

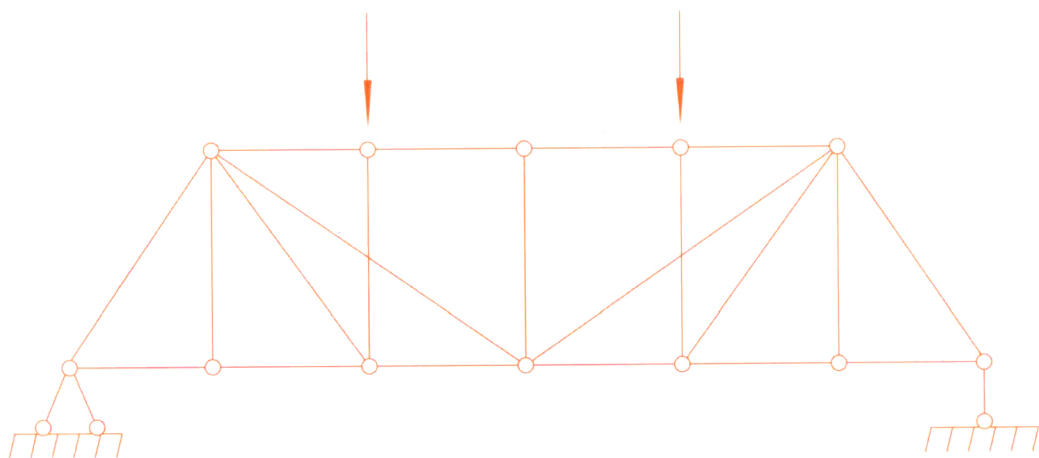


高等学校土木工程专业规划教材

# 结 构 力 学

*Structural Mechanics*

肖勇刚 唐雪松 主编



人民交通出版社  
China Communications Press

高等学校土木工程专业规划教材

# 结 构 力 学

Structural Mechanics

肖勇刚 唐雪松 主编

人民交通出版社

## 内 容 提 要

本书根据教育部高等学校力学教学指导委员会编制的结构力学教学大纲编写,选材适当,叙述精炼,联系实际,努力适应当前教学改革的要求。

全书共八章,内容包括:绪论、平面体系的几何组成分析、静定结构的内力计算、静定结构的位移计算、超静定结构的内力与位移计算、影响线及其应用、矩阵位移法、结构的动力计算。每章后附有习题和答案。为了方便教学,本书配有教学课件。

本书可作为高等院校土木工程、水利水电工程以及工程力学等专业的本科教材,也可供相关专业工程技术人员参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

结构力学/肖勇刚,唐雪松主编. —北京:人民  
交通出版社,2012.6  
高等学校土木工程专业规划教材  
ISBN 978-7-114-09823-9

I. ①结… II. ①肖…②唐… III. ①结构力学—高  
等学校—教材 IV. ①0342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 108362 号

高等学校土木工程专业规划教材

书 名: 结构力学

著 作 者: 肖勇刚 唐雪松

责任编辑: 王文华(wwh@ccpress.com.cn)

出版发行: 人民交通出版社

地 址: (100011)北京市朝阳区安定门外外偏斜街 3 号

网 址: <http://wwh.ccpress.com.cn>

销售电话: (010)59757969, 59757973

总 经 销: 人民交通出版社发行部

经 销: 各地新华书店

印 刷: 北京盈盛恒通印刷有限公司

开 本: 787×1092 1/16

印 张: 15

字 数: 380 千

版 次: 2012 年 6 月 第 1 版

印 次: 2012 年 6 月 第 1 次印刷

书 号: ISBN 978-7-114-09823-9

定 价: 32.00 元

(有印刷、装订质量问题的图书由本社负责调换)

# 前 言

本书根据教育部高等学校力学教学指导委员会编制的结构力学教学大纲,并结合《高等学校土木工程本科指导性专业规范》中关于结构力学的知识点要求进行编写,适用于作为高等院校土木工程、水利水电工程以及工程力学等专业本科教材,亦可供从事相关专业的工程技术人员学习参考。

本书在编写的过程中,吸取了以往结构力学教材的长处,并根据作者多年的教学实践经验编写而成。编写时结合一般工科院校的特点,精选内容、注重理论联系实际和工程应用;结构上遵循循序渐进、承上启下的规律;应用简洁的文字,试图做到深入浅出、通俗易懂;编写过程中还研制了相应教学课件,与纸质教材配套使用,方便教与学。全书共分八章,内容包括绪论、平面体系的几何组成分析、静定结构的内力计算、静定结构的位移计算、超静定结构的内力与位移计算(力法、位移法、弹性中心法、力矩分配法)、影响线及其应用、矩阵位移法、结构的动力计算。每章后有习题和答案。

本书由长沙理工大学肖勇刚教授和唐雪松教授担任主编,编写分工如下:第一、二、三章由肖勇刚、邓军、彭旭龙编写,第四章由陈得良、缪莉编写,第五章由唐雪松、郝海霞编写,第六章由陈星烨、付果编写,第七章由陈常松、张晓萌编写,第八章由杨金花、付果编写。

在本书的编写过程中,许多同行提出了很好的意见和建议,在此表示感谢。限于编者水平,书中缺点错误一定不少,敬请广大读者批评指正,并将意见寄往长沙理工大学土木与建筑学院。

作者

2012年2月

# 目 录

|                      |    |
|----------------------|----|
| 第 1 章 绪论             | 1  |
| 1.1 结构力学的研究对象和任务     | 1  |
| 1.2 结构的计算简图和分类       | 1  |
| 1.3 荷载的分类            | 4  |
| 第 2 章 平面体系的几何组成分析    | 5  |
| 2.1 基本概念             | 5  |
| 2.2 计算平面体系的自由度       | 6  |
| 2.3 几何不变体系的组成规则      | 7  |
| 2.4 瞬变体系的组成规则        | 9  |
| 2.5 几何组成分析举例         | 10 |
| 习题                   | 12 |
| 第 3 章 静定结构的内力计算      | 16 |
| 3.1 基本概念             | 16 |
| 3.2 静定梁的内力计算         | 17 |
| 3.3 静定刚架的内力计算        | 21 |
| 3.4 静定桁架的内力计算        | 24 |
| 3.5 静定拱的内力计算         | 29 |
| 习题                   | 34 |
| 第 4 章 静定结构的位移计算      | 46 |
| 4.1 基本概念             | 46 |
| 4.2 虚功原理             | 46 |
| 4.3 结构位移计算的一般公式      | 47 |
| 4.4 结构在荷载作用下的位移计算    | 48 |
| 4.5 图乘法              | 49 |
| 4.6 温度变化和支座移动引起的位移计算 | 52 |
| 4.7 弹性体系的互等定理        | 53 |
| 习题                   | 56 |
| 第 5 章 超静定结构的内力和位移计算  | 60 |
| 5.1 力法               | 60 |
| 5.2 位移法              | 74 |
| 5.3 对称性的利用           | 86 |
| 5.4 弹性中心法            | 92 |
| 5.5 力矩分配法            | 96 |

|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| 5.6 超静定结构的位移计算和最后内力图的校核 ..... | 104 |
| 习题 .....                      | 109 |
| <b>第6章 影响线及其应用</b> .....      | 117 |
| 6.1 影响线的概念 .....              | 117 |
| 6.2 静力法作单跨静定梁的影响线 .....       | 118 |
| 6.3 机动法作单跨静定梁的影响线 .....       | 121 |
| 6.4 影响线的应用 .....              | 123 |
| 6.5 简支梁的绝对最大弯矩和包络图 .....      | 126 |
| 6.6 连续梁的影响线与包络图 .....         | 129 |
| 习题 .....                      | 132 |
| <b>第7章 矩阵位移法</b> .....        | 135 |
| 7.1 概述 .....                  | 135 |
| 7.2 局部坐标系下的单元刚度矩阵 .....       | 135 |
| 7.3 整体坐标系下的单元刚度矩阵 .....       | 138 |
| 7.4 结构刚度矩阵 .....              | 140 |
| 7.5 支承条件的引入和非结点荷载的处理 .....    | 143 |
| 7.6 矩阵位移法的计算步骤和示例 .....       | 147 |
| 7.7 平面刚架程序框图 .....            | 151 |
| 习题 .....                      | 178 |
| <b>第8章 结构的动力计算</b> .....      | 184 |
| 8.1 概述 .....                  | 184 |
| 8.2 单自由度体系的自由振动 .....         | 187 |
| 8.3 单自由度体系的强迫振动 .....         | 194 |
| 8.4 有限多自由度体系的振动 .....         | 202 |
| * 8.5 无限自由度体系振动 .....         | 220 |
| 8.6 频率计算的近似法 .....            | 225 |
| 习题 .....                      | 230 |
| <b>参考文献</b> .....             | 234 |

# 第1章 绪 论

## 1.1 结构力学的研究对象和任务

在土木工程中,由建筑材料按照一定方式组成并能承受荷载作用的物体或体系称为工程结构(简称结构),例如房屋建筑中的屋架、梁、板、柱、基础及其组成的体系,铁路与公路桥梁等。结构按其几何特征可分为三种类型:杆件结构[图 1-1a)]、薄壁结构[图 1-1b)]和块体结构[图 1-1c)]。

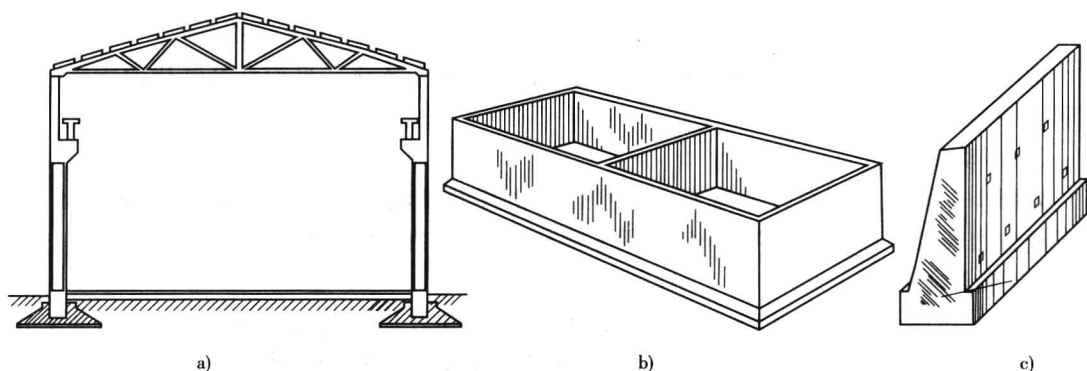


图 1-1 结构的类型

结构力学与理论力学、材料力学、弹性力学有密切关系。理论力学着重讨论刚体的静力学、运动学和动力学问题,而其他三门力学课程着重讨论弹性结构及其构件的强度、刚度和稳定问题,其中材料力学以单个构件为主要研究对象,结构力学以杆系结构为主要研究对象,弹性力学以实体结构和板壳结构为主要研究对象。

结构力学的研究任务是:

- (1)研究杆系结构的组成规律及其合理的组成形式,以及结构计算简图的合理选择。
- (2)研究杆系结构在荷载、温度变化和支座沉陷等因素作用下,结构各部分的内力计算和位移计算,以保证结构有足够的强度和刚度。
- (3)研究杆系结构在动力荷载作用下的结构动力响应。

结构力学作为土木类专业的一门重要技术基础课,在大学本科课程体系中起着承前启后的作用,它既要用到理论力学和材料力学的基础知识,也为后续的专业课程(如钢结构,钢筋混凝土结构)的设计提供计算方法。

## 1.2 结构的计算简图和分类

### 1.2.1 结构的计算简图

实际的建筑结构一般都很复杂,往往不能考虑所有因素去做严格计算,因此,对实际结构

进行力学计算前,必须加以简化,略去次要因素,显示其基本特点,以简化图形来代替实际结构。这种用以计算的简化图形,叫做结构计算简图。

确定计算简图的原则是:

- (1)保证设计上的足够精度;
- (2)使计算尽可能简化。

计算简图的确定,需要经过试验、实测和理论分析,并要经过多次工程实践的检验。

1.2.2 结构的简化

对实际结构的简化通常包括三个方面:①结构杆件的简化;②支座和结点的简化;③荷载的简化。

1)结构杆件的简化

在结构计算简图中,对杆件简化时,通常略去其具体形状,而以一根轴线来表示。

2)支座的简化

把结构和基础联系起来,以固定结构位置的装置,称为支座。平面杆系结构的支座一般有以下几种形式。

(1)活动铰支座

如图 1-2a)所示,杆端 A 沿水平方向可以自由移动,但沿竖向(沿支撑杆)不能移动,绕 A 点可以自由转动。因此只能发生竖向(沿支撑杆方向)反力[图 1-2b)]。

(2)固定铰支座

如图 1-3a)所示,杆端 A 绕 A 点可以自由转动,但沿任何方向均不能移动。反力的未知数有两个,为方便起见,将反力分解为两个互相垂直的分量,如图 1-3b)所示。

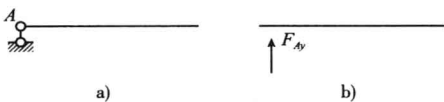


图 1-2 活动铰支座

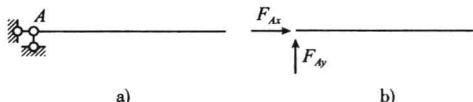


图 1-3 固定铰支座

(3)固定支座

如图 1-4a)所示,杆端不能移动也不能转动。反力的未知数有三个,可在杆端构成两个分反力以及力偶矩,如图 1-4b)所示。

(4)定向支座(又称滑动支座)

如图 1-5a)所示,这种支座只允许结构在沿支撑面方向滑动,而沿其他方向不能移动,也不能转动。反力未知数是两个,可在杆端简化为一个垂直于支撑平面的反力和一个力偶矩,如图 1-5b)所示。

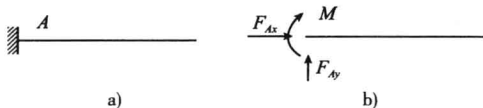


图 1-4 固定支座



图 1-5 定向支座

3)结点的简化

在杆件结构中,通常将杆件的相互联结处称为结点,尽管实际结构的结点构造是很复杂的、多样化的,但在确定结构计算简图时,其结点通常可简化为三类,即铰结点、刚结点和组合

结点。

(1) 铰结点[图 1-6a)]

该结点的特征是所联结的各杆件都可以绕结点自由转动,即铰结点上各杆间夹角可以改变。由于各杆端没有转动约束,相应地无杆端弯矩。

(2) 刚结点[图 1-6b)]

该结点的特征是所联结的各杆件不能绕结点自由转动,即在结点处各杆端之间的夹角始终保持不变。

(3) 组合结点[图 1-6c)、d)]

该结点的特征是在同一结点上,某些杆件间相互刚结,而另一些杆件间相互铰接,故又称为半铰结点。它同时具有以上两种结点的几何特征。

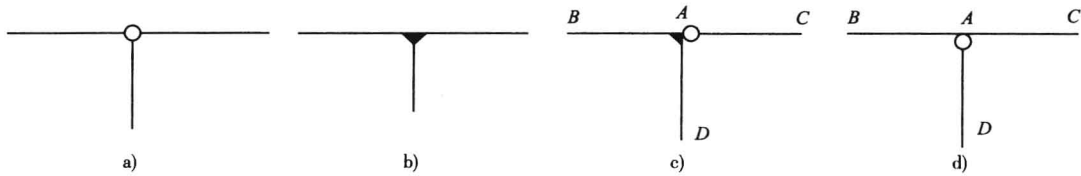


图 1-6 结点

4) 荷载的简化

结构承受的荷载可分为体积力和表面力两大类。体积力是指结构的自重或惯性力等;表面力是由其他物体通过接触面传给结构的作用力。这些荷载如果要准确地确定其大小、方向 and 作用将是困难的,必须适当简化。例如作用面积不大,但给予结构较大荷载的力(如汽车荷载),按集中荷载考虑;作用在较大面积上的荷载(如人群、自重和风力等)按分布荷载计算,相联部分给予结构反作用力,视联结处的构造情况按集中力、集中力偶计算。在杆系结构中把杆件简化为轴线,因此,所有荷载最后都简化为作用在结构纵轴线的三大类型荷载:线荷载、集中荷载和力偶荷载。

1. 2. 3 结构的分类

平面杆系结构,根据其组成特征和受力特点,可分为如下几种类型:

1) 梁

梁是一种受弯杆件,其轴线通常是直线。梁可以是单跨的或多跨的[图 1-7a)、b)]。



图 1-7 梁

2) 拱

拱的轴线为曲线,其力学特点是在竖向荷载作用下能产生水平支座反力[图 1-8a)、b)]。

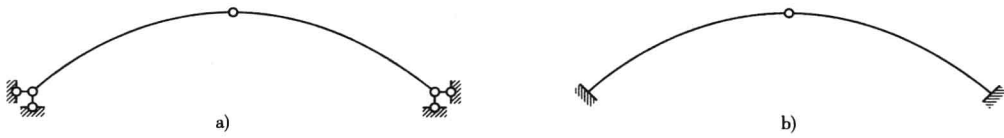


图 1-8 拱

### 3) 桁架

桁架由直杆组成,所有结点均为铰结点(图 1-9)。

### 4) 刚架

刚架是由梁和柱组成的结构,其结构特点是具有刚结点(图 1-10)。

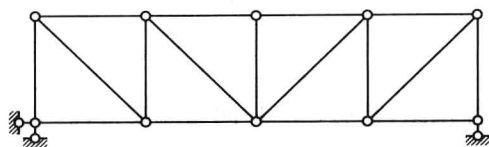


图 1-9 桁架

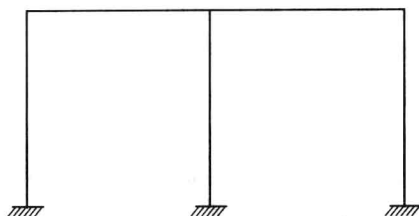


图 1-10 刚架

### 5) 组合结构

组合结构是桁架和梁或刚架组合在一起形成的结构,其具有组合特点(图 1-11)。

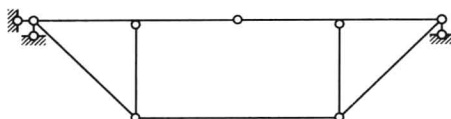


图 1-11 组合结构

## 1.3 荷载的分类

荷载是主动作用在结构上的外力,例如结构的自重,加于结构上的土压力等。除外力外,还有诸如温度变化、基础变位等也可以使结构产生内力和变形,因此,广义上说,这些因素也可以叫做荷载。

作用在结构上的荷载,按其不同特征可分为以下几种。

#### 1) 按荷载作用时间分为恒载和活载

恒载是指作用在结构上不变的荷载,例如结构的自重或土压力。

活载是指作用在结构上可变的荷载,例如楼面荷载、风荷载、雪荷载、吊车荷载等。

对结构进行计算时,恒载和大部分活载(如雪载、风载等)在结构上作用的位置可以认为是固定的,这种荷载叫做固定荷载;有些活载如吊车梁上的吊车荷载,桥梁上的汽车荷载等,在结构上的位置是移动的,这种荷载叫做移动荷载。

#### 2) 按荷载作用性质分为静荷载和动荷载

静荷载是指逐渐地、缓慢地自零开始增至终值的荷载,且荷载的大小、方向和位置不随时间而变。不产生加速度,不必考虑惯性力的影响。动荷载是指急剧施加在结构上的荷载,且其大小、方向和位置都随时间而变,因此产生加速度,必须考虑惯性力的影响。

#### 3) 按荷载的作用范围分为集中荷载和分布荷载

荷载的作用面积相对于总面积是微小的,作用在这个面积上的荷载,可以简化为集中荷载。分布作用在一定面积或长度上的荷载,可简化为分布荷载,如风、雪、自重等荷载。

#### 4) 按荷载位置的变化可分为固定荷载和移动荷载

作用位置固定不变的荷载为固定荷载,如风、雪、结构自重等。可以在结构上自由移动的荷载称为移动荷载,如吊车梁上的吊车荷载、公路桥梁上的汽车荷载。

## 第2章 平面体系的几何组成分析

### 2.1 基本概念

#### 2.1.1 几何体系的分类

由若干刚性构件按一定方式互相联结而成的杆件结构,称为结构体系。在荷载作用下,这种结构将发生变形。但是,如果它的变形相对于结构原尺寸非常小时,就可以不计这种变形,而认为其几何形状和位置不发生改变。凡是能够保持自身几何形状和位置不变的几何体系称为几何不变体系。如果不能保持,则称之为几何可变体系。

例如,如图 2-1a)所示,一个由两根主链杆和地基组成的铰接三角形体系,它在外力  $F$  作用下几何形状和位置不变,所以这个体系是几何不变的。而图 2-1b)所示三链杆则不然,它在某个很小的干扰力作用下,就会发生改动,变为虚线位置。这种体系就是几何可变体系。

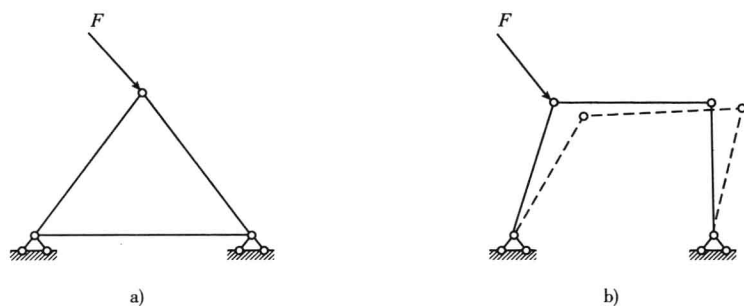


图 2-1 几何体系

#### 2.1.2 几何组成分析的目的

显而易见,一般结构必须是几何不变的,这样才能承受任意外荷载的作用。一个几何可变体系是不能作为结构的。因此,在对结构进行受力分析之前,必须对体系的几何组成和机动性质进行分析,简称几何组成分析。其目的有三:

- (1)判断一个体系是否几何可变,从而决定它能否作为结构;
- (2)研究几何不变体系的组成规律,以保证设计的结构能承受荷载而维持平衡;
- (3)为正确区别静定结构和超静定结构以及进行结构的内力计算打下必要的基础。

本章只讨论平面体系的几何组成分析。

#### 2.1.3 平面体系中的自由度

在对结构进行几何组成分析时,如果不考虑材料的应变,可以认为结构的各个构件没有变形。因此把体系中已判定为几何不变的某个部分,比如一根梁、一根链杆等,可以看做一个平面刚体,简称刚片。

为了对体系进行几何组成分析,必须了解体系的自由度。所谓自由度是指体系作刚体运

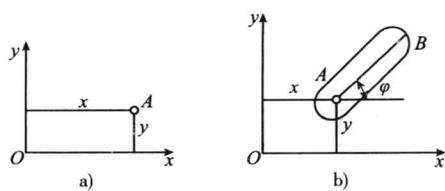


图 2-2

动时,可以独立变化的几何参变数的个数,也就是独立确定体系的位置所必须的独立坐标的个数。例如,确定图 2-2a)中平面坐标内一个运动的点,需要用  $x$ 、 $y$  两个坐标,那么一个点的运动自由度就等于 2。再如,确定图 2-2b)中平面坐标内一个刚片的位置,可由其上面任一点  $A$  的坐标  $x$ 、 $y$  及通过  $A$  点的任一条直线  $AB$  与  $x$  轴的倾角才能确定,所以一个刚片在平面内的自由度等于 3。

## 2.1.4 平面体系中的约束

### 1) 约束的概念

对体系施加某种限制的装置,就能减少自由度,这种装置称为约束。凡是能使体系减少一个自由度的装置称为一个约束。因此,对体系施加几个约束,就可使它减少几个自由度。结构中的理想铰和支座链杆就是这种约束。

如图 2-3 所示,用一根链杆将一个刚片与地基相连,则此刚片与链杆联结点  $A$  将不能沿链杆方向移动,因而减少了一个自由度,可见加入一根支座链杆可以减少一个自由度,即一根链杆相当于一个约束。

### 2) 单铰

对于彼此毫无联系的刚片 I、II,在平面内各有 3 个自由度,总共 6 个自由度。用一个铰  $A$  把它们联结起来,如图 2-4 所示,这种联结两个刚片的铰称为单铰。刚片 I 的位置由 3 个自由度确定后,刚片 II 只能绕  $A$  点转动,其位置由一个倾角  $\theta$  就可以完全确定下来。因此,两个刚片用一个单铰联结后,体系的自由度由 6 个减少为 4 个。可见,一个单铰相当于两个约束,也就是相当于两根连杆的作用。

### 3) 复铰

如果用一个铰同时联结三个或三个以上的刚片,这种铰称为复铰,如图 2-5 所示。当刚片 I、II、III 用铰  $A$  相联结时,若刚片 I 的位置由  $A$  点的坐标  $(x, y)$  和倾角确定后,刚片 II、III 都只需一个坐标便可完全确定。因此各减少 2 个自由度(共减少 4 个自由度)。可见联结三刚片的复铰相当于两个单铰的约束作用。

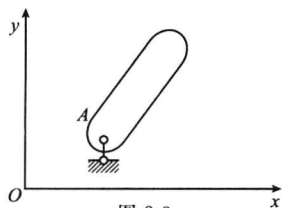


图 2-3

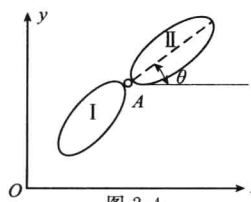


图 2-4

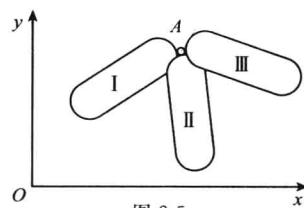


图 2-5

由此可推知:联结几个刚片的复铰相当于  $n-1$  个单铰的作用。

## 2.2 计算平面体系的自由度

### 2.2.1 平面体系自由度公式

#### 1) 计算平面刚片体系的自由度

一个平面体系,通常都是由若干个刚片加入某些约束所组成。这种体系的自由度为

$$W = 3m - (2h + r) \quad (2-1)$$

式中,  $m$  为刚片数;  $h$  为单铰数;  $r$  为支座链杆数。

当遇到复铰(联结两个以上刚片的铰)时,应先换算成相当数目的单铰数,然后再代入式(2-1)中计算。

## 2) 计算平面链杆体系的自由度

如果平面体系中,杆件两端全部用铰联结,则这种体系称之为铰接链杆体系,比如桁架结构。这种链杆体系的自由度为

$$W = 2j - (b + r) \quad (2-2)$$

式中,  $j$  为桁架的结点数;  $b$  为杆件数;  $r$  为支座链杆数。

## 3) 计算平面体系内部的自由度

在工程实际中,有时只需分析体系本身的几何特性,为此需要计算体系的内部自由度数。由于不变体系可看成一个刚杆,它有 3 个自由度,因此体系内部的自由度为

$$V = 3m - (2h + 3) \quad (2-3)$$

式中,  $V$  为体系本身的内部自由度数;  $m$  为体系本身的刚片数;  $h$  为体系本身的单铰数。

如果  $V \leq 0$ , 则体系满足内部几何不变所需的必要条件。

## 2.2.2 自由度讨论

按照式(2-1)和式(2-2)计算的结果,有如下三种情况:

- (1)  $W > 0$ , 表明体系有运动的自由,因而体系是几何可变的;
- (2)  $W = 0$ , 表明体系有保证几何不变所需的最少约束数目,但不一定就是几何不变的;
- (3)  $W < 0$ , 表明体系有多余的约束存在,但也不一定就是几何不变的。

由此可见,一个体系当  $W \leq 0$  是保证其几何不变的必要条件,但不是充分条件。这是因为体系的约束如果安排、布置得不恰当,仍会造成体系的一部分有多余约束而另一部分则约束不足,从而使整个体系仍然几何可变。为了判定体系的几何不变性,还必须进一步分析几何不变体系的合理组成规则,以便提出保证结构几何不变的充分条件。

## 2.3 几何不变体系的组成规则

虽然一个体系具有足够数目的约束,但若是布置不当,仍会成为几何可变体系。下面讨论几何不变体系的组成规则,以用作判断体系几何可变与否的依据。

### 2.3.1 三刚片规则

三刚片规则描述:三个刚片用三个不在同一直线上的三个单铰两两相联,则所组成的体系是几何不变的。

#### 1) 三刚片用三个铰相联

设有三个刚片 I、II、III,用 3 个铰两两相联,构成一个三角形 ABC,如图 2-6 所示。此体系从几何上看,它的几何形状是不会改变的。从运动看,若假定刚片 I 固定不动,则刚片 II 只能绕 A 点转动,其上的 C 点只能在以 A 点为圆心、AC 为半径的圆弧上运动,而刚片 III 只能绕铰 B 转动,其上的 C 点只能以 B 为圆心、BC 为半径的圆弧上运动,但刚片

II 和刚片 III 已被铰 C 连接,可见各个刚片不可能发生任何相对运动,因此这样组成的体系是几何不变的。

三刚片规则也可称为三角形规则,即一个铰接三角形,如果它的三个铰不共线,此铰接三角形是几何不变的。它是组成几何不变体系的最基本组成规则,下面两个组成规则都可从它演变而得。

2)三刚片完全用链杆相联

设有三个刚片,用 6 根链杆两两相联结,如图 2-7 所示。因为两根链杆的约束作用相当于一个单铰。6 根链杆中两两链杆分别相交于三个点(1,2)、(2,3)、(1,3)。通常把两根链杆的实际交点称为实铰,而把两链杆延线的交点称为虚铰或称瞬铰。虚铰位置是随链杆的位置改变而变动,在实际上并不存在真实的虚铰。

由此可见,这里的(1,2)、(2,3)、(1,3)就是虚铰,只要这三个虚铰不在同一直线上,这个体系就是几何不变的。

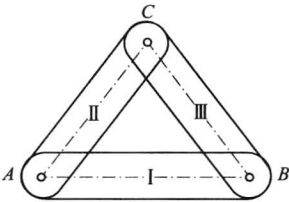


图 2-6

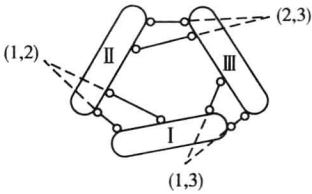


图 2-7

2.3.2 两刚片规则

两刚片规则描述:两个刚片用一个单铰和一根不通过该铰的链杆相联,或用三根既不全平行也不交于一点的链杆相联结,则所组成的体系是几何不变的。

1)两刚片用一个单铰和一根链杆联结

设有两个刚片 I、II,用一个单铰 A 和一个不通过铰 A 的链杆 BC 相联,如图 2-8 所示。若 BC 杆看作刚片 III,则此种体系实际上就是三个刚片 I、II、III 用不在一直线上的三个铰 A、B、C 两两相联而成,属于几何不变体系。由此可知,两刚片规则中的这条用一个铰和一根不通过铰心的链杆组成规则本质上就是三刚片规则。

2)两刚片用三根链杆联结

设有两刚片 I、II,用不汇交于一点也不完全平行的三根链杆 1、2、3 相联结,如图 2-9 所示。其中 1、2 两杆的延长线相交于虚铰 O,这样刚片 I、II 的联结就相当于两个刚片用虚铰 O 和一根不通过铰 O 的链杆 3 相联而成的体系,这种体系是几何不变的。

由此可知,如果两个刚片用三根既不相交于一点也不完全平行的链杆相联,则该体系是几何不变的。

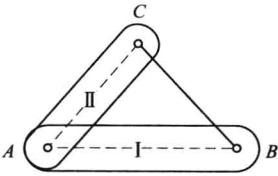


图 2-8

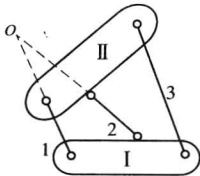


图 2-9

### 2.3.3 二元体规则

如图 2-10 所示,在一个刚片上用两根不在一直线上的链杆联结一个新结点,按这种方式加上去的两根链杆,称为二元体。二元体规则描述:在一个体系上增加或减少二元体,不会改变原体系的几何不变或几何可变量性质。

如图 2-11 所示的体系是按三刚片规则组成的。但也可以这样看:其中的两个刚片看作是链杆,是在一个刚片上增加二元体,仍为几何不变体系。或者说,二元体规则实质上也是三刚片规则。

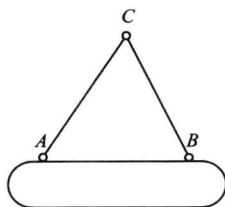


图 2-10

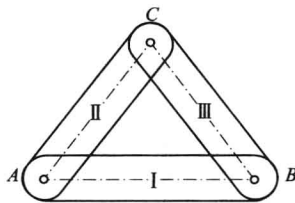


图 2-11

对于桁架体系,用二元体规则分析特别方便。先将一个铰接三角形选作刚片,在此基础上依次增加一个二元体,得几何不变体系,然后以此方式增加二元体直至最后组成桁架,最后推断此桁架是否是几何不变体系。当然,也可以反过来,用拆除二元体的方法来分析体系是否几何可变。从一个体系拆除一个二元体后,并不改变原来体系的几何组成。

## 2.4 瞬变体系的组成规则

### 2.4.1 瞬变体系的概念

在前面讨论几何不变体系规则时,各条规则中都附有一些限制。例如,联结两刚片的三根链杆不能完全交于一点,也不能完全平行;联结三刚片的三个铰不能在同一直线上,等等。

下面来分析,如果不满足上述限制条件时,体系将会出现怎样的结果。

如图 2-12 所示的两个刚片 I、II,用三根链杆相联结,各杆的延长线交于 O 点,此时,体系的两刚片可以绕 O 点作微小的相对转动,体系是几何可变的。但是经过相对转动后,三根链杆就不再交于一点,从而不再继续发生转动,体系变成几何不变的。这种在某个瞬时可以发生微小相对转动的体系,称为瞬变体系。

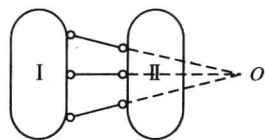


图 2-12

### 2.4.2 瞬变体系的组成规则

#### 1) 三根链杆汇交于一点的体系

当刚片 I、II 用三根汇交于一点 C 的链杆 1、2、3 相联结时,此时三杆的交点 C 是实铰。C 点是刚片 I、II 的转动中心,因而同样是几何可变体系。

#### 2) 三根链杆互相平行的体系

如图 2-13 所示的体系,即是两刚片 I、II 用三根相互平行但不等长的链杆相联结。这时刚片 I、II 可绕无穷远处虚铰作相对转动。若三根链杆的顶端产生相等的水平位移,但

因三根链杆长度不等,所以转角并不相等(或不全相等),三根链杆也不再相互平行而构成瞬变体系。

同样,刚片 I、II 用三根相互平行且等长的链杆相联结,如图 2-14 所示的体系。当刚片 I、II 产生相对运动后,三根链杆仍相互平行而继续产生相对运动,因此是几何可变体系,又称之为常变体系。瞬变体系和常变体系都属于几何可变体系。

### 3) 三个铰位于同一直线上的体系

设有刚片 II 和刚片 III 用铰 C 相联,而铰 A 和铰 B 分别与地基相联,A、B、C 三铰位于同一直线上,如图 2-15 所示。若将地基看作刚片 I,则此体系属于三刚片用 3 个铰两两相联结。此时,C 点位于 AC 和 BC 为半径的两个圆弧的公切线上,故 C 点可沿此公切线作微小的移动。不过在发生一个微小的移动之后,这三个铰就不再位于一直线上,运动停止,故此体系是几何瞬变体系。

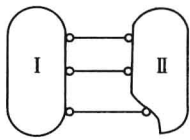


图 2-13

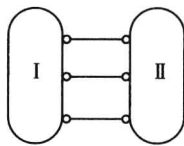


图 2-14

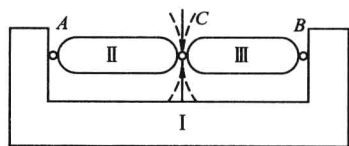


图 2-15

综上所述,从几何组成分析看,结构体系可分为几何不变体系和几何可变体系两种类型,而几何可变体系又可分为常变和瞬变两类。对于工程结构,显然不能采用几何可变体系,而只能采用几何不变体系。

## 2.5 几何组成分析举例

### 2.5.1 几何组成分析思路

根据体系的几何组成,分析它是否几何可变,称为体系的几何组成分析。结构几何组成分析的一般思路是:

- (1)对于一般体系作几何组成分析时,可以不必计算其自由度而直接根据几个简单组成规则作几何组成分析;
- (2)对于较复杂体系的几何组成分析,则应先计算其自由度,以判断它是否具有足够维持几何不变的约束,再用简单几何组成规则进行几何组成分析;
- (3)如果用简单几何组成规则无法直接判定是否几何不变,则可以找出体系的几何不变部分,把它作为刚片,再按组成规则逐次扩大刚片的范围,以对整个体系作出判别。为简化分析,可先拆除体系的二元体,然后再做分析。

### 2.5.2 几何组成分析例题

【例 2-1】试分析图 2-16 所示多跨静定梁的几何组成。

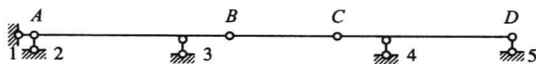


图 2-16

解：

(1) 先将地基看作一个刚片，然后看  $AB$  部分，它与地基用三根不汇交于一点又不互相平行的三根链杆相联结，符合两刚片规则，因而是几何不变的。

(2) 再把  $AB$  部分和地基看作是扩大了刚片，它与  $CD$  又是用三根既不汇交于一点又不互相平行的链杆相联结，也符合两刚片规则。

因此，整个体系是几何不变的，并且没有多余联系。

【例 2-2】试分析图 2-17 所示体系的几何组成。

解：

(1) 首先在地基上依次增加  $ACB$  和  $CDB$  两个二元体，并将所得部分视为刚片 I。

(2) 再将  $EF$  部分看作另外一个刚片 II，该刚片和刚片 I 通过链杆  $ED$  和  $F$  处两根链杆相联结，而这三根链杆既不全交于一点又不完全平行，符合两刚片规则。

故该体系是几何不变的，并且没有多余联系。

【例 2-3】试对图 2-18 所示体系作几何组成分析。

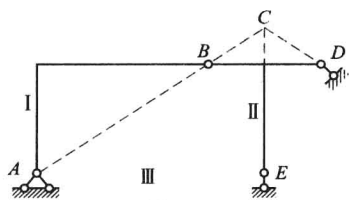


图 2-18

解：

(1) 将  $AB$ 、 $BED$  和地基分别作为刚片 I、II、III。

(2) 刚片 I 和 II 用铰  $B$  相联结；刚片 I 和 III 用铰  $A$  相联结；刚片 II 和 III 用虚铰  $C$  相联结。

从图 2-18 中可知，三个铰在一直线上，故该体系为几何瞬变体系。

【例 2-4】分析图 2-19 中所示体系的几何组成。

解：

(1) 刚片 I 和 II 之间由链杆  $AB$  和  $DE$  连接（交于  $G$ ），相当于由一个虚铰  $G$  相联结。

(2) 同理刚片 II 和 III 之间由虚铰  $H$  相联结；刚片 I 和 III 由虚铰  $I$  相联结。

由于三个虚铰不共线，因此体系是几何不变的，且无多余约束。作为一个整体，体系对地面有三个自由度。

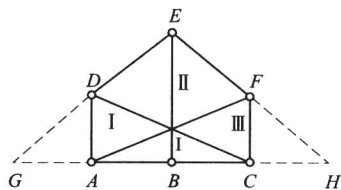


图 2-19

【例 2-5】分析图 2-20 中所示体系的几何组成。

解：

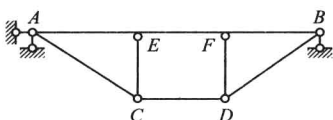


图 2-20

(1) 将  $AB$  和地基分别作为刚片 I、II。它们用不汇交于一点也不完全平行的三根链杆相联结，成为几何不变部分。

(2) 在刚片 I、II 的基础上，再增加  $ACE$  和  $BDF$  两个二元体，不改变体系的几何不变性。

(3) 结点  $C$  和  $D$  已被约束，在它们之间的链杆  $CD$  显然是多余的约束。

故此体系为具有一个多余约束的几何不变体系。