专业硕士考试辅导用书

经济类联考综合能力复习指南

翔高教育经济学教学研究中心 编

数学基础·逻辑推理·写作

★ 严格依照教育部考试中心考试大纲体系的权威阐释
★ 北京、上海两地名师亲自执笔，囊括更多内部题库
★ 20余位名师，8个研究项目组，600多天心血结晶
★ 精选经济、管理类联考历年真题，深入解读命题规律
★ 纵向梳理与横向归纳相结合，全面覆盖考纲所有考点
★ 习题精选精析，精彩点评，利于在短期内强化和提高

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

专业硕士考试辅导用书

经济类联考综合能力复习指南

翔高教育经济学教学研究中心　编

中国石化出版社

内 容 提 要

本书是配合攻读全日制金融硕士、应用统计硕士、税务硕士、国际商务硕士、保险硕士及资产评估硕士研究生入学考试中第三个考试科目大纲而编写的考试辅导用书。本书按照考试大纲的顺序编写，分为数学基础、逻辑推理与写作三个部分，对大纲的全部考点进行了精讲。同时，为了帮助考生理解，在考点精讲中穿插了大量的例题、点评，每章的后面均安排了适量练习题，并提供了参考答案与解析。

本书适合备考396经济类联考综合能力的考生使用，也可供相关专业师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

经济类联考综合能力复习指南／翔高教育经济学教学研究中心编. —北京:中国石化出版社,2013.7
专业硕士考试辅导用书
ISBN 978-7-5114-2232-3

Ⅰ.①经… Ⅱ.①翔… Ⅲ.①经济学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①F0

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第133591号

中国石化出版社出版发行

地址:北京市东城区安定门外大街58号
邮编:100011　电话:(010)84271850
读者服务部电话:(010)84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com
北京柏力行彩印有限公司印刷
全国各地新华书店经销

*

787×1092毫米 16开本 20印张 506千字
2013年7月第1版 2013年7月第1次印刷
定价:48.00元

前　　言

396 经济类联考综合能力是招收金融硕士、应用统计硕士、税务硕士、国际商务硕士、保险硕士及资产评估硕士等专业硕士而设置的考试科目，替代以往的 303 数学三。包括中国人民大学、上海财经大学、厦门大学、吉林大学、山东大学、湖南大学、中央财经大学、对外经济贸易大学、西南财经大学等绝大多数高校均将经济类专业学位综合能力作为以上全部或部分专业的入学考试科目之一。并且，从长远看，2014 年后大多数的学校经济类专业学位都将考核综合能力。

经济类联考综合能力的考试内容包括数学、逻辑、写作三个部分。考试科目综合文理科，并且其逻辑部分，绝大多数本科生以前并未系统性学习过，因此，很多考生对于经济类联考综合能力的应考复习有些迷茫。翔高教育聘请京沪两地数学、逻辑与写作的一线授课名师，编写了这本《经济类联考综合能力复习指南》，可为广大考生提供系统性的复习指导。

本书严格按照 2014 年大纲编写，同时，为了便于读者理解知识体系，稍微增加了一些大纲外知识点，增加的知识点所占篇幅不足 3%。本书延续翔高教育学习辅导书的一贯特点：侧重基础，注重应试，条理清晰，讲练结合。本书强调对基础知识体系和基本应试能力的训练，同时进行精炼的总结和点评，在讲解知识体系及写作技能的时候，辅以例题和习题，便于读者及时掌握要领。

由于编者水平有限，本书不当之处在所难免，读者如果有批评意见，或者对学习有疑问，欢迎联系翔高客服 xgedu@ qq. com，我们将第一时间给予反馈，或者答疑。

编者

2013 年 6 月 1 日

目　　录

CONTENTS

第一篇　数学基础

第二篇　逻辑推理

第三篇　写作

第一篇 数 学 基 础

一、微积分部分

第一章 一元函数的微分学

1.1 一元函数导数与微分概念及基本性质

(一)导数与微分的定义

1. 导数

(1)导数的定义：设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的某个邻域内有定义，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称 $y=f(x)$ 在 x_0 点可导，并称该极限值为 $y=f(x)$ 在 x_0 点的导数，记作 $f'(x_0)$，或 $y'\Big|_{x=x_0}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ 等。

(2)左右导数的定义：设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的某个邻域内有定义，若极限

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0^+\\(\text{或}\Delta x\to 0^-)}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0^+\\(\text{或}\Delta x\to 0^-)}}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称该极限值为 $y=f(x)$ 在 x_0 点的右(或左)导数，记作 $f'_+(x_0)$(或 $f'_-(x_0)$)。

(3)函数在区间可导的定义：若函数 $y=f(x)$ 在区间(a，b)内可导，且 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 都存在，则称 $f(x)$ 在区间[a，b]上可导。

【翔高点评】在对函数求导时，很多同学经常忘记在分段函数中，某些端点值是不能够用函数求导公式来求，而只能够通过函数定义法来求。

2. 微分

(1)微分的定义：设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的某个邻域内有定义，当自变量 $x=x_0$ 增加 Δx 时，若存在与无关的常数 $A(x_0)$ 使得函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可表示为

$$\Delta y=A(x_0)\Delta x+o(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0)$$

则称 $y=f(x)$ 在 x_0 点可微，$A(x_0)\Delta x$ 称为 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 点的微分。

(2)微分的几何意义：函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 点的微分 $dy=f'(x_0)\Delta x$，在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线当自变量 x 在点 $x=x_0$ 处有增量 Δx 时，切线纵坐标的增量。

【例题 1-1】 设函数 $y=f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，求 $f'(0)$。

【解】 本题为分段函数，注意端点处的求导，此处不能用常规的公式求导，而只能借助于导数的定义，宜用定义法求 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$

【翔高点评】本题不能用常规的公式法求解，而只能用定义法求解，其中利用了 $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant1$ 有界这一性质。

以下是错误解法，望读者引以为鉴：

【错解】当 $x\neq0$ 时，$f(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to0}f'(x)$ 不存在，就说 $f'(0)$ 不存在，然后就得出不存在。

这样做就会得出错误的结果，因为 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)$ 是导函数的极限，$f'(0)$ 是在 $x=0$ 处的导数，两者不是同一个东西，希望同学们不要在这个地方发生混淆。

（二）导数与微分的一些性质

(1)对于一元函数 $y=f(x)$ 几个重要的总结(注：此处的总结仅适用于一元函数，对于多元的后面会继续探讨)：

A. 若 $f_+'(x_0)=f_-'(x_0)$，则称函数在该 x_0 点处可导，反之也成立(此即为函数可导的条件)。

B. 若 $y=f(x)$ 在该 x_0 点处可导，则函数 $f(x)$ 在该点处必定连续，反之不一定成立。

C. 一元函数 $y=f(x)$ 可导必可微，反之也成立。

【例题 1－2】 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0\\ x^2g(x), & x\leqslant0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有(　　)。

A. 极限不存在　　B. 极限存在但不连续　　C. 连续但不可导

D. 可导但不可微　　E. 可微

【解】 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}=0=f(0)$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=0=f(0)$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

$$f_+'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x\sqrt{x}}=0, f_-'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^-}xg(x)=0$$

即函数的导数存在，而在一元函数中，可导即意味着可微。所以本题应该选择(E)。

(2)导数和微分的计算

A. 基本公式

表 1－1　基本公式

(1)	$C'=0$(C 为常数)	(9)	$(\tan x)'=\sec^2x$
(2)	$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$	(10)	$(\cot x)'=-\csc^2x$
(3)	$(a^x)'=a^x\ln a$($a>0$，且 $a\neq1$)	(11)	$(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$
(4)	$(e^x)'=e^x$	(12)	$(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$
(5)	$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$($a>0$，且 $a\neq1$)	(13)	$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(6)	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	(14)	$(\arccos x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(7)	$(\sin x)'=\cos x$	(15)	$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$
(8)	$(\cos x)'=-\sin x$	(16)	$(\text{arccot}\, x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

B. 导数和微分的运算法则

表1-2 求导和微分运算法则

	求导法则	微分法则
(1)	$(u' \pm v') = u' \pm v'$	$\mathrm{d}(u \pm v) = du \pm dv$
(2)	$(uv)' = u'v + uv'$	$\mathrm{d}(uv) = udv + vdu$
(3)	$(Cu)' = Cu'$(C 为常数)	$\mathrm{d}(Cu) = Cdu$(C 为常数)
(4)	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$	$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}(v \neq 0)$

1.2 各类函数求导的求法

函数的求导是考试中经常要用到的基本工具之一，故函数求导是十分重要的。函数求导主要包括复合函数求导、隐函数求导、反函数求导、幂指数求导、分段函数求导、变限积分求导等。

(一)复合函数求导

设 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的求导法则为

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \text{或} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

如上我们可以看出复合函数求导是一种链式法则，由表面一层一层往里求。

【例题1-3】 设 y 为二阶可导函数，且 $y=f[\ln(1+x)]$，则 $y'=$______。

【解】 $y'=f'[\ln(1+x)](\ln(1+x))'=\frac{1}{1+x}f'[\ln(1+x)]$

(二)隐函数求导

隐函数是求导函数中十分重要的一个知识点，在实际解题中，我们通常用两种思路：

思路一：同时在方程的两边对 x 求导，遇 y 则看成是复合函数求导。

思路二：利用多元函数微分法的隐函数求导公式，首先将方程移项处理使得 $F(x, y)=0$，再由 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$ 求出。其中 $F'_x(x, y)$，$F'_y(x, y)$ 分别表示 $F(x, y)$ 对 x 和 y 的偏导数。

【例题1-4】 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin(x^2+y^2)+e^x-xy^2=0$ 所确定，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

【解】 解法一：利用思路一

$$[\cos(x^2+y^2)] \cdot \left(2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+e^x-y^2-2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

$$\text{所以} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x\cos(x^2+y^2)+e^x-y^2}{2xy-2y\cos(x^2+y^2)}$$

解法二：利用思路二

令 $F(x, y)=\sin(x^2+y^2)+e^x-xy^2$ 则有：

$$F'_x(x,y) = 2x\cos(x^2+y^2)+e^x-y^2$$

$$F'_y(x,y) = 2y\cos(x^2+y^2)-2xy$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = \frac{2x\cos(x^2+y^2)+e^x-y^2}{2xy-2y\cos(x^2+y^2)}$$

（三）反函数求导

单调连续函数 $y=f(x)$ 具有反函数 $x=f^{-1}(y)$ 且 $f^{-1}(x)\neq 0$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$$

【例题 1-5】 已知 $f'(x)=ke^x$，k 为常数，求 $f(x)$ 的反函数的二阶导数。

【解】 设 $y=f(x)$，则 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{ke^x},\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\left(\frac{1}{ke^x}\right)'_x\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{1}{ke^x}\cdot\frac{1}{ke^x}=-\frac{1}{k^2e^{2x}}$

（四）幂指数函数求导

幂指数函数求导法：可提出一个 e，其他的部分则变为 $\ln y$。具体流程如下：

$$y=u(x)^{\nu(x)}=e^{\nu(x)\ln u(x)}\longrightarrow$$

$$y'=e^{\nu(x)\ln u(x)}\left[\nu'(x)\ln u(x)+\frac{\nu(x)}{u(x)}u'(x)\right]$$

【例题 1-6】 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$。

【解】 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{t\to0+}\frac{\ln(e^{-t\ln t}-1)}{-\ln t}}$

$=e^{\lim\limits_{t\to0+}\frac{\ln(-t\ln t)}{-\ln t}}=e^{\lim\limits_{t\to0+}\frac{t(-\ln t-1)}{t\ln t}}=e^{\lim\limits_{t\to0+}\frac{(-\ln t-1)}{\ln t}}$

$=e^{-1}$

【翔高点评】在本题中，第一步先用到了最基本的指数化处理，变化后用了一次等价无穷小处理，然后用洛必达法则处理，化简后，最后用抓大头的方法得出最终结果。

（五）分段函数求导

关于分段函数，我们早在 1.1 节已经有所涉及，在实际考试中，分段函数的考查一般出现在选择题中，讨论函数的可导连续性等方面的问题，题型见【例题 1-2】。

（六）变限积分求导

对于变限积分通常可以用以下公式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(t)\,\mathrm{d}t=f(\psi(x))\psi'(x)-f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

积分限及被积函数中含参变量的变限积分求导数的思路为：

应去掉被积函数中的参变量，此处的 x 若不处理掉，求导的时候不能直接用上述公式。

【例题 1-7】 设函数 $f(x)$ 连续，则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\,\mathrm{d}t=$ ________。

【解】 由于 $\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int_0^x f(x^2-t^2)\mathrm{d}(x^2-t^2)\xrightarrow{令 x^2-t^2=u}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)\,\mathrm{d}u$$

所以 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\,\mathrm{d}t=xf(x^2)$

【翔高点评】本题最可能犯的错误就是不进行化简而直接代入，把 x 当作积分式的一部分而直接处理。我们的目的是对 x 求导，而对于含变限积分的求导中，变限范围中是包含 x 的，只需要将 x 代入到被积分式中相应的被积分因子，再对变限范围进行积分相乘即可，而对于本身含在被积分式子中的 x 值，由于积分时并不对其积分，而求导的时候是针对 x 求导，故必须要分离。

1.3 高阶导数的求法

函数的高阶导数的求解是本章的一个难点。它的难处在于很多学生无法准确把握其方法，以及需要注意的地方不是很清楚。因此，如何去准确地把握这些特征是我们应该要掌握的，然后才能够熟练地掌握高阶导数的求法。函数的高阶导数的求法总的来说可以分为四种：直接法、分解法、莱布尼茨法、泰勒公式的系数或幂级数展开式系数求解法。

(一)高阶导数的定义

定义：如果 $y'=f'(x)$ 作为 x 的函数在点 x 处可导，则 y' 的导数称为 $y=f(x)$ 的二阶导数，记为 y''、$f''(x)$ 或 $\frac{d^2y}{dx^2}$、$f^{(2)}(x)$。

类似的函数 $y=f(x)$ 的 n 阶导数记为 $f^{(n)}(x)$ 或 $\frac{d^ny}{dx^n}$。

几个常见的 n 阶导数公式，如下表 1－3 所示。

表 1－3　常见的 n 阶导数

原函数	n 阶导数	原函数	n 阶导数
$y=x^m$	$y=m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$	$y=a^x(a>0)$	$y^{(x)}=a^x(\ln a)^x$，特别地 $(e^x)^{(n)}=e^x$
$y=\ln(ax+b)$	$y^{(x)}=(-1)^{x-1}\frac{a^x(n-1)!}{(ax+b)^x}$	$y=\sin(ax+b)$	$y=a^n\sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$
$y=\cos(ax+b)$	$y^{(x)}=a^x\cdot\cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$	$y=\frac{1}{ax+b}$	$y^{(n)}=(-1)^n\frac{a^n\cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}$

(二)高阶导数的运算

若 $u(x)$，$\nu(x)$ 均为 n 阶可导，则有如下运算法则：

$$(u+\nu)^{(n)}=u^{(n)}+\nu^{(n)}；\ (cu)^{(n)}=cu^{(n)}(c\text{ 为常数})$$

$$(u\nu)^{(n)}=C_n^0u^{(n)}\nu+C_n^1u^{(n-1)}\nu'+\cdots+C_n^{n-1}u'\nu^{(n-1)}+C_n^nu\nu^{(n)}(\text{莱布尼茨公式})$$

关于高阶导数的求解方法我们前面已经点到几种具体的方法，以下我们便具体介绍各种方法的使用。

(1)直接法

所谓的直接法，实际上就是归纳法。即先计算前几次导数，通过多次计算后得出导数规律，从而写出 n 阶导数的方式。

【例题 1－8】 设函数 $f(x)$ 有任意阶导数，且 $f'(x)=f^2(x)$，则 $f^{(n)}(x)=$______$(n>2)$。

【解】 对 $f'(x)=f^2(x)$ 两边同时求导得出：$f''(x)=2f(x)f'(x)=2f^3(x)$

再求导得：$f^{(3)}(x)=3!\ f^2(x)f'(x)=3!\ f^4(x)$

由此可以归纳出 $f^{(n)}(x)=n!\ f^{n+1}(x)$

(2)分解法

所谓的分解法是指通过将原函数分解成两个或者多个常见函数相加减的形式，这样往往

可以使得求导变得简单可行，这种方法也是常用的方法。

【例题 1-9】 设 $y=\frac{x^3}{x^2-3x+2}$，求 $y^{(n)}(n\geqslant 2)$。

【解】 $y=\frac{x^3}{x^2-3x+2}=x+3+\frac{8}{x-2}-\frac{1}{x-1}$

$$y^{(n)}=(x+3)^{(n)}+[8(x-2)^{-1}]^{(n)}-[(x-1)^{-1}]^{(n)}$$
$$=0+(-1)^n\cdot 8\cdot n!\cdot(x-2)^{-1-n}-(-1)^n\cdot n!\cdot(x-1)^{-1-n}$$
$$=(-1)^n n!\left[\frac{8}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right](n\geqslant 2)$$

(3)莱布尼茨法

所谓的莱布尼茨法就是通过莱布尼茨公式来求解 n 阶导数问题，莱布尼茨法主要应用于原函数可以看成是两个函数相乘的情形，而且其中一个函数的有限次导数变为0，通常在3次及3次以下。

【例题 1-10】 设 $y=x^2\ln(1+x)$，求 $y^{(n)}$。

【解】 $y^{(n)}=C_n^0x^2[\ln(1+x)]^{(n)}+2C_n^1x[\ln(1+x)]^{(n-1)}+2C_n^2[\ln(1+x)]^{(n-2)}$

$$=\left[\frac{(n-1)(n-2)x^2}{(1+x)^2}-\frac{2(n-2)x}{1+x}n+n(n-1)\right]\frac{(-1)^{n-1}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}$$

(4) 泰勒公式的系数或幂级数展开式系数求解法

这种方法是通过比较泰勒展开式的系数与原函数中 n 次求导后的系数，从而得出所要求解的 n 阶导数。

泰勒公式：$y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$（当 $x_0=0$ 时，该展开式称之为函数的麦克劳林展开式）

【例题 1-11】 设 $y=\arcsin x$，求 $y^{(n)}(0)$。

【解】 $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n},|x|<1$

$$y=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!(2n+1)}x^{2n+1},|x|<1$$

而由麦克劳林公式有：$y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

对比系数可知：$y^{(2k)}(0)=f^{(2k)}(0)=0,y'(0)=1$,

$$y^{(2k+1)}(0)=f^{(2k+1)}(0)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots(2k-1)}{2^k\cdot k!\ (2k+1)}(2k+1)!,\ k=1,\ 2,\ \cdots$$

1.4 微分中值定理

（一）微分中值定理介绍

(1)费尔马定理

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义且在 x_0 可导，并且在此邻域内恒有 $f(x)\leqslant f(x_0)$ 或 $f(x)\geqslant f(x_0)$，则有 $f'(x_0)=0$。

(2) 罗尔定理

设函数 $y=f(x)$ 在闭区间上 $[a,\ b]$ 连续，在开区间 $(a,\ b)$ 可导，又设 $f(a)=f(b)$，则

至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi)=0$。

(3) 拉格朗日中值定理

设函数 $y=f(x)$ 在闭区间上 $[a, b]$ 连续，在开区间 (a, b) 可导，则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)$。

拉格朗日中值定理推论：

A. 如果在 (a, b) 恒有 $f'(x)=0$，则在 (a, b) 内 $f(x)$ 为常数。

B. 若 $f(x)$、$g(x)$ 在 (a, b) 内恒有 $f'(x)=g'(x)$，则在 (a, b) 内 $f(x)\equiv g(x)+C$。

【例题 1-12】 证明函数恒等式 $\arctan x=\frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{1-x^2}$，$|x|<1$。

【证明】 首先令 $f(x)=\arctan x-\frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{1-x^2}$

则 $f(x)$ 在 $x\in(-1, 1)$ 可导，

且 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2}\cdot\frac{2(1-x^2)+4x^2}{(1-x^2)^2}=0$，

所以由拉格朗日中值定理的推论可知：$f(x)=C$

又 $C=f(x)=f(0)=0$，所以 $\arctan x=\frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{1-x^2}$，$|x|<1$

(4) 柯西中值定理

设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在闭区间上 $[a, b]$ 连续，在开区间 (a, b) 可导，且 $g'(x)\neq 0$，$x\in(a, b)$，则至少存在一点 $\xi\in(a, b)$，使得 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$。

(5) 泰勒中值定理

A. 带拉格朗日余项的泰勒中值定理

如果函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的开区间 (a, b) 内具有直到 $n+1$ 阶导数，则当在 (a, b) 内时，$f(x)$ 可以表示为 $(x-x_0)$ 的一个 n 次多项式与一个余项 $R_n(x)$ 之和：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$ 是介于 x 与 x_0 之间的某个值。

B. 带佩亚诺余项的泰勒中值定理

如果函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的开区间 (a, b) 内具有直到 $n+1$ 阶导数，则当在 (a, b) 内时，$f(x)$ 可表示为 $(x-x_0)$ 的一个 n 次多项式与一个余项 $O(x-x)^n$ 之和：

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+O(x-x)^n$$

【翔高点评】(1)利用泰勒中值定理解决证明题一般用拉格朗日余项的泰勒中值定理；(2)利用泰勒中值定理求极限，一般用带佩亚诺余项的泰勒定理。

C. 麦克劳林展开式

所谓的麦克劳林展开式即是指在 $x=0$ 处的泰勒展开式。

几个常用函数的带佩亚诺项余项的麦克劳林展开式：

(1) $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + O(x^n)$

(2) $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + O(x^{2n+1})$

(3) $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + O(x^{2n})$

(4) $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + O(x^n)$

(5) $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + O(x^n)$

拉格朗日中值定理是柯西中值定理的特殊情形，罗尔定理又是拉格朗日中值定理的特殊情形，它们的导出却是从特殊到一般。

以下是几个中值定理之间的关系：

$$\text{费马定理} \Rightarrow \text{罗尔定理} \Rightarrow \begin{cases} \text{拉格朗日中值定理} \\ \text{柯西中值定理} \end{cases}$$

(二)微分中值定理的应用

(1) 欲证结论：至少存在一点 $\xi \in (a, b)$，使得 $f^{(n)}(\xi) = 0$.

有很多这种类型题目是必须要经过两次或以上的罗尔定理得出结论的。以下通过举例来说明这一思路。

【例题 1-13】 设函数 $f(x, y)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内二阶可导，且 $f(a) = f(b) = f(c)$ $(a < b < c)$，试证：至少存在一个 $\xi \in (a, b)$，使得 $f''(\xi) = 0$。

【证明】 由 $f(a) = f(b) = f(c)$ 可知必存在 $\xi_1 \in (a, b)$，$\xi_2 \in (b, c)$，使得

$$f'(\xi_1) = 0,\ f'(\xi_2) = 0$$

再对 $f'(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上应用罗尔定理可得 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$，使得 $f''(\xi) = 0$。

(2) 欲证结论：存在 $\xi \in (a, b)$，使得关于 a，b，$f(a)$，$f(b)$，ξ，$f(\xi)$，$f'(\xi) \cdots f^{(n)}(\xi)$ 代数式成立。

这种题型的题目在 2009 年考研数学考试中出现过一次，由于之前这种类型的题目并不是很多，故 2009 年很多考生为此失分。其实这种题目并不难，我们只需要在考场上冷静下来，仔细分析，便很快就能得出证明的方法。

这种类型的题目，我们通常可以联系到将所要求的 $f^{(n)}(\xi)$ 中的 ξ 看成是自变量 x，然后再通过对其进行积分或者微分转化成另一种形式的表达式，通过观察可以很容易发现这样做是否可以使得证明变得简单，最后再求导或积分回来成要证明的式子。

【例题 1-14】 [2009 年数学三计算题(18)(I)]

证明拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 上可导，则存在 $\xi \in (a, b)$，使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$。

解题思路：由于我们不可能直接利用拉格朗日证明这个结论，只能采用更加基本的定理来证明这个结论，那么我们就必须要很清楚地了解哪些定理是更加基础的。在此题中，我们还是用罗尔这一更加基础的定理来证明我们想要的结论，因为你会发现罗尔定理的结论刚好就是我们要证明的，具体的见上述几个中值定理之间的关系。

【证明】 首先将上述 $f'(\xi)$ 中的 ξ 改成是自变量 x，则我们可以得到：

$$f(b) - f(a) = f'(x)(b-a)$$

再进一步积分可得：$[f(b)-f(a)]x=f(x)(b-a)$

移项可得：$F(x)=[f(b)-f(a)]x-f(x)(b-a)$

分别代入 $x=a$，$x=b$ 可得：

$$F(a)=[f(b)-f(a)]a-f(a)(b-a)=f(b)a-f(a)b$$
$$F(b)=[f(b)-f(a)]b-f(b)(b-a)=f(b)a-f(a)b$$

即 $F(a)=F(b)$，即至少存在一点 $\xi\in(a, b)$，使得 $f'(\xi)=0$

得到 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

(3)欲证明结论：在 (a, b) 内至少存在 ξ，η，$\xi\neq\eta$ 满足某种代数关系式。

当涉及到两个变量 ξ，η 时，往往可以采用柯西中值定理来解决这些问题。

【例题 1-15】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导 $(0<a<b)$，证明：存在 ξ，$\eta\in(a, b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}f'(\eta)\eta$。

【证明】 由题设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，故存在 $\xi\in(a, b)$，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

又 $f(x)$，$\ln x$ 在 $[a, b]$ 上满足柯西中值定理的条件，故存在 $\eta\in(a, b)$，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\eta)}{\dfrac{1}{\eta}}$$

合并上两式可得 $f'(\xi)=\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}f'(\eta)\eta$

(4)欲证结论：已知抽象函数具有高阶导数，证明至少存在一点 ξ 使得关于该抽象函数的某个等式或者不等式成立。

对于这一类的命题的证明一般采用泰勒中值定理，其基本思路为：首先将函数在适当点 x_0 处 k 阶展开，然后令展开式的变量分别取一些特殊点得到一些关系式，对得到的这些关系式进行适当的运算，从而推出所要的结论。

【例题 1-16】 设函数 $f(x)$ 二阶可导，$f''(x)\geqslant 0$，$x\in(-\infty, +\infty)$，函数 u 在区间 $[a, b]$ $(a>0)$ 上连续，证明：$\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t\geqslant f\left[\dfrac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right]$。

【证明】 令 $x_0=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a u(t)\mathrm{d}t$，将 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处展开成一阶泰勒公式：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2$$

由于 $f''(x)\geqslant 0$，则 $f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

令 $x=u(t)$，则 $f(u(t))\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(u(t)-x_0)$

上式两边 $[0, a]$ 在上对 t 积分，得：

$$\begin{aligned}\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t &\geqslant \int_0^a f(x_0)\mathrm{d}t+\int_0^a f'(x_0)[(u(t)-x_0)]\mathrm{d}t\\ &=af(x_0)+f'(x_0)\left[\int_0^a[(u(t)-x_0)]\mathrm{d}t\right.\\ &=af(x_0)\end{aligned}$$

故 $\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t\geqslant f\left[\dfrac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right]$

1.5 微分学的几何应用和经济应用

前面的几个小节里面我们着重叙述了微分学的各种性质特点以及各种原理，这些都是我们应该牢牢掌握的。在历年的数学三、数学四考试中，经常会涉及到一些简单的微分方面的应用，主要有几何方面和经济方面的应用。接下来这一节我们将会在这两个应用方面详尽的讲述。

(一)微分的几何应用

微分学的几何应用主要是关于平面曲线的切线方面，这一类的题目都相对都比较简单。

1. 用显示方程表示的平面曲线

设平面曲线 C 方程为 $y=f(x)$，且已知某个点 $M(x_0, y_0)$ 在曲线 C 上，且 $f(x)$ 在 x_0 可导，则曲线 C 在点 M 处的切线方程为：

$$y=y_0+f'(x_0)(x-x_0)$$

若导数的值为∞，这表明切线为 $x=x_0$，若导数为 0，表明切线为 $y=y_0$。

2. 用隐式方程表示的平面曲线

设平面曲线 C 的隐式方程为 $f(x, y)=0$，其中 $f(x, y)$ 有连续的一阶偏导数，则曲线 C 在点 M 处的切线方程为：

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)=0$$

或采用隐函数求导公式求出斜率：

首先将方程移项处理使得 $F(x, y)=0$，再由 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$ 求出，其中 $F'_x(x, y)$ $F'_y(x, y)$ 分别表示 $F(x, y)$ 对 x 和 y 的偏导数。

【例题 1-17】 (1)求曲线 C：$y=x^2+x$ 在点 $(-1, 0)$ 上的切线；(2)求圆方程为 $x^2+y^2=4$ 在点 $(2, 2)$ 的切线。

【解】 (1)$y'=2x+1$，则斜率 $k=-1$

则所求函数切线为：$y=-1(x+1)=-x-1$

(2)令 $f(x, y)=x^2+y^2$

则 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Big|_{x=2}=2x\Big|_{x=2}=4$，$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Big|_{y=2}=2y\Big|_{y=2}=4$

则所求的切线为：$4(x-2)+4(y-2)=0$

即为：$y=4-x$

(二)微分学的经济应用

微分学的经济应用主要是计算商品的边际弹性。

首先让我们介绍几个基本概念：

A. 商品的边际收益：是指商品每多增加一个销售额给厂商所带来的收益，通常用 MR(Q) 来表示。

B. 商品的边际成本：是指商品每多生产一个所需要耗费的成本，通常用 MC(Q) 来表示。

C. 商品的边际弹性：

弹性的定义：所谓的弹性是指某个变量随着另一个变量变动率的变动率之比，表征一个经济变量随着另外一个经济变量变化的反应程度。

y 对 x 的弹性的基本公式：$E_{xy}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{y}}{\frac{\mathrm{d}x}{x}}\approx\dfrac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}$

由于商品的需求随着价格变化为负，因此我们常在其前加负号以便于比较，即：

$$E_P=-\frac{\frac{\mathrm{d}Q}{Q}}{\frac{\mathrm{d}P}{P}}\approx-\frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}}$$

【例题 1－18】 设某商品的需求函数为 $Q=160-2P$，其中 Q、P 分别表示需要量和价格，如果该商品需求弹性的绝对值等于 1，则商品的价格是(　　)。

A. 10　　B. 20　　C. 30　　D. 40

【解】 $|E_P|=\left|-\dfrac{\frac{\mathrm{d}Q}{Q}}{\frac{\mathrm{d}P}{P}}\right|=\left|\dfrac{P}{Q}\cdot\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right|=\left|\dfrac{P}{160-2P}\cdot(-2)\right|=\dfrac{2P}{160-2P}$

由题可知：$|E_P|=1$，则$\dfrac{2P}{160-2P}=1$

即 $P=40$，应选 D。

1.6　一元函数的单调性及极值的计算

(一)函数的单调性

1. 定义

函数的单调性表示的是应变量 $y=f(x)$ 随着自变量 x 变化而变化的情况，当 $y=f(x)$ 随着 x 的增加而增加时，函数为单调递增函数；当 $y=f(x)$ 随着 x 的增加而减少时，函数为单调递减函数。

2. 单调性判定定理

(1)对于可导的函数

若 $y=f(x)$ 在区间 I 上有 $f'(x)\geqslant 0(\leqslant 0)$，且不在任何子区间内取等号，则 $y=f(x)$ 在区间 I 上递增(减)。

(2)对于非可导函数

对于非可导函数，我们通常是根据定义来判定：

任取 x_1，$x_2\in I$，且 $x_1<x_2$，若一定存在 $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$，则称函数 $y=f(x)$ 为单调增(减)函数。

3. 求函数 $y=f(x)$ 单调区间的方法

(1)写出函数的定义域 I；

(2)求 $f'(x)$，解方程 $f'(x)=0$；

(3)用驻点和导数不存在的点将 $y=f(x)$ 定义域分成若干个子区间，在每一个子区间用 $f'(x)$ 的符号判断 $y=f(x)$ 的单调性。