{n+1} \\
&\quad + \frac{n(n-1)(n+1)}{6}\beta^{n+2}
\end{aligned} \tag{4}$$

式中，$\beta = 1-\alpha$。

计算 $\hat{t}_n^{(p)}$ 是一件很烦琐的工作，我们计算到 $p=4$，已能满足大部分经济分析的需要。下面研究一般的 $\hat{t}_n^{(p)}$ 的基本性质，以利于理论的研究。若记 $\Delta t_n^{(p)} = n - \hat{t}_n^{(p)}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\Delta t_n^{(p)} = \Delta t_\infty^{(p)}$，我们有如下的结论：

定理 1：$\Delta t_\infty^{(p)} = \dfrac{p\beta}{\alpha}$

证明：使用数学归纳法。由公式（4）知，当 $p=1,2,3,4$ 时，定理成立。现设 $p=m-1$ 时，定理成立，往证 $p=m$ 时定理也成立。

$$\begin{aligned}
\Delta t_n^{(m)} &= n - \hat{t}_n^{(m)} \\
&= n - [\alpha \hat{t}_n^{(m-1)} + \beta \hat{t}_{n-1}^{(m)}] \\
&= \alpha[n - \hat{t}_n^{(m-1)}] + \beta[n - \hat{t}_{n-1}^{(m)}] \\
&= \alpha\Delta t_n^{(m-1)} + \beta + \beta[n-1-\hat{t}_{n-1}^{(m)}] \\
&= \alpha\Delta t_n^{(m-1)} + \beta + \beta\Delta \hat{t}_{n-1}^{(m)}
\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$，即得

$$\Delta t_\infty^{(m)} = \alpha \times \frac{(m-1)\beta}{\alpha} + \beta + \beta\Delta t_\infty^{(m)}$$

$$(1-\beta)\Delta t_\infty^{(m)} = m\beta$$

$$\Delta t_{\infty}^{(m)}=\frac{m\beta}{\alpha}$$

即 $p=m$ 时，定理也成立，由数学归纳法法则，定理得证。

定理1表明在 n 充分大时，$\hat{t}_n^{(p)}$ 接近于 $n-\frac{p\beta}{\alpha}$，即 p 阶指数平滑公式的时间延迟值接近于 $\frac{p\beta}{\alpha}$。在 n 充分大时，可以近似使用这一结果。我们以后的重点转向 n 取值不太大时，时间延迟值的计算和矫正。

1.1.4 公式（4）的检验

定理2：（4）式中的4个式子满足（3）式的条件。

证明：我们是由时间等距，且取 $t_n=n$ 时，推导出（4）式的。即有

$$\hat{t}_n^{(0)}=t_n^{(0)}=n$$

$p=1$ 时

$$\begin{aligned}\alpha\hat{t}_n^{(0)}+\beta\hat{t}_{n-1}^{(1)}&=n\alpha+\beta\left[n-1-\frac{\beta}{\alpha}(1-\beta^{n-2})\right]\\&=n-\beta-\frac{\beta^2}{\alpha}(1-\beta^{n-2})\\&=n-\beta-\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{\beta^n}{\alpha}\\&=n-\beta-\frac{\beta}{\alpha}(1-\alpha)+\frac{\beta^n}{\alpha}\\&=n-\frac{\beta}{\alpha}(1-\beta^{n-1})\\&=\hat{t}_n^{(1)}\end{aligned}$$

（3）式成立

$p=2$ 时

$$\begin{aligned}\alpha\hat{t}_n^{(1)}+\beta\hat{t}_{n-1}^{(2)}&=\alpha\left[n-\frac{\beta}{\alpha}(1-\beta^{n-1})\right]+\beta\left[n-1-\frac{2\beta}{\alpha}(1-\beta^{n-2})+(n-2)\beta^{n-1}\right]\\&=n-\beta(1-\beta^{n-1})-\beta-\frac{2\beta^2}{\alpha}(1-\beta^{n-2})+(n-2)\beta^n\\&=n-2\beta+\beta^n-\frac{2\beta^2}{\alpha}+\frac{2\beta^n}{\alpha}+(n-2)\beta^n\end{aligned}$$

$$= n - 2\beta + (n-1)\beta^n - \frac{2(1-\alpha)\beta}{\alpha} + \frac{2\beta^n}{\alpha}$$

$$= n - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{2\beta^n}{\alpha} + (n-1)\beta^n$$

$$= n - \frac{2\beta}{\alpha}(1-\beta^{n-1}) + (n-1)\beta^n$$

$$= \hat{t}_n^{(2)}$$

（3）式成立

$p = 3$ 时

$$\alpha\hat{t}_n^{(2)} + \beta\hat{t}_{n-1}^{(3)} = \alpha\left[n - \frac{2\beta}{\alpha}(1-\beta^{n-1}) + (n-1)\beta^n\right]$$

$$+ \beta\left[n - 1 - \frac{3\beta}{\alpha}(1-\beta^{n-2}) + \frac{(n-2)(n+3)}{2}\beta^{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)}{2}\beta^n\right]$$

$$= n - 2\beta(1-\beta^{n-1}) + (n-1)\alpha\beta^n - \beta - \frac{3\beta^2}{\alpha}(1-\beta^{n-2})$$

$$+ \frac{(n-2)(n+3)}{2}\beta^n - \frac{(n-1)(n-2)}{2}\beta^{n+1}$$

$$= n - 3\beta + 2\beta^n + (n-1)(1-\beta)\beta^n - \frac{3\beta^2}{\alpha} + \frac{3\beta^n}{\alpha}$$

$$+ \frac{n^2+n-6}{2}\beta^n - \frac{n^2-3n+2}{2}\beta^{n+1}$$

$$= n - 3\beta - \frac{3(1-\alpha)\beta}{\alpha} + (n+1)\beta^n - (n-1)\beta^{n+1} + \frac{3\beta^n}{\alpha}$$

$$+ \frac{n^2+n-6}{2}\beta^n - \frac{n^2-3n+2}{2}\beta^{n+1}$$

$$= n - \frac{3\beta}{\alpha} + \frac{3\beta^n}{\alpha} + \frac{n^2+3n-4}{2}\beta^n + \frac{n^2-n}{2}\beta^{n+1}$$

$$= n - \frac{3\beta}{\alpha}(1-\beta^{n-1}) + \frac{(n-1)(n+4)}{2}\beta^n - \frac{n(n-1)}{2}\beta^{n+1}$$

$$= \hat{t}_n^{(3)}$$

（3）式成立

$p = 4$ 时

$$\alpha\hat{t}_n^{(3)} + \beta\hat{t}_{n-1}^{(4)} = \alpha\left[n - \frac{3\beta}{\alpha}(1-\beta^{n-1}) + \frac{(n-1)(n+4)}{2}\beta^n - \frac{n(n-1)}{2}\beta^{n+1}\right]$$

$$+ \beta\left[n - 1 - \frac{4\beta}{\alpha}(1-\beta^{n-2}) + \frac{(n-2)[(n-1)^2+7(n-1)+18]}{6}\beta^{n-1}\right.$$

$$\left. - \frac{(n-1)(n-2)(n+3)}{3}\beta^n + \frac{(n-2)(n-1)n}{6}\beta^{n+1}\right]$$

$$= n - 3\beta(1 - \beta^{n-1}) + \frac{(n-1)(n+4)}{2}(1-\beta)\beta^{n} - \frac{n(n-1)}{2}(1-\beta)\beta^{n+1} - \beta$$

$$- \frac{4\beta^2}{\alpha}(1 - \beta^{n-2}) + \frac{(n-2)(n^2 - 2n + 1 + 7n - 7 + 18)}{6}\beta^{n}$$

$$- \frac{(n+3)(n^2 - 3n + 2)}{3}\beta^{n+1} + \frac{n(n^2 - 3n + 2)}{6}\beta^{n+2}$$

$$= n - 4\beta + 3\beta^{n} + \frac{n^2 + 3n - 4}{2}\beta^{n} - \frac{n^2 + 3n - 4}{2}\beta^{n+1}$$

$$- \frac{n^2 - n}{2}\beta^{n+1} + \frac{n^2 - n}{2}\beta^{n+2} - \frac{4(1-\alpha)\beta}{\alpha} + \frac{4\beta^{n}}{\alpha} + \frac{(n-2)(n^2 + 5n + 12)}{6}\beta^{n}$$

$$- \frac{n^3 - 3n^2 + 2n + 3n^2 - 9n + 6}{2}\beta^{n+1} + \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{6}\beta^{n+2}$$

$$= n - \frac{4\beta}{\alpha} + \frac{4\beta^{n}}{\alpha} + \frac{n^2 + 3n + 2}{2}\beta^{n} + \frac{n^3 + 5n^2 + 12n - 2n^2 - 10n - 24}{6}\beta^{n}$$

$$- \frac{2n^2 + 2n - 4}{2}\beta^{n+1} - \frac{n^3 - 7n + 6}{3}\beta^{n+1} + \frac{n^3 - n}{6}\beta^{n+2}$$

$$= n - \frac{4\beta}{\alpha}(1 - \beta^{n-1}) + \frac{n^3 + 6n^2 + 11n - 18}{6}\beta^{n}$$

$$- \frac{2n^3 + 6n^2 - 8n}{6}\beta^{n+1} + \frac{n(n^2 - 1)}{6}\beta^{n+2}$$

$$= n - \frac{4\beta}{\alpha}(1 - \beta^{n-1}) + \frac{(n-1)(n^2 + 7n + 18)}{6}\beta^{n}$$

$$- \frac{n(n-1)(n+4)}{3}\beta^{n+1} + \frac{n(n-1)(n+1)}{6}\beta^{n+2}$$

$$= \hat{t}_{n}^{(4)}$$

(3) 式成立

定理证毕。定理表明（4）式中的 4 个 $\hat{t}_{n}^{(p)}$ 的表达式是正确的，可以放手使用。

1.1.5 多项式预测模型

指数平滑预测模型计算出的 $s_{n}^{(p)}$ 对应的时间值是 $\hat{t}_{n}^{(p)}$，$\hat{t}_{n}^{(p)}$ 在 n 很大时也不能消除时间延迟值，所以直接用 $s_{n}^{(p)}$ 作预测分析很不方便。一般情况下，人们采用下述的布朗多项式进行平滑和预测计算。

$$\hat{X}_{n+\tau}^{(k)} = \hat{X}_{n}^{(0)} + \hat{X}_{n}^{(1)}\tau + \frac{1}{2}\hat{X}_{n}^{(2)}\tau^{2} + \cdots + \frac{1}{k!}\hat{X}_{n}^{(k)}\tau^{k} \tag{5}$$

其中 τ 为预测的步长，$\tau = 0$ 时，(5) 式退化为平滑公式。

(5) 式中的 $\hat{X}_n^{(m)}$ 和 (2) 式中的 $s_n^{(p)}$ 的互换关系，由下述重要的基本定理所确定。[①]

定理 3：(2) 式定义的 $s_n^{(p)}$ 和 (5) 式定义的 k 阶多项式各系数 $\hat{X}_n^{(m)}$ $(0 \leqslant m \leqslant k)$ 之间有关系

$$s_n^{(p)} = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \frac{\hat{X}_n^{(m)}}{m!} \frac{\alpha^p}{(p-1)!} \sum_{j=0}^{\infty} j^m \beta^j \frac{(p-1+j)!}{j!} \tag{6}$$

其中，$p = 1,2,\cdots,k+1$，$\beta = 1 - \alpha$。

由 (6) 式的 $k+1$ 个方程联立求解，就可以把 (5) 式中的 $k+1$ 个 $\hat{X}_n^{(m)}(m = 0,1,2,\cdots,k)$ 解出来。我们可以用前 4 个 $s_n^{(p)}$，解出 4 组 $\hat{X}_n^{(m)}$ 来，可以建立 3 个预测公式，1 个平滑公式。在各预测公式中，取 $\tau = 0$，也可以当平滑公式使用。公式阶数越高，平滑和预测精度越高。

$k = 0$ 时，

$$\hat{X}_n^{(0)} = s_n^{(1)} \qquad \text{平滑公式}$$

$k = 1$ 时，

$$\hat{X}_{n+\tau}^{(1)} = \hat{X}_n^{(0)} + \hat{X}_n^{(1)}\tau$$

$$\hat{X}_n^{(0)} = 2s_n^{(1)} - s_n^{(2)}$$

$$\hat{X}_n^{(1)} = \frac{\alpha}{\beta}(s_n^{(1)} - s_n^{(2)})$$

$k = 2$ 时，

$$\hat{X}_{n+\tau}^{(2)} = \hat{X}_n^{(0)} + \hat{X}_n^{(1)}\tau + \frac{1}{2}\hat{X}_n^{(2)}\tau^2$$

$$\hat{X}_n^{(0)} = 3s_n^{(1)} - 3s_n^{(2)} + s_n^{(3)}$$

$$\hat{X}_n^{(1)} = \frac{\alpha}{2\beta^2}[(1+5\beta)s_n^{(1)} - 2(1+4\beta)s_n^{(2)} + (1+3\beta)s_n^{(3)}]$$

$$\hat{X}_n^{(2)} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}[s_n^{(1)} - 2s_n^{(2)} + s_n^{(3)}]$$

$k = 3$ 时，

$$\hat{X}_{n+\tau}^{(3)} = \hat{X}_n^{(0)} + \hat{X}_n^{(1)}\tau + \frac{1}{2}\hat{X}_n^{(2)}\tau^2 + \frac{1}{6}\hat{X}_n^{(3)}\tau^3$$

① 邓志刚，汪星明（1994）。

$$\hat{X}_n^{(0)} = 4s_n^{(1)} - 6s_n^{(2)} + 4s_n^{(3)} - s_n^{(4)}$$

$$\hat{X}_n^{(1)} = \frac{\alpha}{\beta^3}\left[\frac{1+4\beta+13\beta^2}{3}s_n^{(1)} - \frac{2+7\beta+19\beta^2}{2}s_n^{(2)} + (1+3\beta+7\beta^2)s_n^{(3)} - \frac{2+5\beta+11\beta^2}{6}s_n^{(4)}\right]$$

$$\hat{X}_n^{(2)} = \frac{\alpha^2}{\beta^3}[(1+3\beta)s_n^{(1)} - (3+8\beta)s_n^{(2)} + (3+7\beta)s_n^{(3)} - (1+2\beta)s_n^{(4)}]$$

$$\hat{X}_n^{(3)} = \frac{\alpha^3}{\beta^3}[s_n^{(1)} - 3s_n^{(2)} + 3s_n^{(3)} - s_n^{(4)}]$$

1.1.6　多项式预测模型的时间问题

在 $k=0$ 平滑模型中，$\hat{X}_n^{(0)} = s_n^{(1)}$，前面已算出它对应的时刻值是 $\hat{t}_n^{(1)} = n - \frac{\beta}{\alpha}(1-\beta^{n-1})$。在 $k \geqslant 1$ 的预测模型中，各个 $s_n^{(p)}$ 对应的时刻值是 $\hat{t}_n^{(p)}$，所以把各个 $\hat{X}_n^{(m)}$ 表达式中的 $s_n^{(p)}$ 换成 $\hat{t}_n^{(p)}$，就可以导出 $\hat{X}_{n+\tau}^{(k)}$ 对应的时刻值 $\hat{T}_{n+\tau}^{(k)}$。例如，在 $k=1$ 时，有

$$T_{n+\tau}^{(1)} = T_n^{(0)} + T_n^{(1)}\tau$$

$$T_n^{(0)} = 2\hat{t}_n^{(1)} - \hat{t}_n^{(2)}$$

$$T_n^{(1)} = \frac{\alpha}{\beta}(\hat{t}_n^{(1)} - \hat{t}_n^{(2)})$$

将相应的 $\hat{t}_n^{(p)}$ 的表达式代入，经过整理，可得：

$k=1$ 时，

$$T_{n+\tau}^{(1)} = n + \tau - \{(n-1)\beta^n + [n\beta^{n-1} - (n-1)\beta^n]\tau\}$$

$$T_n^{(0)} = n - (n-1)\beta^n$$

$$T_n^{(1)} = 1 - n\beta^{n-1} + (n-1)\beta^n$$

$k=2$ 时，

$$T_{n+\tau}^{(2)} = T_n^{(0)} + T_n^{(1)}\tau + \frac{1}{2}T_n^{(2)}\tau^2$$

$$T_n^{(0)} = n + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\beta^n - \frac{n(n-1)}{2}\beta^{n+1}$$

$$T_n^{(1)} = 1 + \frac{n(n-1)}{4}\beta^{n-2} + \frac{n(n-5)}{4}\beta^{n-1} - \frac{(n-1)(5n-4)}{4}\beta^n + \frac{3n(n-1)}{4}\beta^{n+1}$$

$$T_n^{(2)} = \frac{n(n-1)}{2}[\beta^{n-2} - 3\beta^{n-1} + 3\beta^n - \beta^{n+1}]$$