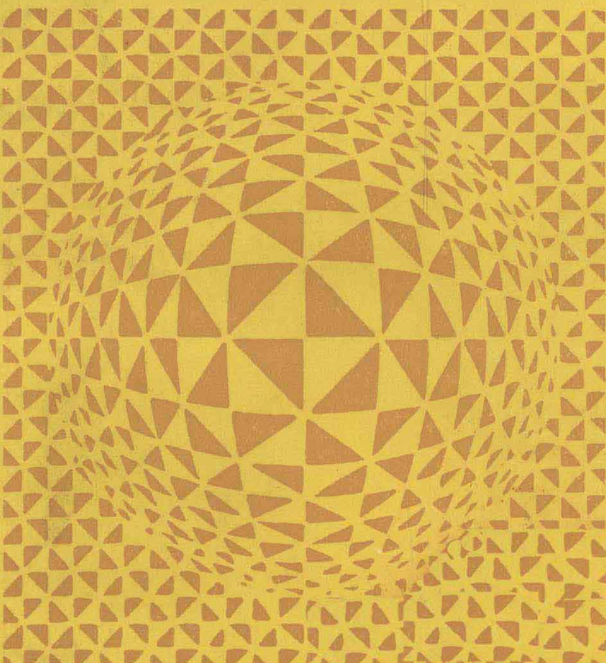
九年制义务教育初中数学读物

主编 罗四维 杨泰良

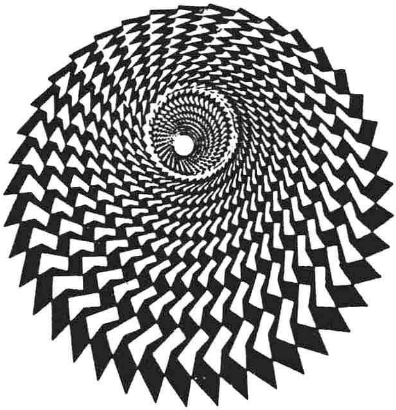
圆

朱志嘉



四川教育出版社

九年制义务教育初中数学读物



主编 罗四维 杨泰良

圆

朱志嘉

四川教育出版社
九九二年二月·成都

（川）新登字 005 号

责任编辑：何伍鸣

封面设计：何一兵

九年制义务教育初中数学读物

圆　　朱志嘉

四川教育出版社出版发行　　（成都盐道街三号）

四川省新华书店经销　　乐山市印刷厂印刷

开本 787×960 毫米 1/32　　印张 4　插页 1　字数 70 千

1992 年 8 月第一版　　1992 年 8 月第一次印刷

印数：1—4740 册

ISBN7－5408－1731－3/G·1653　　定价：1.45 元

前言

这套读物主要是为初中学生而写的。我们当然希望，这套书对于执教中学数学的老师们也非常适用。

中学生的书包已经很沉了，在推出这套读物之前，我们已深有感触。作为教师和家长，我们常见到孩子们老是摆弄他们那些堆积如丘的题集，并深埋其间。书店里又似乎难于使这些小读者们满意地挑出几本自己真正喜爱的数学图书，这无疑是一桩憾事。在今天，在大力倡导“素质教育”、“公民教育”的九年制义务教育的时代要求下，该做些什么呢？

我们主张激励学生学习的自发因素，让孩子们在志趣的牵引下主动、愉快地学习；主张开阔学生的知识视界，让他们能见多识广；主张启动学生的高级心理活动，发展他们的思维能力和认识能力。为此，编写一些有益于启迪学生智力、开拓知识视野、激发学习兴趣、加深对课本知识理解的数学读物是十分必要的。这就是编写这套读物的初衷。

这套书是按知识专题来编写的（个别册子除外）。各专题都紧扣九年制义务教育初中数学课本的基础知识，并适当加深、拓广，联系知识的产生发展过程，揭示知识之间的内在联系，着重分析内容

反映的数学思想、原理、方法和实际应用。本书注重取材的新颖、叙述的生动、思想方法的引导，力求能适应初中不同层次学生的需要，能为九年制义务教育的发展起积极的配合和促进作用。我们也编拟了适量的练习题，以巩固、加深对课本知识的理解掌握，也提供一部分给学有余力或热心参加数学竞赛的学生选用。

我们的意愿未必能都形诸于笔端，呈现给读者的这套图书，尚祈请各方指正。

本套读物由杨泰良、罗四维修改、统稿。

1992年2月

目　录

一　奇妙的圆……………………………………(1)

§1　圆的世界 ……………………………(1)

§2　圆的数学美 …………………………(2)

§3　决定圆的条件 ………………………(3)

习题一…………………………………………(6)

二　直线与圆……………………………………(8)

§1　弦 ……………………………………(8)

§2　切线…………………………………(11)

§3　与圆有关的角………………………(17)

§4　与圆有关的比例线段………………(23)

习题二 ………………………………………(27)

三　多边形与圆 ………………………………(35)

§1　三角形与圆…………………………(35)

§2　四边形与圆…………………………(42)

§3　正多边形与圆………………………(53)

习题三 ………………………………………(61)

四　圆与圆 ……………………………………(71)

§1　两圆的位置关系……………………(71)

§2　两圆的公切线……………………… (75)
§3　根轴……………………………… (80)
习题四 ……………………………… (81)

五　趣味无穷的π ……………………… (89)

附　习题答案或提示 ………………… (93)

一　奇妙的圆

§1　圆的世界

晨曦，当和煦的阳光和清新的空气唤醒了你，你便步入了圆的世界！

看一看圆盘钟面上显示的时间，迅速地扣好一颗颗圆纽扣；圆口的搪瓷盅内盛满漱口水，端起了圆口脸盆；洗漱完毕，又忙着浇润圆口花盆里的黑土，烧好开水灌满圆柱形的保温瓶；在圆口铁锅、圆口铝锅内煮好热腾腾的早餐，用乖巧的圆口磁碗盛上香喷喷的鸡蛋；……

户外，一轮红日令人容光焕发，汽车轮飞奔，自行车轮飞转；高耸的圆烟囱，笔挺的圆水泥电杆，郁郁葱葱粗壮滚圆的林荫大树，……

还有，你手中的笔，你喜爱的篮球、足球、乒乓球，给你带来光明的日光灯管，不胜枚举.

工厂里，大自飞轮、锅炉，小至铁钉、微型螺帽，都有圆的点缀；车床、钻床、各型电机上那些大大小小的圆型零部件琳琅满目，令人目不暇接.

步入农村，那些昼夜不停转动的水车，一堆又一堆的草垛，晒坝中墙壁上的圆簸箕，石磨、水碾、手推车轮子随处可见.

在部队，你会看到枪管、炮膛、战车轮、……

按下电视机键，你又看到了呼啸向前的火车铁轮，乘烈焰而腾空的庞大的长征火箭，……

地球、月亮、闪烁的星星、……

这一切的一切，无不与圆有关！圆，是人类生活中不可缺少的伴侣；圆，是世界交响乐中不可缺少的篇章！

人们不得不千方百计认识圆、研究圆、应用圆.

§2 圆的数学美

圆是美的一种象征.

舞台、居室、衣着装饰要用圆来装衬；对家庭、民族、国家的良好祝愿要用“大团圆”来表达.

数学中的圆是绝对地匀称.

请你注意这样两句话：

(1) 圆上各点到定点（圆心）的距离都等于定长（半径）——圆上的点是多么纯粹，没有一个点是例外，能够鱼目混珠；

(2) 到定点的距离等于定长的点都在圆上——圆上的点是多么完备，再不会有其他哪个点能例外，成为漏网之鱼.

由于圆上每一点到圆心的距离都等于半径，因此，一个圆绕它的圆心随意转动任何角度所得到的圆都和原来的圆重合. 在数学中，利用这一特性可

以推导圆的许多性质；在实践中，由于有了这一特性，自行车、汽车、火车、战车轮子不管怎样转动，其轴心离地面（或铁轨）的距离始终等于半径，保证了车体的平稳而不至于上下颠簸.

数学中的圆完美地对称.

圆既是中心对称图形，圆心是其对称中心；圆又是轴对称图形，而且是非常特殊的轴对称图形，它的任何一条直径所在直线都是其对称轴，即圆有无数条对称轴. 利用圆的轴对称和中心对称这两点特性，可得到圆的许许多多重要性质.

继续学习下去你会进一步感受到，圆不仅具有形态美，还蕴藏着丰富的神秘而又可知的内在美. 圆能体现直和曲的对立与统一，圆能展示简单化和复杂化的矛盾与和谐，圆能反映形和数的联系与转化，圆是美丽的数学花园中的一支奇葩！

§3 决定圆的条件

1. 圆心与半径决定圆

如果只规定以点 O 为圆心，那么，可以作出无数个同心圆. 因此，圆心能决定圆的位置，但不能决定圆的大小.

如果只规定以 r 为半径，那么，可以作出无数个大小相等的圆. 因此，半径能决定圆的大小，但不能决定圆的位置.

如果以点 O 为圆心，以 r 为半径，就能够作并且只能够作一个⊙O（图 1—1）. 因此，圆心与半径能够决定一个圆.

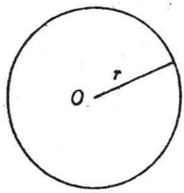


图 1—1

2. 经过三点的圆

我们知道，经过一点能作无数个圆（图 1—2）；经过两点也能作无数个圆，其圆心在这两点所连线段的垂直平分线上（图 1—3）.

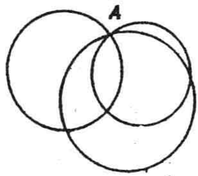


图 1—2

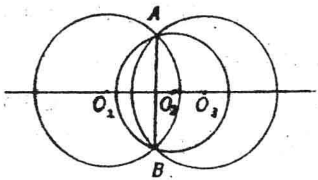


图 1—3

要是过不在一直线上的三点作圆又会得到什么样的结果呢？

第一个问题是，经过不在一直线上的三点 A、B、C 的圆是否存在？数学中回答这样的问题无非是两种可能答案. 一是以某种方法作出了符合条件的图形，从而证明了符合条件的图形存在；另一是假定符合条件的图形存在则必然产生矛盾，从而证明了符合条件的图形不存在. 回到这个问题的本身，我们将证明，过不在同一直线上三点 A、B、C 的圆存在.

作线段 AB 的垂直平分线 DE，作线段 BC 的垂

直平分线 FG. 因 AB、BC 不在一直线上，则 DE 与 FG 必交于一点 O，且有 $OA=OB=OC$，以 O 为心，以 OA 为半径作⊙O，⊙O 必经过 A、B、C 三点（图 1－4），这就证明了过不在一直线上的三点的圆确实存在.

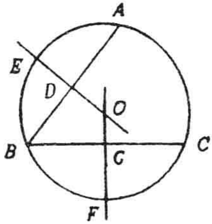


图 1—4

第二个问题是，经过不在一直线上的三点的圆是否唯一？数学中回答这样的问题也无非是两种可能答案，一种是又作出了符合条件的，且与存在性证明中已作出图形不同的第二个图形，从而否定了唯一性；另一种是假定另有一个符合条件的第二个图形，便必然会产生矛盾（反证法），或者必与前一个图形重合（同一法），从而肯定了唯一性. 值得提醒读者注意的是，仅仅凭存在性证明中所采用的作图方法只能作出唯一图形，就贸然断言唯一性，在数学逻辑上是错误的. 因为这并不保证存在性证明中的作图方法是唯一的方法. 同样，回到这个问题本身，我们将按后一种方式证明，过不在一直线上三点 A、B、C 的圆是唯一的.

假定经过不在一直线上的三点 A、B、C 另有⊙O'，因 $O'A=O'B$，点 O' 在 AB 的垂直平分线 DE 上；又 $O'B=O'C$，点 O' 又在 BC 的垂直平分线 GF 上，而 DE 与 GF 只能有一个交点，O' 与 O 必为同一点，从而半径 $O'A$ 即为 OA. 所以，⊙O' 与⊙O 必为

同一圆，这就证明了，经过不在一直线上的三点的圆是唯一的.

把上述存在性与唯一性两层意思合起来就是：过不在一直线上的三点可以作一个且只可以作一个圆. 这句话也可以简述为，不在同一直线上的三点确定一个圆.

请大家注意，“确定”二字在这里已经不是顾名思义的普通词，而是赋予了特定含义的数学用语. 其含义一是指圆要过这三点，二是指这样的圆有且只有一个.

对于同在一直线上的三个点又是怎样的情形呢？用反证法可以证明，这样的三点不能确定圆.

假设过同一直线 l 上三点 A、B、C 有一个圆为 $\odot O$，那么，一方面线段 AB 的垂直平分线 DE 与线段 BC 的垂直平分线 GF 应交于圆心 O；另一方面由于 $DE \perp l$，$GF \perp l$，又得 $DE /\!/ GF$，所产生的矛盾说明过 l 上三点 A、B、C 的圆不存在.

习 题 一

1. 每一个图形既成中心对称又成轴对称的图形组是（　　）

　(A) 圆、菱形、正三角形、直线、线段

　(B) 圆、直线、线段、正多边形

　(C) 圆、直线、线段、菱形、正 $2n$ 边形

（D）圆、线段、菱形、正五边形、等腰梯形

2. 有无数条对称轴的图形（　）

（A）只有圆　　　（B）有圆和正方形

（C）有圆和正多边形（D）有圆和直线

3. "中心对称图形只能有唯一的对称中心"这句话对吗？为什么？

4. 平面上有不在一直线上的 4 点，过其中 3 点作圆，共可作几个圆？

5. 平面上有 4 点，任 3 点均不在一直线上，其中每 3 点确定一个圆，共可确定几个圆？

6. 有 A、B、C 三点，$\angle ABC=120°$，$AB=BC=5\text{cm}$，求过这三点所作圆的直径长.

7. 求证：菱形各边中点在同一圆上.

8. 求作通过两已知点 A、B 且有已知半径 r 的圆.

9. 求作一个圆使它过两已知点 A、B，且圆心在已知直线 l 上.

10. 利用三角形的外心证明三角形的三条高交于一点.

二　直线与圆

§1　弦

我们知道，直线与圆的位置关系有如图 2－1 所示的三种.

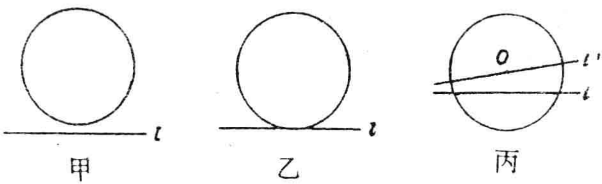


图 2—1

注意图丙，可知“割线被圆所截得的线段称为弦”与“连结圆上任意两点的线段叫做弦”其实是殊途同归. 由图 2－1 还可看出，弦分为直径弦与非直径弦两类.

关于弦的性质，很重要的是垂径定理.

垂径定理：垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的弧.

剖析垂径定理，有两条题设，两条结论，如图 2－2，$\odot O$ 中，非直径弦是 AA'，直径为 CD. 那么，

题设：(a) CD 过圆心 O；(b) $CD \perp AA'$.

结论：(c) CD 平分 AA'；(d) CD 平分 $\overset{\frown}{AA'}$（或 $\overset{\frown}{ACA'}$）.

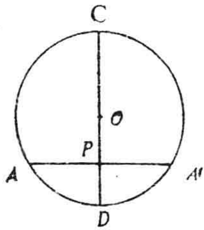


图 2—2

将题设条款与相等数目的结论条款交换就得到垂径定理的逆命题.

	垂径定理	逆命题				
		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
题设	(a)、(b)	(a)、(c) 直径平分弦	(a)、(d) 直径平分弧	(c)、(b) 直线垂直平分弦	(d)、(b)	(c)、(d)
结论	(c)、(d)	(b)、(d)	(c)、(b)	(a)、(d)	(c)、(a)	(a)、(b)
制作方式		(a)不动		(b)不动		全部互换
		(b)、(c)互换	(b)、(d)互换	(a)、(c)互换	(a)、(d)互换	

逆命题的前（1）、（2）、（3）就是：

推论 1：（1）平分（不是直径的）弦的直径垂直于弦，并且平分弦所对的弧；（2）平分弦所对的一条弧的直径垂直平分弦；（3）弦的垂直平分线经过圆心，并且平分弦所对的弧.

表中的逆命题（4）、（5）又该如何叙述呢？（留作习题）

关于弦的另一重要性质是：

推论 2：圆的两条平行弦所夹的弧相等.

推论 2 可利用推论 1 得证，也可直接借助于对

称性得证.

如图 2—3，$\odot O$ 中，弦 $AB /\!/$ 弦 CD，作直径 $MN \perp AB$，则 $MN \perp CD$，以直线 MN 为对称轴，A、C 的对称点分别是 B、D，所以，$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$.

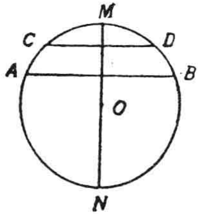


图 2—3

利用垂径定理与勾股定理可以得到圆半径 r、弓形高 h、弦长 d 之间的一个非常有用的关系式，如图 2—4，有

$$OA^2 = OC^2 + AC^2,$$

即 $$r^2 = (r-h)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2.$$

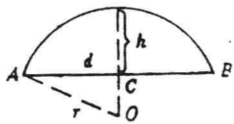


图 2—4

自然，这一关系式可结合图形利用勾股定理写出，而不宜死记.

某圆的所有弦中，显然以直径为最长，且无最短的弦.

若过已知圆内某已知点 P 引弦（图 2—2），则与过此点 P 的直径 CD 垂直的弦 AA' 是最短的弦.

例 求证：顺次连结圆的相交二直径的端点得矩形.

证明：二直径是所连四边形的对角线. 同圆中，直径相等且互相平分，即四边形的对角线相等且互样平分，这样的四边形必是矩形.