现代数学基础

41

拓扑线性空间与算子谱理论

■ 刘培德　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

41

拓扑线性空间与算子谱理论

TUOPU XIANXING KONGJIAN YU SUANZI PULILUN

■ 刘培德 编著

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是为具有初步泛函分析知识的读者提供的深入一步学习的泛函分析教材或参考书。内容由拓扑线性空间一般理论与算子谱理论两部分组成。全书共包含六章和两个附录，前面三章叙述拓扑线性空间的一般理论，后面三章是关于 Banach 代数与算子谱理论的，之后介绍了谱理论在算子半群理论与遍历理论中的一些应用。

本书在讲解上述理论知识的同时还选取相当数量的实际例子加以阐释，以期加强基本理论和实际应用之间的相互联系。

图书在版编目（CIP）数据

拓扑线性空间与算子谱理论 / 刘培德编著 . -- 北京：高等教育出版社，2013. 6

ISBN 978-7-04-037378-3

Ⅰ. ①拓… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①拓扑线性空间 - 研究②谱算子 - 研究 Ⅳ. ① O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 100343 号

策划编辑 王丽萍　　责任编辑 李华英　　封面设计 张 楠　　版式设计 范晓红
责任校对 胡晓琪　　责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京汇林印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787 mm × 1092 mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	16.25	版　　次	2013 年 6 月第 1 版
字　　数	290 千字	印　　次	2013 年 6 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	49.00 元

物 料 号　37378-00

前言

本书是为研究生撰写的泛函分析教材, 内容由拓扑线性空间一般理论与算子谱理论两部分组成.

拓扑线性空间是一类其线性结构与最一般的拓扑结构有机结合起来的集合. 有关拓扑线性空间的理论就是一门研究这种拓扑代数的结构及其应用的学科. 拓扑线性空间理论作为泛函分析的一个分支产生于 20 世纪 40 到 50 年代. 在这段时期以前, 人们集中地研究了 Hilbert 空间和 Banach 空间的结构以及这些空间上的算子, 从 Hilbert 空间和 Banach 空间的研究转到拓扑线性空间的研究是泛函分析发展史上里程碑式的进展. 无论如何, 拓扑线性空间至今仍然是现代数学乃至自然科学中讨论有关问题或阐述有关理论时使用的最广泛的框架.

泛函分析最早的工作是由 Volterra, Fredholm, Hilbert 以及 Riesz, Fischer 等人从 19 世纪末到 20 世纪初做出的. 此时, 分析数学正置身于古典分析严密化的台阶之上, 同时也面对着更为宏大、深刻的理论和应用课题. 上面提到的是这一时期的代表人物, 他们的研究将有限维空间的问题推向无穷维空间, 并且最终导致了某些公理系统与一般原理的建立. 一批优秀的数学家开始认识到数学问题的抽象表述与抽象空间理论的威力及其意义, 特别是它们具有的高度概括性、广泛的应用性并且能够更加凸显数学问题的本质. 与此同时, 借助于 Lebesgue 积分, Riesz 等人研究了一般赋范空间. 两次世界大战之间 Banach 空间理论得到蓬勃发展, 以至于使泛函分析成为一门独立的学科. 这一时期量子力学、抽象代数与泛函分析的发展使人们的思维异常活跃, 出现了众花纷呈的局面: von Neumann 开创了算子谱理论并且把量子力学的基础建立在泛函分析之上, Gelfand 等人发展了赋范环论 (Banach 代数), 创立了抽象群上的调和分析,

同时泛函分析的思想方法还被广泛地应用于微分方程、积分方程、三角级数等研究领域.

尽管 Banach 空间概括了相当广泛的客观对象, 但是理论的发展和解决实际问题的需要逐渐显示出范数结构不敷应用. 这样的例子不是个别的而是系统性的. 首先是微分方程、调和分析中出现的某些函数不能纳入这种框架, 它使得有关理论的发展受到局限. 就泛函分析自身而言, 带有弱拓扑的赋范空间的共轭一般不再是赋范空间, 这使得研究结构更为一般的空间成为必要. 此外在实践领域, 电力工程计算中出现的 δ 函数是一种 "怪函数", 已有的事实既要求人们极大地扩展函数类型以便涵盖它们, 又要保持优越的函数性能以便付诸应用, 包括无穷次可微以及方便的极限运算等, 这无疑是对人类智力的一大挑战. 20 世纪 40 年代中期以后 Bourbaki 学派系统地发展了局部凸拓扑线性空间的理论. Schwarz 在 50 年代初出版的专著《分布论》("分布" 即广义函数) 是局部凸空间理论成熟的标志. 这一理论的建立, 不仅解决了相关领域中的具体问题, 也极大地推进了泛函分析学科的进一步发展.

拓扑线性空间一般理论的建立使人们更加全面、深刻地理解了抽象空间的结构和拓扑的属性, 从而更加促进了算子理论向广度和深度两个方向的发展. 本书第二部分, 即 Banach 代数与有界和无界算子的谱理论是经典算子理论的核心. 这些理论的建立不仅涵盖了以往所研究的基本对象, 扩展了泛函分析学科的基础, 而且为偏微分方程、随机过程理论、抽象调和分析、群表示论、控制论、理论物理以及工程技术领域带来更广泛的应用. 可以说这些工作将数学理论的抽象性与广泛的实用性发挥到了极致. 引人注目的是, 20 世纪末算子空间理论成为泛函分析热门的研究课题, 这反映了算子理论强劲的生命力.

本书共由六章和两个附录组成. 大致说来, 前面三章叙述拓扑线性空间的一般理论. 第一章包括拓扑线性空间的基本属性, 它的局部基的构造、可度量化以及局部凸空间的特征. 第二章是在拓扑线性空间框架下的几个最具重要性的基本定理, 包括共鸣定理、开映射定理、闭图像定理以及线性泛函的 Hahn-Banach 延拓定理等, 有关结果与赋范空间有很强的可类比性. 第三章讲解局部凸空间的共轭理论, 主要是局部凸空间的弱拓扑、共轭空间的弱 $*$ 拓扑以及它们的某些应用, 其中还包括 Banach 空间的共轭、自反性以及紧凸集的端点性质等. 后面三章是关于 Banach 代数与算子谱理论. 第四章讲述 Banach 代数、Gelfand 变换以及 C^* 代数、正泛函的有关知识. 第五章着重于 Hilbert 空间上的有界线性算子的谱特性与谱分解定理, 主要对象是紧算子、Fredholm 算子和有界正规算子. 第六章讲述无界线性算子的谱理论, 包括闭稠定自伴算子、对称算子与无界正规算子. 最后介绍谱理论在算子半群理论与遍历理论中的一些应用. 书中在讲解上述理论知识的同时, 还选取相当数量的实际例子加以阐释, 以期加强基本

理论和实际应用之间的相互联系. 正文之外我们还安排了两个附录, 附录 A 罗列了关于集合论的几个公理, 附录 B 集中阐述了本书所用到的一些点集拓扑方面的知识.

为了提供更大范围的知识和工具, 对于本书的少数几个定理我们采用了只予以介绍而不证明的办法. 例如关于端点的 Choquet 表示定理, 关于赋范空间上两种拓扑等价的 Eberlein-Smulian 定理以及关于 C^* 代数与 Hilbert 空间上算子代数同构的 Gelfand-Naimark 定理等. 知道这些结论无论对于理论研究还是应用都会受益匪浅. 但是这些定理的证明有的需要更多基础, 有的将占用较多的篇幅, 本书只得割爱. 当然它们的数量不多, 有兴趣的读者可参考书末提供的相关书籍和文献.

作为一门课程, 泛函分析近年来在我国高等教育中受到越来越多的重视, 很多院校为本科生开设了这门课程, 与此同时也选取泛函分析更深入一些的内容作为研究生必修课或选修课. 随着基础理论教学的加强, 这种发展的势头有增无减. 本书即是为具有初步泛函分析知识的读者提供的深入一步学习的教材或参考书. 自 80 年代中期以来, 本书主要内容曾经作为公共课或专业基础课向数学各专业的研究生讲授, 在授课过程中我们就取材和内容进行过数次调整与修改, 以便适应相关专业扩展泛函分析知识的需要同时也照顾授课对象的实际状况. 实践表明, 本书内容与本科阶段泛函分析基础知识有很好的衔接, 适合具有本科泛函分析基本知识的读者进一步深入学习.

在本书成书过程中作者曾经得到国内一些专家、学者的宝贵意见, 作者在此对他们表示由衷地感谢! 此次出版前新疆大学别克教授、广州技术师范学院刘明学教授与武汉大学王茂发教授协助作者对书稿进行了细心的校勘, 借此机会作者对他们的热情帮助深表谢忱!

本书对内容的取舍与安排是一种尝试, 由于作者学识所限, 其中会有不少缺陷与不足之处, 诚望专家与读者批评指正.

作者
于武昌珞珈山寓所
2012 年 10 月

符号表

R, C, Φ	实数域, 复数域, 标量域 (R 或 C)
N, Z, R^+	自然数全体, 整数全体, 非负实数全体
Φ^n	n 维欧氏空间
$\varnothing$	空集
$A+B, \alpha A$	集合 A, B 的线性和, A 的数乘积
$A\cup B, A\cap B,\ A\backslash B,\ A\triangle B$	集合 A, B 的并, 交, 余, 对称差
$\overline{E}, E^0, E'$	集合 E 的闭包, 内部, 聚点集
∂D	集合 D 的边界
$\mathrm{co}(E)$, $\mathrm{aco}(E)$	集合 E 的凸包, 绝对凸包
$\mathrm{span}\, E$	由集合 E 张成的线性 (子) 空间
$\dim X$	空间 X 的维数
$d(x, y)$	两点 x, y 之间的距离
$d(x, E)$	x 到集合 E 的距离
$O(x, r)$	以 x 为中心, r 为半径的球
$S(X), S_X$	空间 X 的闭单位球
$Sp(X)$	空间 X 的单位球面
μ_A	集合 A 的 Minkowski 泛函
$N(x)$	x 的邻域系
$N_X(0), N_Y(0)$	空间 X, Y 中 0 点的邻域系
$\mathcal{N}(T), \mathcal{R}(T)$	算子 T 的零空间, 值空间
$T: X\to Y, x\mapsto y$	从 X 到 Y 中的映射 (算子), 把点 x 映射为点 y

$T(A), T^{-1}(B)$	(在映射 T 下) 集合 A 的像, 集合 B 的原像
$(x_\lambda, \lambda \in \Lambda)$	拓扑空间中的网
X/M	X 关于 M 的商空间
$\pi : X \to X/M$	商映射
$\widetilde{x}$	x 的陪集
$(p_\lambda : \lambda \in \Lambda)$	拓扑线性空间的半范数族
$\mathcal{L}(X,Y), \mathcal{L}(X)$	从 X 到 Y 中, 或到 X 中的有界线性算子全体
$T\|_M$	算子 T 在集合或空间 M 上的限制
$\operatorname{codim} M, \dim X/M$	子空间 M 的余维数
$C(\Omega)$	Ω 上连续函数的全体
$C^\infty(\Omega)$	Ω 上具有任意阶导数的连续函数全体
$\mathcal{D}_K$	支撑在 K 中的具有任意阶导数的连续函数全体
$\tau_{\mathcal{F}}$	由映射族 $\mathcal{F}$ 诱导的拓扑
X', X''	X 的一次、二次共轭空间
x^*	共轭空间的元素或 C^* 代数中 x 的对合
$J : X \to X^{**}$	自然嵌入算子
$\overline{E}^w, \overline{E}^{w^*}$	集合 E 的弱闭包, 弱 $*$ 闭包
$x_n \to x, x_n \to^w x$	x_n 收敛 (弱收敛) 于 x
$\mathrm{Re}\, f, \mathrm{Im}\, f$	泛函 f 的实部, 虚部
$X \oplus Y$	空间 X 与 Y 的直和
$\mathcal{C}(X,Y),\ \mathcal{C}(X)$	从 X 到 Y (到 X) 中的紧算子全体
$x \perp y, M \perp N$	元素 x 与 y 正交, 集合 M 与 N 正交
$E^\perp$	集合 E 的正交补空间
S', S''	算子 S 的一次、二次换位子
$D^\alpha, \partial^\alpha$	α 阶导数, α 阶广义导数
$\|\mu\|(\Omega)$	测度 μ 的全变差
$ex\ K$	集合 K 的端点集
$\mathcal{E}(x)$	x 的本质值域
$f * g$	函数 f 与 g 的卷积
$\widehat{f}(n)$	函数 f 的第 n 个 Fourier 系数
T^*, T^{-1}	算子 T 的共轭 (伴随) 算子, 逆算子
$r(A)$	算子 A 的谱半径
$\Delta(X)$	Banach 代数 X 上的复同态全体
$\mathfrak{M}(X)$	Banach 代数 X 的极大理想全体
$\Gamma : X \to C(\mathfrak{M})$	Banach 代数 X 上的 Gelfand 变换

$\widehat{x}$	x 的 Gelfand 表现
$x^+, x^-, \|x\|, x^{\frac{1}{2}}$	C^* 代数中的元素 x 的正部, 负部, 绝对值, 平方根
$\mathcal{C}(H), \mathcal{F}(H), \mathcal{F}d(H)$	H 上的紧算子, 有限秩算子, Fredholm 算子全体
$\rho(T), \sigma(T)$	算子 T 的正则集, 谱集
$S^p, \mathrm{tr}(T)$	p 类 Scatten 算子, 算子 T 的迹
$\sigma_p(T), \sigma_c(T), \sigma_r(T), \sigma_{ess}(T)$	算子 T 的点谱, 连续谱, 剩余谱, 本质谱
$\mathcal{G}(T)$	算子 T 的图像
$\mathrm{ind}(T)$	算子 T 的 Fredholm 指标
$\mathrm{def}(T)$	算子 T 的亏指数
$\mathcal{D}(T)$	(无界算子 T) 的定义域
$\exists$	存在量词
$\forall$	全称量词
$\Rightarrow$	蕴含
$\Leftrightarrow$	等价

郑重声明

目录

第一章 拓扑线性空间 1
§1.1 线性空间 1
§1.2 拓扑线性空间的局部基 6
§1.3 有界性、可度量化、完备性 12
§1.4 局部凸空间 20
§1.5 有限维空间、积空间、商空间 30
§1.6 若干例子 37
习题一 43

第二章 拓扑线性空间的若干基本定理 47
§2.1 一致有界原理 47
§2.2 开映射与闭图像定理 56
§2.3 Hahn-Banach 延拓定理 60
习题二 64

第三章 局部凸空间的共轭理论 67
§3.1 弱拓扑 67
§3.2 弱 * 拓扑 74
§3.3 Banach 空间的共轭、自反性 78
§3.4 弱拓扑的几个应用 84

§3.5 紧凸集的端点表现与不动点性质 · · · · · · · · · · 98
习题三 · · · · · · · · · · 107

第四章 Banach 代数 · · · · · · · · · · 109
§4.1 Banach 代数与理想 · · · · · · · · · · 109
§4.2 Gelfand 变换 · · · · · · · · · · 118
§4.3 C^* 代数 · · · · · · · · · · 124
§4.4 正元与正泛函 · · · · · · · · · · 127
习题四 · · · · · · · · · · 130

第五章 Hilbert 空间上有界算子的谱理论 · · · · · · · · · · 133
§5.1 Hilbert 空间与空间上的几类算子 · · · · · · · · · · 133
§5.2 紧算子、Fredholm 算子及其谱 · · · · · · · · · · 141
§5.3 紧算子的若干例子 · · · · · · · · · · 150
§5.4 正规算子的谱 · · · · · · · · · · 159
§5.5 极分解、vN 代数、GNS 构造 · · · · · · · · · · 169
习题五 · · · · · · · · · · 175

第六章 无界算子的谱理论 · · · · · · · · · · 177
§6.1 闭稠定自伴算子 · · · · · · · · · · 177
§6.2 对称算子的扩张及扰动 · · · · · · · · · · 189
§6.3 无界正规算子的谱 · · · · · · · · · · 194
§6.4 算子半群 · · · · · · · · · · 199
§6.5 Markov 过程、遍历定理 · · · · · · · · · · 211
习题六 · · · · · · · · · · 216

附录 A 关于集合论的若干公理 · · · · · · · · · · 219

附录 B 点集拓扑知识提要 · · · · · · · · · · 221

参考书目 · · · · · · · · · · 241

名词索引 · · · · · · · · · · 243

第一章　拓扑线性空间

尽管赋范空间概括了客观存在的许多对象, 但仍有很多对象不能纳入范数这种结构, 也就是说它们自身具有的拓扑不能由一个范数导出. 这使得研究一般拓扑线性空间理论成为必要.

作为整个理论的基础, 本章将首先叙述拓扑线性空间的线性结构和拓扑结构, 后者主要体现为空间的邻域结构. 接着我们将介绍拓扑线性空间的几种主要性质, 即有界性、可度量化以及完备性, 对于线性算子的性质也一并介绍. 之后将叙述局部凸空间的基本属性以及有限维空间、积空间、商空间的性质. 在此过程中, 各种类型空间 (内积空间, 赋范空间, F 空间, Frechet 空间等) 的相互关系将会显示出来. 最后, 我们将给出一些拓扑线性空间的实际例子.

§1.1　线性空间

让我们先来明确一些概念和记号.

设 R 是实数域, C 是复数域. 用 Φ 代表二者, 即或为实数域, 或为复数域, Φ 中的元素称为标量.

定义 1.1　称一个集合 X 为线性空间或向量空间, 如果 X 上定义了两种运算: 加法和数乘, 其中关于加法满足: $\forall x, y, z \in X$,

(1) (结合律) $(x+y)+z = x+(y+z)$;

(2) (交换律) $x+y = y+x$;

(3) 存在 $\theta \in X$ 使得 $\forall x \in X, x+\theta = x$; 称 θ 为 X 的零元;

(4) $\forall x \in X$, $\exists y \in X$ 使得 $x+y = \theta$, 称 y 为 x 的负元, 记为 $y = -x$.

关于数乘满足: $\forall \alpha, \beta \in \Phi; x, y \in X$,

(5) $1x = x$;

(6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

(7) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x,\ \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$.

线性空间中的元素称为向量或点. 若 $\Phi = R$, 称 X 是实线性空间; 若 $\Phi = C$, 称 X 是复线性空间. 通常记 θ 为 0, 根据上下文容易区分空间中的零元与标量域中的数字 0.

在向量空间中将使用如下记号: 若 $x \in X$, A, B 是 X 的子集, $\alpha \in \Phi$, K 是 Φ 的子集, 则

$$
\begin{aligned}
x + A &= \{x + a : \forall a \in A\}, \\
A + B &= \{a + b : \forall a \in A, b \in B\}, \\
\alpha A &= \{\alpha a : \forall a \in A\}, \\
KA &= \{\alpha a : \forall \alpha \in K,\ a \in A\}.
\end{aligned}
$$

注意应该将集合的这些线性运算与通常集合的并与交运算区分开来.

X 的子集 M 称为 X 的线性子空间, 若 $\forall x,\ y \in M, \alpha \in \Phi$, 则 $x+y, \alpha x \in M$ 或者按照上面记号,

$$M + M \subset M, \quad \Phi M \subset M.$$

换句话说, M 对于加法和数乘运算是封闭的. 注意这里的子空间 M 的标量域 Φ 应该与原空间 X 的标量域保持一致, 即 X 是实空间, M 也是实空间; X 是复空间, M 也是复空间.

线性空间 X 中的 n 个元素 $x_1, \cdots, x_n$ 称为线性无关的, 若对于任何一组标量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \Phi$, 当 $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$ 时, 必有 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. 不是线性无关的 n 个元素称为线性相关的. 一族元素 $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 称为线性无关组, 若其中任意有限多个元素线性无关. 注意这里 Λ 可以是有限集, 也可以是可数元穷集, 甚至不可数无穷集.

一个线性无关组 $E = \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 称为 X 的 Hamel 基, 若 X 中每个元素 x 可以用 E 中有限多个元素线性表示. 此时 E 中元素的个数称为 X 的维数. 若 E 由 n 个元素组成, 称 X 是 n 维空间, 记为 $\dim X = n$. 否则记为 $\dim X = \infty$, 称 X 是无穷维空间.

由定义知道 X 的基即是 X 中的极大线性无关组. 应用书末附录 A 中的 Zorn 引理可以证明, 极大线性无关组一定是存在的. 换句话说, 任一非零线性空间存在 Hamel 基.

在一个线性空间中还可以引入下面概念.

定义 1.2 设 X 是线性空间, Φ 是其标量域, $W \subset X$.

(1) 称 W 是凸集, 若对于任何 $0<t<1$, $tW+(1-t)W \subset W$.

(2) 称 W 是平衡集, 若 $\forall \alpha \in \Phi, |\alpha| \leqslant 1$, $\alpha W \subset W$.

(3) 称 W 是对称集, 若 $-W=W$.

(4) 称 W 是吸收集, 若 $\forall x \in X, \exists t>0$ 使得 $tx \in W$.

显然平衡集一定是对称集, 但反之却未必. 同时, 由定义知吸收集必定包含原点. 须注意吸收集未必是凸集. 例如, 被称为 Schatz 苹果的集合 (见图 1) 是 R^2 中的吸收集, 但它并不是凸集. 此外, 平衡集对于标量域为实数域或为复数域有很大差别. 例如, 若 $X=R^2$, 则任何以原点为对称点的线段或直线都是平衡的; 若 $X=C$, 虽然从点集的角度来看二者是一样的, 但只有每个以原点为中心的圆盘才是其中的平衡集, 包括 $\{0\}$ 和整个 X.

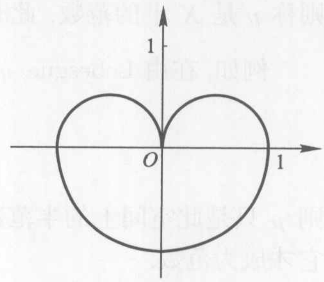

图 1 Schatz 苹果

下面命题不难直接用定义得到.

命题 1.1 设 X 是标量域 Φ 上的线性空间, $E \subset X$.

(1) E 是平衡集当且仅当对于 $\forall \alpha, \beta \in \Phi$, 若 $|\alpha| \leqslant |\beta|$, 则 $\alpha E \subset \beta E$.

(2) E 是平衡吸收集, 则对于每个 $x \in X$, 存在 $t>0$, 使得 $\forall \alpha \in \Phi$, 当 $|\alpha| \leqslant t$ 时, $\alpha x \in E$.

定义 1.3 设 X, Y 是线性空间, 称映射 $T: X \to Y$ 是线性的, 若

$$T(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha T x_1+\beta T x_2, \quad \forall x_1, x_2 \in X; \alpha, \beta \in \Phi.$$

当 Y 是标量域 Φ 时, 称 T 是 X 上的线性泛函.

若 $T: X \to Y$ 是一个映射, $A \subset X, B \subset Y$, 今后记

$$T(A)=\{Tx: x \in A\}, \quad T^{-1}(B)=\{x: Tx \in B\}.$$

分别称 $T(A)$ 和 $T^{-1}(B)$ 为 A 的像和 B 的逆像.

读者可直接用定义证明下面命题.

命题 1.2 若 $T: X \to Y$ 是线性映射, $A \subset X, B \subset Y$, 则当 A 是凸集 (线性子空间, 平衡集) 时, $T(A)$ 也是. 当 B 是凸集 (线性子空间, 平衡集) 时, $T^{-1}(B)$ 也是.

定义 1.4 设 X 是线性空间, $p: X \to R$ 是一泛函, 若 p 满足

(1) $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y), \quad \forall x, y \in X,$ (1.1)

则称 p 在 X 上是次可加的. 若

(2) $p(tx) = tp(x), \ \forall x \in X, t \geqslant 0,$ (1.2)

则称 p 在 X 上是正齐性的. 若 p 满足 (1) 和

(3) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x), \quad \forall x \in X, \alpha \in \Phi,$ (1.3)

则称 p 是 X 上的半范数. 若 p 是 X 上的半范数并且

(4) 当 $x \neq 0$ 时, $p(x) > 0$,

则称 p 是 X 上的范数. 此时也称 $p(x)$ 是 x 的范数.

例如, 在由 Lebesgue q $(1 \leqslant q < \infty)$ 方可积函数构成的线性空间中, 若定义

$$p(x) = \left(\int_\Omega |x(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.4}$$

则 p 只是此空间上的半范数. 当把仅在零测度集上不同的函数视为同一元时, 它才成为范数.

命题 1.3 设 $p: X \to R$ 是线性空间 X 上的半范数, 则

(1) $p(0) = 0, \ p(x) \geqslant 0, \forall x \in X$.

(2) $|p(x) - p(y)| \leqslant p(x - y), \forall x, y \in X$.

(3) $M = \{x \in X : p(x) = 0\}$ 是 X 的线性子空间.

(4) 对于任何 $\delta > 0$, 集合

$$B = \{x \in X : p(x) < \delta\}, \quad B' = \{x \in X : \ p(x) \leqslant \delta\}$$

都是 X 中的平衡吸收凸集.

证 1° 先证 (2), 由定义中的 (3) 知道 $p(-x) = p(x)$. 再由定义中的 (1) 分别得到

$$p(x) = p(y + x - y) \leqslant p(y) + p(x - y),$$
$$p(y) = p(x + y - x) \leqslant p(x) + p(y - x),$$

于是

$$\pm(p(x) - p(y)) \leqslant p(x - y),$$

由此得到命题中的 (2).

2° 由

$$0 = |p(x) - p(x)| = |p(x) - p(-x)| \leqslant p(2x) = 2p(x),$$

得到 $p(x) \geqslant 0$. 在定义 1.4 的 (3) 中取 $\alpha = 0$ 得到 $p(0) = 0$.

3° 对于 (3), 若 $x, y \in M$, 则 $p(x) = p(y) = 0$, 从而

$$0 \leqslant p(x + y) \leqslant p(x) + p(y) = 0,$$

故有 $p(x+y)=0$. 又 $p(\alpha x)=|\alpha|p(x)=0$, 所以 $x+y, \alpha x\in M$, M 是线性子空间.

4° 这里只证 B, 设 $x,y\in B$, 则 $p(x)<\delta, p(y)<\delta$. 对于 $0<t<1$, 由

$$p(tx+(1-t)y)\leqslant p(tx)+p((1-t)y)=tp(x)+(1-t)p(y)<\delta,$$

于是 B 是凸集. 若 $x\in B, |\alpha|\leqslant 1$, 则 $p(\alpha x)=|\alpha|p(x)<\delta$, 于是 $\alpha x\in B$, 即 $\alpha B\subset B$, 所以 B 是平衡集. 为证 B 是吸收的, 对于 $x\in X$, 不妨设 $p(x)>0$, 则

$$p\left(\frac{\delta x}{2p(x)}\right)=\frac{\delta p(x)}{2p(x)}=\frac{\delta}{2}<\delta,$$

于是 $\frac{\delta x}{2p(x)}\in B$. 所以 B 是吸收的. □

定理 1.1 设 X 是线性空间, $A\subset X$ 是吸收凸子集, 定义

$$\mu_A(x)=\inf\{t>0: x\in tA\},\quad \forall x\in X, \tag{1.5}$$

则 $\mu_A: X\to R^+$ 在整个 X 上有定义并且

(1) $\mu_A(x+y)\leqslant \mu_A(x)+\mu_A(y), \forall x,y\in X$.

(2) 若 $t\geqslant 0$, 则 $\mu_A(tx)=t\mu_A(x), \forall x\in X$.

(3) 若 A 还是平衡的, 则 μ_A 是半范数.

(4) 记

$$B=\{x:\mu_A(x)<1\},\quad C=\{x:\mu_A(x)\leqslant 1\},$$

则 $B\subset A\subset C$, 并且 $\mu_B=\mu_A=\mu_C$.

称 μ_A 是 A 的 Minkowski 泛函.

证 由 A 的吸收性, $\forall x\in X, \exists t>0$ 使得 $tx\in A$, 或者等价地 $x\in t^{-1}A$, 于是 $0\leqslant \mu_A(x)\leqslant t^{-1}$. 故 μ_A 在 x, 从而在整个 X 上有定义.

1° 由定义, $\forall\varepsilon>0, \exists t>0$ 使得 $x\in tA$, $t<\mu_A(x)+\varepsilon$. 同样地, $\exists s>0$ 使得 $y\in sA$, $s<\mu_A(y)+\varepsilon$. 换句话说, $t^{-1}x$, $s^{-1}y\in A$. 由于 A 为凸集,

$$\frac{x+y}{t+s}=\frac{t}{t+s}\frac{x}{t}+\frac{s}{t+s}\frac{y}{s}\in A,$$

即 $x+y\in(t+s)A$. 由此知

$$\mu(x+y)\leqslant t+s<\mu_A(x)+\mu_A(y)+2\varepsilon.$$

由于 ε 是任意的, 所以有 $\mu_A(x+y)\leqslant\mu_A(x)+\mu_A(y)$.