高等数学

张万国 编

Higher Mathematics

复旦大学出版社

高 等 数 学

张万国　编

復旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/张万国编. —上海:复旦大学出版社,2011.12
ISBN 978-7-309-08563-1

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 张…　Ⅲ. 高等数学-成人高等教育-教材　Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 227385 号

高等数学
张万国　编
责任编辑/张志军

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号　邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com　http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857　团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143
大丰市科星印刷有限责任公司

开本 787×960　1/16　印张 21　字数 368 千
2011 年 12 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-08563-1/O · 482
定价: 45.00 元

内 容 提 要

高等数学是大学的基础课程，大学的极大多数专业都要学习高等数学. 因此有一本适合学生的教材是很重要的. 我们根据教育部对继续教育学院的教学要求，结合近年来继续教育学院学生的特点，编写了本教材. 本书尽可能利用几何图形对一些概念加以说明，使学生有一个直观的理解；舍去了一些定理的严密证明，而代以几何说明. 这样做，从数学角度看不严密，但学生易懂易理解. 书中列举了大量的例题和计算题，其中一部分可供学生练习，也可供教师作为例题讲解. 习题中也有少量的证明题，以提高学生的分析推理能力. 部分带有 * 的习题有一定难度，初学的同学可以略去不做.

前言 Preface

高等数学是大学的基础课程.大学的极大多数专业都要学习高等数学,因此有一本适合学生的教材非常重要.本书就是根据教育部对继续教育学院的教学要求,结合近年来继续教育学院学生的特点编写的一本教材.

高等数学的内容比较多,有些概念比较抽象.在编写本书时,尽可能利用几何图形对一些概念加以说明,使学生有一个直观的理解;舍去了一些定理的严密证明,而代以几何说明.这样做,从数学角度看不严密,但学生易懂易理解.在教学中,应该将理解概念、掌握基本计算方法为重点,通过学习,使学生懂概念,会计算.在本教材中列举了大量的例题,同时在习题里有大量的计算题,其中一部分可供学生练习,一部分可供教师作为例题讲解.习题中也有少量的证明题,以提高学生的分析推理能力.部分带有*的习题和章节有一定难度,初学的同学可以略去.

本教材共7章,不同专业可以根据教学大纲选择适当的章节进行讲解.

本教材由复旦大学继续教育学院教务办公室组织编写.复旦大学继续教育学院的徐忠院长、江国伟副院长对教材编写给予极大的关心和支持,继续教育学院的徐志玮、陈炳元两位老师和编者多次反复讨论教材的内容,许多任课教师在使用过程中,对教材的具体编写给了很多宝贵的意见和建议,在此深表感谢!

由于水平有限,若有不当之处请读者指正.

编　者

2011.10

目 录 Contents

第1章

函数 极限 连续

极限理论是高等数学的基础，在这一章中，我们将研究极限的一些重要性质，介绍一些重要极限. 在此基础上将研究函数的连续性. 这些都是学习微积分所必备的基础知识.

§1.1 一元函数

一、函数概念

在现实世界的同一个问题中，往往出现几个变量在变化，它们通常不是孤立地变化，而是彼此间有着依赖关系.

例 1.1.1 在自由落体运动中，路程 s 随时间 t 而变化，它们之间的依赖关系是

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\quad 0\leqslant t\leqslant t_1,$$

其中 $0\leqslant t\leqslant t_1$ 表示 t 的变化范围，是物体下落到地的时间. $s=\frac{1}{2}gt^2$ 给出了 s 依赖于 t 的变化规律.

例 1.1.2 2010 年我国工薪所得税定为：月收入扣除免税部分后少于 2 000 元，免征所得税；月收入扣除免税部分后，超过 2 000 元，超过部分则应缴纳所得税，则月收入扣除免税部分和 2 000 元后的缴税金额 x 元和所得税 y 之间的函数关系为

$$y=\begin{cases}0.05x, & x\leqslant 500,\\ 0.1x-25, & 500<x\leqslant 2\,000,\\ 0.15x-125, & 2\,000<x\leqslant 5\,000,\\ 0.2x-375, & 5\,000<x\leqslant 20\,000,\\ 0.25x-1\,375, & 20\,000<x\leqslant 40\,000,\\ 0.3x-3\,375, & 40\,000<x\leqslant 60\,000,\\ 0.35x-6\,375, & 60\,000<x\leqslant 80\,000,\\ 0.4x-10\,375, & 80\,000<x\leqslant 100\,000,\\ 0.45x-15\,375, & 100\,000<x.\end{cases}$$

这是一个分段函数.

有时变量间的依赖关系也可以用图表来表示.某气象台用人工记下某一昼夜气温随时间变化的情况,用自动仪器记录一昼夜气温随时间变化的情况如下:

时间(时)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
温度(℃)	9	10	13	14	15	16	18	17	15	12	10	9

上表具体地表示出温度 T 随时间 t 变化的规律:对某一确定的 t,有一个确定的 T 与它对应.并且可以大致认为 $t=17$ 时,$T=16$℃.

函数关系并不一定能用解析式或图表表示,例如常见的心电图,它是电压随时间变化的函数,我们通常只能用曲线来描述,如图 1.1.1 所示.

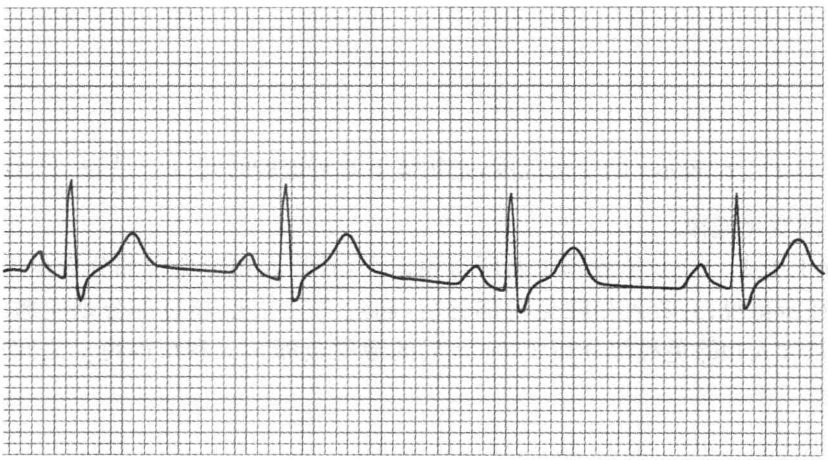

图 1.1.1

上述这些变量之间的依赖关系常常称为函数关系,下面我们给出函数的一般

定义.

定义 1.1.1 设 x, y 是两个变量, x 的变化范围为数集 D,如果对 D 中的每个 x,变量 y 按某种对应规则 f,总有确定的数与它对应,则称 y 是 x 的函数,记为

$$y = f(x), \quad x \in D,$$

并称 x 为自变量, y 为因变量, D 为函数的定义域,对应的 y 的取值范围为函数的值域,记为 R.

如果对于每个 $x \in D$, 只有一个 y 值与之对应,则此函数是单值函数,本书中所说的函数,在没特别说明时,都指单值函数.

在定义中,函数关系用 f 表示,但也可用别的文字,如 g, h 或 φ 等来表示, y 是 x 的函数也可记为

$$y = g(x),\ y = h(x),\ y = \varphi(x),\ y = y(x).$$

在同一场合,不同的函数应该用不同的记号.

确定一个函数,主要是函数关系及定义域,至于自变量及因变量用什么记号来表示,是无关紧要的. 只要定义域相同, f 表示同一个函数关系,则 $y = f(x)$ 与 $u = f(v)$ 是同一个函数. 比如函数 $y = |x|$ 和函数 $u = \sqrt{v^2}$. 它们有相同的定义域,相同的函数关系,因此它们是同一个函数. 由定义可知,两个函数,当且仅当对应规则相同且定义域也相同时,才是相同的. 如 $y = \lg x^2$ 与 $y = 2\lg x$ 的定义域不同,所以,它们是两个不同的函数. 而函数 $y = \sqrt{x^2}$ 和 $y = x$,定义域相同,但在 $x < 0$ 时,对应规则不相同,因此它们也是两个不同的函数.

例 1.1.2 中的函数用多个式子来表示. 在自变量的不同变化范围内,对应规则用不同式子来表示的函数,称为分段函数. 要注意分段函数虽然有多个式子,但它只表示一个函数. 常见的分段函数还有:

例 1.1.3 符号函数

$$y = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{当 } x < 0 \\ 0, & \text{当 } x = 0 \\ 1, & \text{当 } x > 0. \end{cases}$$

它的定义域 $D = (-\infty, \infty)$,值域 $R = \{-1, 0, 1\}$. 它的图形如图 1.1.2 所示.

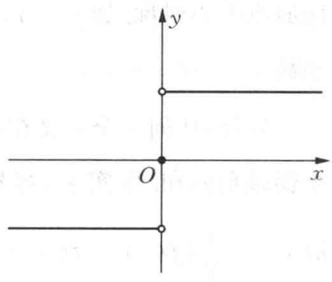

图 1.1.2

例 1.1.4 取整函数(y 是不超过 x 的最大整数部分):

$$y=[x]=k, \text{当} k \leqslant x < k+1 \text{时}, k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

它的定义域 $D=(-\infty, \infty)$，值域 $R=\{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$. 可见 $[0.654]=0$，$[3.3]=3$，$[-2.8]=-3$，其图形如图 1.1.3 所示.

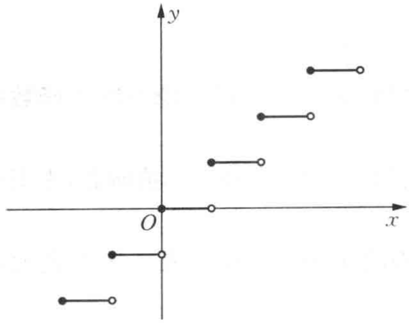

图 1.1.3

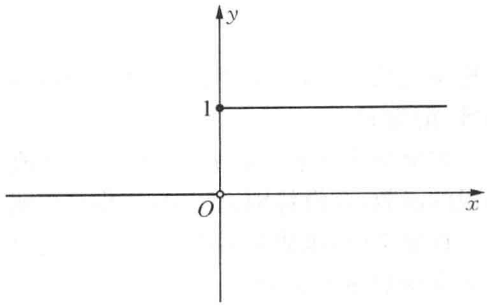

图 1.1.4

例 1.1.5 如图 1.1.4 所示，步长函数：

$$y=H(x)=\begin{cases}1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x<0.\end{cases}$$

二、函数的几个性质

下面我们来介绍研究函数时常用的几个性质.

1. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D，且 D 关于坐标原点对称. 若对任一 $x \in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数，它的图形关于 y 轴对称. 比如 $y=x^2$，$y=|x|$ 都是偶函数.

若函数满足 $f(-x)=-f(x)$，$x \in D$，则称 $f(x)$ 为奇函数，它的图形关于坐标原点中心对称. 如 $y=x$，$y=x^3$，$y=\sin x$，$y=\tan x$ 都是奇函数. 可以验证，函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 和函数 $y=\frac{e^x+1}{e^x-1}$ 也都是奇函数.

另外，任何一个定义在 $(-l, l)$ 上的函数，它一定可以分解为一个奇函数与一个偶函数的和. 事实上，容易直接验证 $g(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$ 是偶函数，$h(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$ 是奇函数，而

$$f(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))+\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))=g(x)+h(x).$$

据此可知，$y = e^x + e^{-x}$ 是偶函数，$y = e^x - e^{-x}$ 是奇函数. $y = (2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x$ 是偶函数.

通常两个奇函数之和仍是奇函数，两个奇函数之积是偶函数，两个偶函数之和仍是偶函数，两个偶函数之积仍是偶函数，偶函数与奇函数之积是奇函数.

2. 周期性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$，如果存在一个正数 T，对一切 $x \in D$，

$$f(x+T) = f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，满足上述关系中最小的正数 T 值称为最小正周期，通常把最小正周期称为周期. 例 $\sin x$ 的周期为 2π，$\sin^2 x$ 的周期为 π 都是指它们的最小正周期. 值得注意的是有些周期函数没有最小正周期，例如常数函数，任何一个正实数都是它的周期，因此它没有最小正周期.

3. 有界性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D，如果存在正数 M，使

$$|f(x)| \leqslant M, \quad x \in D,$$

则称 $f(x)$ 在 D 上**有界**. 否则，就称 $f(x)$ 在 D 上**无界**.

比如函数 $y = \sin x$，$y = \cos x$，$y = \arctan x$ 都是有界函数，函数 $y = e^{-x^2}$ 也是有界函数，如图 1.1.5 所示；而函数 $y = e^x$ 和函数 $y = x\sin x$ 是无界函数.

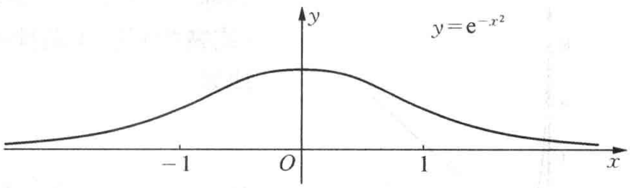

图 1.1.5

有时也引入函数 $f(x)$ 有**上界**的概念，如果存在正数 M. 对任意 $x \in D$，关系式

$$f(x) \leqslant M$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有上界. 类似，可以定义函数 $f(x)$ 有**下界**.

显然，有界函数一定有上界也有下界.

注意，有界函数定义中的界 M 并不是唯一的，也不一定是最小的.

同时，函数的有界性与函数的取值范围有关. 我们也讲函数在某个区间上有

界. 比如函数

$$y=\frac{1}{x}$$

在$(0,1]$上无界. 但对给定的$0<a<1$，在区间$(a,1]$上有界. 此时可取$M=\frac{1}{a}>0$，使

$$\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant M.$$

例 1.1.6 由于$|2x|\leqslant 1+x^2$成立，因此函数

$$y=\frac{2x}{1+x^2}$$

在$(-\infty,\infty)$上有界.

函数$y=\arctan x$在定义域内是有界的.

4. 单调性

设函数$y=f(x)$的定义域D，区间$I\subseteq D$，若对任意的$x_1,x_2\in I$当$x_1<x_2$时，总有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad (\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称$f(x)$在区间I上是**单调增加(或减少)的**；如果上述不等式中，等号都不成立，则称$f(x)$在I上是**严格单调增加**(或**减少**)的. 单调性也与区间有关，比如

$$y=x^2$$

在$(-\infty,+\infty)$上不是单调函数，但它在$(-\infty,0]$上严格单调减少，在$(0,+\infty)$上严格单调增加. 函数

$$y=x+\frac{1}{x}$$

在区间$(0,1)$内严格单调减少，在区间$(1,+\infty)$内严格单调增加，如图 1.1.6 所示.

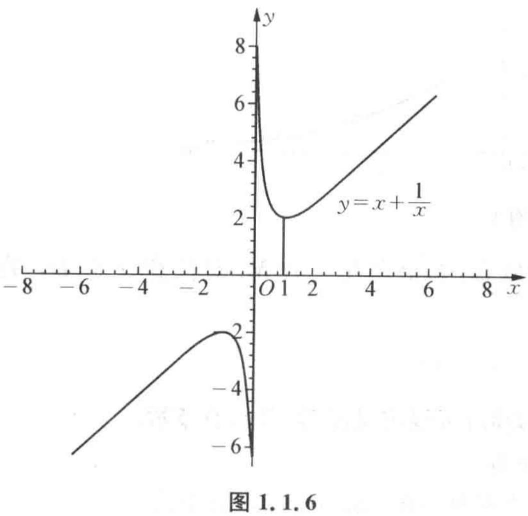

图 1.1.6

三、反函数

定义 1.1.2 设函数 $y=f(x)$，定义域是 D，值域 R. 如果对任一个 $y\in\mathbf{R}$，总有 $x\in D$，使 $f(x)=y$ 成立. 这时如果把 y 视为自变量，把 x 看作因变量，就得到了一个新的函数，称它为 $y=f(x)$ 的反函数，记为

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in\mathbf{R},\ x\in D.$$

当然，对于一个 $y\in\mathbf{R}$，与之对应的 x 可能不止一个，比如 $y=x^2$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 对于一个 $y\in[0,\infty)$，就有两个 x：

$$x=\pm\sqrt{y}$$

与之对应. 这时我们通常附加一些条件，使对应成为单值. 一般讲，一个函数不一定有反函数存在，但对于 $y=f(x)$ 在其严格单调区间内，它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 是一定存在并且是单值的. 关于反函数在什么条件下一定存在，留待以后讨论.

比如，$y=x^2$ 在 $x\in[0,\infty)$ 上是严格单调增加的，所以它的反函数 $x=f^{-1}(y)=\sqrt{y}$，$y\in[0,\infty)$，存在而且是单值的. 又如，$y=\sin x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，它的反函数 $y=\arcsin x$ 是多值的，但在 $y=\sin x$ 的严格单调区间(亦即反正弦函数的主值区间) $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上，它的反正弦函数 $y=\arcsin x$ 是单值的.

在同一坐标平面内，反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像与函数 $y=f(x)$ 的图像是相同的；函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像与 $y=f(x)$ 的图像是以直线 $y=x$ 为对称轴的轴对称图形. 比如 $y=\sin x$ 的图像与 $y=\arcsin x$ 的图像，在其主值区间内，关于直线 $y=x$ 对称. 又如 $y=\lg x$ 的图像与 $y=10^x$ 的图像也关于直线 $y=x$ 对称.

四、复合函数

在初速为零的自由落体运动中，动能 E 是速度 v 的函数 $E=\frac{1}{2}mv^2$，而速度 v 又是时间 t 的函数 gt，故动能 E 是时间 t 的函数

$$E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(gt)^2=\frac{1}{2}mg^2t^2.$$

一般地说，设函数 $y=f(u)$ 及函数 $u=\varphi(x)$，若 D 是函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域(或是定义域的一部分). 如果对在 D 上的每个 x 取值时所对应的 $\varphi(x)=u$，函数 $y=f(u)$ 是有定义的，则 y 成为 x 的函数，记为

$$y=f(\varphi(x)),\ x\in D\ 或\ y=f\circ g.$$

这个函数叫做由函数 $y=f(u)$ 及函数 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**. 它的定义域是 D，u 叫做**中间变量**.

例如，函数 $y=\cos^3 x$ 是由函数 $y=u^3$ 及函数 $u=\cos x$ 复合而成的，它的定义域是 $x\in(-\infty,+\infty)$，就是 $u=\cos x$ 的定义域. 又如函数 $y=\arcsin(x^3)$ 是由函数 $y=\arcsin u$ 及函数 $u=x^3$ 复合而成的，它的定义域是 $[-1,1]$，只是 $u=x^3$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 的一部分.

不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的，比如 $y=\arcsin u$ 与 $u=3+x^2$ 就不能构成复合函数，因为不存在这样的 D，使 $x\in D$ 时由 $u=3+x^2$ 对应的 u 使 $y=\arcsin u$ 有定义.

复合函数不仅可由两个函数，也可以由更多个函数复合而成. 例如 $y=\sqrt{3+\tan^2 x}$ 可以看作是 $y=\sqrt{u}$，$u=3+v^2$，$v=\tan x$ 复合而成的复合函数. 当然这种复合的过程有时并不唯一. 但学会把一个复杂的函数分解成几个简单的函数的复合在实际中是很有用的.

五、初等函数

我们在中学里已学过一些基本的初等函数，它们是

1. 幂函数 $y=x^\mu$，μ 为实数

常见的幂函数有 $y=x^2$，$y=x^3$，$y=\sqrt{x}$，$y=\sqrt[3]{x}$，它们的图形如图 1.1.7 所示.

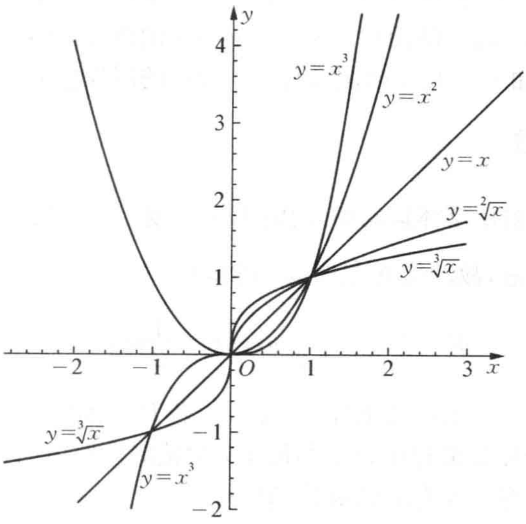

图 1.1.7

2. 指数函数 $y=a^x$， $a\neq 1, a>0$

常见的指数函数有 $y=2^x$，$y=2^{-x}$，$y=\mathrm{e}^x$ 等,它们的图形如图 1.1.8 所示.这里 e 表示一个无理数,近似于 2.718,它的具体值以后会给出.

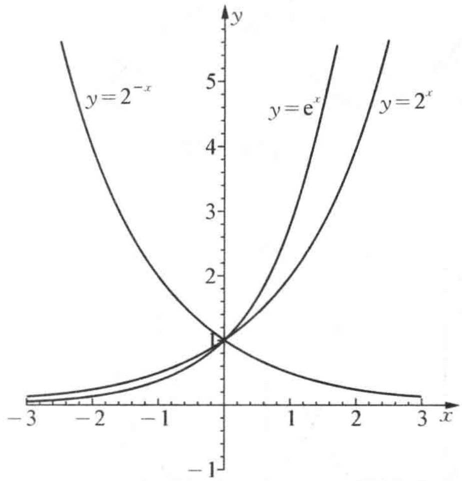

图 1.1.8

3. 对数函数 $y=\log_a x$， $a\neq 1, a>0$

常见的对数函数有 $y=\log_2 x$，$y=\log_{\mathrm{e}} x=\ln x$，它们的图形如图 1.1.9 所示.

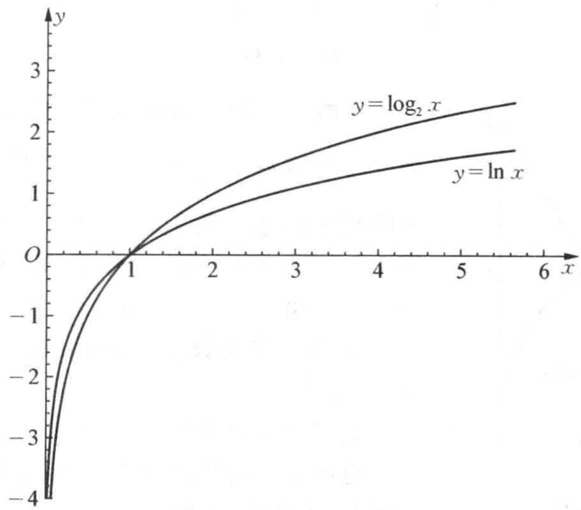

图 1.1.9

4. 三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$

它们的图形如图 1.1.10 和图 1.1.11 所示.

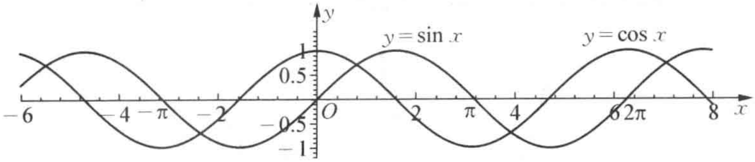

图 1.1.10

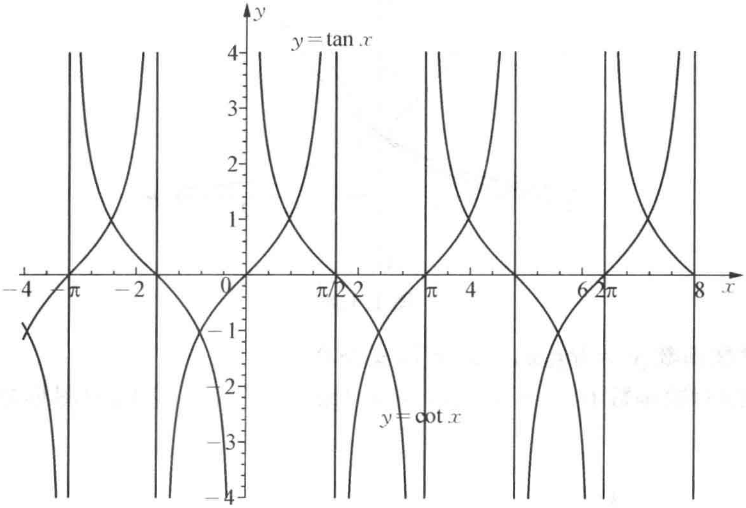

图 1.1.11

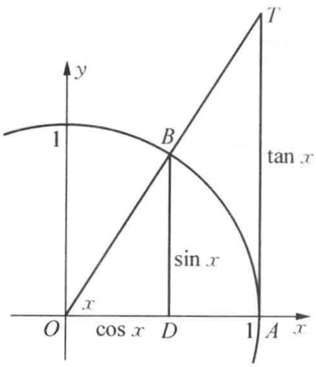

图 1.1.12

注意 三角函数的变量通常是以弧度计算的，弧度 x 与度数 d°的换算是 $x=\frac{\pi}{180}d$. 通常我们也用单位圆来描述三角函数值. 以 1 为半径的圆上（见图 1.1.12），OA，OB 是半径，AT 是切线，则 $OA=OB=1$，$BD=\sin x$，$OD=\cos x$，$AT=\tan x$.

5. 反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$ 等

它们的图形如图 1.1.13 所示.

这些基本初等函数的图像及其基本性质，比如奇偶性、单调性、周期性、有界性都应该牢记.