普通高等教育"十二五"规划教材

数理方程与特殊函数

陈军斌　王建刚　编著

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM

普通高等教育“十二五”规划教材

数理方程与特殊函数

陈军斌　王建刚　编著

中国石化出版社

内 容 提 要

本书详细介绍了三类基本方程——波动方程、热传导方程和泊松方程的导出以及定解问题的提法；分离变量法，包括有界弦的自由振动，有界杆上的热传导，二维 Laplace 方程的定解问题，非齐方程的解法及非齐边界条件处理；行波法、积分变换法、Green 函数法、保角变换法和数理方程数值解；Bessel 方程的导出、求解，Bessel 函数的性质及在定解问题中的应用；Legendre 方程的导出、求解，Legendre 多项式的性质及在定解问题中的应用。

本书可作为工科院校研究生及数学系、物理系本科专业教学参考。

图书在版编目(CIP)数据

数理方程与特殊函数／陈军斌，王建刚编著．—北京：中国石化出版社，2013.5
普通高等教育"十二五"规划教材
ISBN 978-7-5114-2110-4

Ⅰ.①数… Ⅱ.①陈… ②王… Ⅲ.①数学物理方程-高等学校-教材 ②特殊函数-高等学校-教材
Ⅳ.①O175.24 ②O174.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 081716 号

中国石化出版社出版发行

地址：北京市东城区安定门外大街 58 号
邮编：100011 电话：(010)84271850
读者服务部电话：(010)84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail：press@sinopec.com
北京科信印刷有限公司印刷
全国各地新华书店经销

*

787×1092 毫米 16 开本 8.75 印张 218 千字
2013 年 5 月第 1 版 2013 年 5 月第 1 次印刷
定价：25.00 元

前　言

“数理方程与特殊函数”课程是理工科专业学生的一门重要的数学课程，是继数学分析(或高等数学)、线性代数、常微分方程、复变函数等课程后的一门后续课程。该门课程涉及的物理背景知识较多，难度大。该课程由“数学物理方程”与“特殊函数”两大部分内容组成。“数学物理方程”部分主要包括数学物理方程定解问题、二阶线性偏微分方程及分类、行波法、分离变量法、积分变换法、格林函数法、保角变换法和数理方程数值解简介等；“特殊函数”部分主要包括贝塞尔函数及勒让德多项式及如何从求解数学物理方程的定解问题引出贝塞尔方程与勒让德方程等。这两大部分内容既有一定的相对独立性，但从某种意义上讲又是一个不可分割的有机整体。

通过这门课程的学习，学生应掌握三类典型方程定解问题的解法，了解贝塞尔函数及勒让德多项式的简单性质及其在数学物理方程中的应用，为学习有关后继课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的数学基础，也为进一步了解和应用现代偏微分方程的有关内容解决科学技术和工程实际问题提供重要帮助，同时提高学生的建立模型能力、逻辑思维能力、分析运算能力等。

本书是在作者所承担的研究生课程讲义《数理方程及数值解》基础上编写而成，全书共10章，其中第九、十章由王建刚老师编写，其余章节由陈军斌教授编写。在编写过程中得到“十一五”国家科技支撑计划项目(2007BAB17B04)、陕西省重点实验室基金项目和西安石油大学研究生名课程“数理方程及其数值解”资助；得到西安石油大学研究生部培养科常颖老师、中国石油天然气集团公司勘探开发研究院廊坊分院孙贺东博士的大力支持和帮助，谨在此表示感谢；对本教材所引用到的众多前辈和同行的成果，也表示十分感谢。最后我也要感谢研究生马镐、张建伟、牛易楷和杨兴东等在本书文字编辑方面所付出的辛勤劳动。

衷心地希望本书不仅能成为广大学生学习“数理方程与特殊函数”的良师益友，而且也能对从事“数理方程与特殊函数”等课程教学的教师、从事自然科学工作的研究人员有所助益。

全书力求实思路清晰，逻辑严密，重点突出，题目典型。限于作者水平有限，谬误之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

目　录

目　录

第一章　定解问题

在对物理问题进行理论研究时，首先必须将其转化成数学语言。即建立描述和研究物理现象的数学模型——定解问题，本章将介绍建立定解问题的有关概念，并从物理学中的三个典型实例入手，介绍建立定解问题的一般方法和步骤。在本章以后的第三章至第八章中，将介绍数学物理方程的各种求解方法。

第一节　基本概念

一、数学物理方程

数学物理方程是指从物理问题中所导出的反映客观物理量在各个地点、各个时刻之间相互制约的一些偏微分方程(包括常微分方程和积分方程)。

二、数学物理方程的分类

数学物理方程按其所代表的物理过程可分为如下三类：

1. 描述振动和波动特征的波动方程

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f \tag{1-1}$$

2. 反映输运过程的扩散(或热传导)方程

$$u_t = D\Delta u + f \tag{1-2}$$

3. 描述稳定过程或稳定状态的Poisson方程

$$\Delta u = -h \tag{1-3}$$

其中　$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$，$u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$，$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$

而未知函数 $u(x, y, z, t)$ 在三类方程中分别表示位移、浓度(或温度)和稳定现象特征；a 和 D 表示波速和扩散(或热传导)系数；f 和 h 是与源(汇)有关的已知函数，当 $f=0$ 或 $h=0$ 时，相应的方程称为齐次方程。

三、用数学物理方程研究问题的一般步骤

1. 导出或写出定解问题(它包括数学物理方程和定解条件两部分)；
2. 求解已导出或写出的定解问题；
3. 对所求解讨论其适应性(即解的存在性、唯一性、稳定性)，并作出适当的物理解释。

四、求解数学物理方程的方法

求解数学物理方程的方法大致可以分为如下几种：行波法(达朗贝尔法)、分离变量法、积分变换法、Green 函数法、保角变换法、复变函数法、变分法、数值方法。

第二节　数学物理方程的建立或推导

一、建立(或推导)数学物理方程的步骤

建立数学物理方程一般步骤:

1. 从所研究的系统中任取一单元体，分析该单元体与邻近单元体之间的相互关系;

2. 根据相关的物理定律(如牛顿第二定律、能量守恒定律、奥－高定律等)，用数学式子表达这个作用;

3. 化简、整理即得所研究问题满足的数学物理方程。

二、建立(导出)方程时经常要用到的物理定律

1. Newton 第二定律

$$F = ma \tag{1-4}$$

2. Fourier 实验定律(即热传导定律)

当物体内部存在温度差时会产生热量的流动。热流密度 q(即单位时间内流过单位横截面的热量)与温度的下降率成正比，即

$$q = -K\nabla u \tag{1-5}$$

其中，K 为热传导系数，负号表示温度下降的方向，写成分量形式，即

$$q_x = -K\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$q_y = -K\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$q_z = -K\frac{\partial u}{\partial z}$$

3. Newton 冷却定律

物体内部冷却时放出的热量 $-K\nabla u$ 跟物体与外界的温度差($u|_{边} - u_0$)成正比，其中 u_0 为周围介质的温度。

4. 电荷守恒定律

电荷既不能创生，也不能消灭，它只能从一个物体转移到另一个物体，或从物体的一部分转移到另一部分。

5. 热量(质量)守恒定律

物体内部温度升高所需的热量(浓度增加所需要的质量)，等于流入物体内部的净热量(质量)与物体内部源所产生的热量(质量)之和。

6. Fick 定律(扩散定理)

当物体内部浓度分布不均匀时，会引起物质的扩散运动。其热流密度 q(即单位时间内流过单位截面积的离子数)与浓度的下降率成正比，即

$$q = -D\nabla u \tag{1-6}$$

其中 D 为扩散系数，负号表示浓度减小的方向，写成分量形式，即

$$q_x = -D\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$q_y = -D\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$q_z = -D\frac{\partial u}{\partial z}$$

7. Gauss 定律

通过一个任意闭合曲面的电通量，等于这个闭曲面所包围的自由电荷的电量的$\frac{1}{\varepsilon}$倍，即

$$\oint_s E \cdot \mathrm{d}s = \frac{1}{\varepsilon}\int_\tau \rho \mathrm{d}T \tag{1-7}$$

其中 ε 是介电常数，ρ 为体电荷密度。

8. Jaule－Lens 定律

电流通过纯电阻导体时放出的热量跟电流强度 I 的平方，导线的电阻 R 和通电时间 t 成正比，即

$$Q = I^2Rt \tag{1-8}$$

9. 基尔霍夫定律

（1）第一定律：汇合在节点的电流代数和为零（规定流入节点的电流为正，流出节点的电流为负），即

$$\sum_{i=1}^{k} I_k = 0 \tag{1-9}$$

（2）沿任一闭合回路的电势增量的代数和为零（规定回路顺时针方向的电动势和电流都为正，反之为负），即

$$\sum_{k=1}^{n} I_k R_k = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \tag{1-10}$$

10. 电磁感应定律

不论任何原因使通过回路面积的磁通量发生变化时，回路中产生的感应电动势与磁通量对时间的变化率的负值成正比，即

$$\varepsilon = -N\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \tag{1-11}$$

其中 N 为感应回路串联线圈的匝数，此即法拉第电磁感应定律。由该定律可知，闭合回路（或线圈）中的电流发生变化引起自身回路的磁通量改变，从而产生的自感电动势为

$$\varepsilon = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{1-12}$$

其中，L 为自感系数。

11. 虎克定律

在弹性限度内，弹性体的弹力和弹性体的形变量成正比，即

$$f = -kx \tag{1-13}$$

其中 k 为弹性的劲度系数，负号表示弹性力的方向与形变方向相反。

第三节　定解条件

定解条件：是确定数学物理方程通解中所含的任意常数（或任意函数），使解具有唯一性的充分必要条件，它又分为初始条件和边界条件两种。若研究的系统是由几种不同介质组成时，则在两种介质的介面上定解条件还应当有衔接条件。

一、初始条件

1. 定义：初始条件是物理过程初始状态的数学表达式。
2. 初始条件的个数等于未知函数对时间的最高阶导数的阶数。

二、边界条件

1. 定义：边界条件是指物理过程边界状况的数学表达式。
2. 边界条件的种类和个数：边界条件分三类。

(1) 第一类边界条件：

$$u\big|_{边}=f(M,\ t) \tag{1-14}$$

其中 M 代表区域边界上的变点，$f(M,\ t)$是已知函数(下面也均一样)。

例 1-3-1 杆的热传导问题，若在 $x=l$ 处的一端温度为 $T_0\mathrm{e}^{-t}$，则

$$u(l,\ t)=T_0\mathrm{e}^{-t}$$

例 1-3-2 长为 l 两端固定的弦的横振动问题，其边界条件为

$$u(0,\ t)=0,\ u(l,\ t)=0$$

(2) 第二类边界条件：又称为牛曼边界条件，它给出了未知函数在边界上法线方向的导数之值，即

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{边}=f(M,\ t) \tag{1-15}$$

例 1-3-3 杆的热传导问题，若已知在一端 $x=l$ 处流入的热流密度为 $\psi(t)$，则 $-q\big|_{x=l}=\psi(t)$

根据 Fourier 热传导定律有

$$q=-K\frac{\partial u}{\partial x}$$

故有

$$K\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=\psi(t)$$

即 $u_x(l,\ t)=\dfrac{1}{K}\psi(t)$

例 1-3-4 长为 l 的细杆的纵振动问题，若一端受有外力，单位面积所受的力为 $F(t)$，如图 1-1 所示。

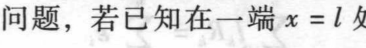

图 1-1

设杆内任一点处的应力为 $P(x,\ t)$，体密度为 ρ，横截面积为 A，现从杆中划出包括端点 $x=l$ 在内的一小段 Δx，则由 Newton 第二定律有：

$$[F(x,\ t)-P(l-\Delta x,\ t)]=(\rho\Delta xA)u_{tt}$$

令 $\Delta x\to 0$，则 $F(x,\ t)\to P(l,\ t)$

又由虎克定律 $$P(l,\ t)=E\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}$$

则 $F(x,\ t)=E\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}$

即在 $x=l$ 端的边界条件为

$$u_x(l,\ t)=\frac{1}{E}F(x,\ t)$$

其中 E 为杨氏模量，若该端点是自由的，即不受外力(外力 $F=0$)，则 $u_x(l,\ t)=0$

(3) 第三类边界条件：又称为混合边界条件，它给出了未知函数和它的法线方向上导数的线性组合在边界上的值，即

$$\left(u+h\frac{\partial u}{\partial n}\right)\bigg|_{边}=f(M,\ t) \tag{1-16}$$

例 1-3-5 在杆的热传导问题中，若某个端点 $x=l$ 自由冷却，即这个端点与周围介质按牛顿冷却定律交换热量，则在这个端点的边界条件为

$$-K\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=H(u\,|_{x=l}-u_0)$$

其中，H 为常数，u_0为周围介质的温度。所以

$$[u+hu_x]_{x=l}=u_0$$

其中 $h=\dfrac{K}{H}$

例 1-3-6 杆的纵振动问题，若一端 $x=l$ 与一个一端固定的弹簧相连，如图 1-2 所示。

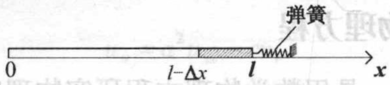

图 1-2

在杆的平衡位置弹簧的伸长(或压缩)为零，则弹簧力为

$$F(t)=-Ku(l,\ t)$$

其中，K 为弹簧的屈强系数。现从杆中划出包括端点 $x=l$ 在内的一小段 Δx，见图 1-2 所示。由牛顿第二定律

$$F(t)-P(l-\Delta x,\ t)A=\rho\Delta xAu_{tt}$$

令 $\Delta x\to 0$，则 $F(t)\to P(l,\ t)A$

根据虎克定律：$P(l,\ t)=E\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}$

所以 $-Ku(l,\ t)=EA\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}$

则 $u_x(l,\ t)+\dfrac{K}{EA}u(l,\ t)=0$

即在 $x=l$ 端的边界条件为

$$u_x(l,\ t)+hu(l,\ t)=0$$

其中 $h=\dfrac{K}{EA}$

除了以上三类边界条件外，由于物理上合理性的需要，有时还需要对方程中的未知函数附加以单值、有限等限制。如：

$$u(\varphi+2\pi)=u(\varphi)$$

$$u\,|_{边}\to 有限$$

这类附加条件称为自然边界条件。

三、衔接条件

由不同介质组成的系统，在两种不同介质的交界处需要给出两个衔接条件。例如由两种不同材料连接而成的杆的纵向振动，在连接点 $x=x_0$ 处，其位移和应力均应相等，于是有衔接条件：

$$u_1\Big|_{x=x_0}=u_2\Big|_{x=x_0};\ E_1\frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=x_0}=E_2\frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=x_0}$$

其中，E_1 和 E_2 分别为两种介质的杨氏模量。

四、三类定解问题

1. 初值问题：由泛定方程和初始条件构成的定解问题，又称 Cauchy 问题。
2. 边值问题：由泛定方程和边界条件构成的定解问题。
3. 混合问题：由泛定方程、初始条件和边界条件三者构成的一类定解问题。

第四节　建立（导出）数学物理方程

一、建立（导出）数学物理方程

建立（导出）数学物理方程，是用数学物理方程研究物理问题的关键一步。为此，对于所研究的物理问题，首先要明确要研究的是哪一类物理量 u（位移、温度等），然后再按前面所述的三个步骤，将所需研究的物理问题翻译成偏微分方程。

二、写出（或导出）定解条件、定解问题

定解问题 {
- 泛定方程——数理方程
- 定解条件 { 初始条件、边界条件、衔接条件

例 1－4－1　弦的横振动方程

在弦的横振动问题中，若弦受到与速度成正比的阻力，试推导弦的阻尼振动方程。

解：弦的横振动问题，通常是指绷紧于两个固定点之间的细而柔软的弦线，在平衡位置附近作振幅极其微小的横振动问题，显然该问题要研究的物理量 u 是弦的位移。

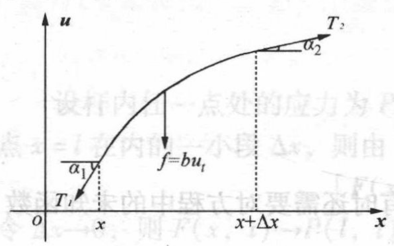

图 1－3

（1）如图 1－3 所示，考虑弦中任一小段 Δs 的受力情况，它位于 x 轴上的 $[x,\ x+\Delta x]$

依题设，设单位长弦上所受的阻力为 bu_t（b 为常数），则在振动过程中，Δs 段所受的纵向力为

$$T_2\cos\alpha_2-T_1\cos\alpha_1$$

所受横向力为

$$T_2\sin\alpha_2-T_1\sin\alpha_1-bu_t(x+\eta\Delta x)\cdot\Delta x$$

其中　$0<\eta\leqslant 1$，T_2 和 T_1 为 Δs 段两端所受张力。

（2）由于弦仅作横向振动，而无纵向振动，于是由 Newton 第二定律

$$\begin{cases} T_2\cos\alpha_2 - T_1\cos\alpha_1 = 0 \\ T_2\sin\alpha_2 - T_1\sin\alpha_1 - bu_t(x+\eta\Delta x)\cdot\Delta x = \rho u_{tt}(x+y\cdot\Delta x)\cdot\Delta x \end{cases}$$

其中，ρ 为弦的线密度。

（3）在小的振动情况下，由于 α_1、α_2 很小，则

$$\cos\alpha_1 \approx 1,\ \cos\alpha_2 \approx 1$$

$$\sin\alpha_1 \approx \alpha_1 \approx \tan\alpha_1,\ \sin\alpha_2 \approx \alpha_2 \approx \tan\alpha_2$$

而 $\tan\alpha_1 = \dfrac{\partial u(x,\ t)}{\partial x}$，$\tan\alpha_2 = \dfrac{\partial u(x+\Delta x,\ t)}{\partial x}$

于是运动方程化为

$$T_1 = T_2 \overset{\Delta}{=} T$$

$$\frac{T}{\rho}\frac{u_x(x+\Delta x,\ t) - u_x(x,\ t)}{\Delta x} - \frac{b}{\rho}u_t(x+\eta\Delta x,\ t) = u_{tt}(x+\eta\Delta x,\ t)$$

令 $\Delta x \to 0$ 得

$$\frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{b}{\rho}u_t = u_{tt}$$

令 $a^2 = \dfrac{T}{\rho}$，$c = \dfrac{b}{\rho}$　则有

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - cu_t$$

此方程即弦的阻尼振动方程。

例 1-4-2　扩散方程

设扩散物质的源强（即单位时间内由单位体积所产生的扩散物质）为 $F(x,\ y,\ z,\ t)$，试推导扩散方程。

解：设 $u(x,\ y,\ z,\ t)$ 表示粒子的浓度（单位体积内的粒子数），如图 1-4 所示。

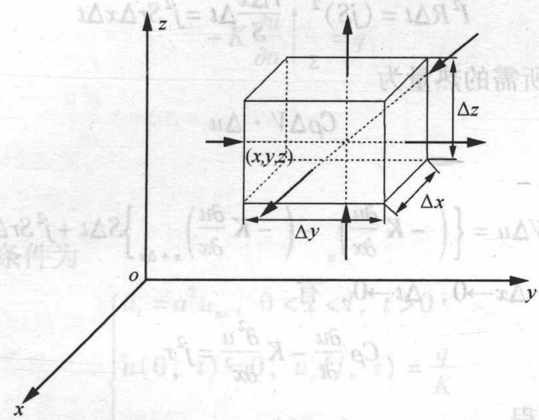

图 1-4

在空间中划出一小的平行六面体 $\Delta V = \Delta x\Delta y\Delta t$，考虑在 Δt 时间内 ΔV 中的粒子数的流动情况。由扩散定理知：

流入 x 方向的净粒子数　$[q_x(x,\ t) - q_x(x+\Delta x,\ t)]\Delta t\Delta y\Delta z$

流入 y 方向的净粒子数　$[q_y(y,\ t) - q_y(y+\Delta y,\ t)]\Delta t\Delta x\Delta z$

流入 z 方向的净粒子数　$[q_z(z,\ t) - q_z(z+\Delta z,\ t)]\Delta t\Delta x\Delta y$

而源强度产生的粒子数　$F(x,\ y,\ z,\ t)\Delta t\Delta x\Delta y\Delta z$

故由质量守恒定律：

$$[q_x - q_{x+\Delta x}]\Delta t\Delta y\Delta z + [q_y - q_{y+\Delta y}]\Delta t\Delta x\Delta z + [q_z - q_{z+\Delta z}]\Delta t\Delta x\Delta y$$
$$+ F(x,\ y,\ z,\ t)\Delta t\Delta x\Delta y\Delta z = [u(x,\ y,\ z,\ t+\Delta t) - u(x,\ y,\ z,\ t)]\Delta x\Delta y\Delta z$$

两边同除以 $\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$，并且令 $\Delta x\to 0$，$\Delta y\to 0$，$\Delta z\to 0$，$\Delta t\to 0$，有

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{\partial q_z}{\partial z} + F(x,\ y,\ z,\ t) = \frac{\partial u}{\partial t}$$

再将扩散定律代入有

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial u}{\partial z}\right) + F = \frac{\partial u}{\partial t}$$

上面的方程即为扩散方程。

例 1－4－3 热传导方程

设有一横截面积为 S，电阻率为 r 的均质导线，现有其电流密度为 j 的均匀分布的直流电通过，试推导导线内的热传导方程。

解：当导线内有电流通过时，导线会发热。若导线不粗，热量会沿电流流动的方向传递，如图 1－5 所示。在导线内任取一小段 Δx，考虑这一小段在 Δt 时间内热量的流动情况，设 k，c，ρ 分别为导线的热传导系数、比热、质量密度，u 代表温度，由 Fourier 实验定律，在 Δt 时间内流入单元体 ΔV 内的净热量为

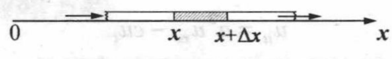

图 1－5

$$\left\{\left(-K\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x - \left(-K\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}\right\}S\Delta t$$

由导线发热定律有：体元 ΔV 当有电流通过时所产生的热量为

$$I^2R\Delta t = (jS)^2\cdot\frac{r\Delta x}{S}\Delta t = j^2Sr\Delta x\Delta t$$

而体元 ΔV 温度升高 Δu 所需的热量为

$$C\rho\Delta V\cdot\Delta u$$

由热量守恒定律：

$$C\rho\Delta V\Delta u = \left\{\left(-K\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x - \left(-K\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}\right\}S\Delta t + j^2Sr\Delta x\Delta t$$

两边同除 $S\Delta x\Delta t$，并且令 $\Delta x\to 0$，$\Delta t\to 0$，有

$$C\rho\frac{\partial u}{\partial t} - K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = j^2 r$$

例 1－4－4 泊松方程

设在充满了介电常数 ε 的介质区域中有体密度为 $\rho(x,\ y,\ z)$ 的电荷，试研究这个区域中的静电场。

解：由于静电场中存在一势函数 $V(x,\ y,\ z)$：$E = -\nabla V$

其中 E 为电场强度。故要研究此问题，只需要研究此区域中电位函数 V 所遵守的规律即可。在所研究的区域中，任取一封闭曲面 S，围出一块空间区域 τ，则由电学中的奥－高定理有

$$\oint_S E\cdot \mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon}\int_\tau \rho\,\mathrm{d}\tau$$

这里采用的是国际单位制。又

$$\oint_S E \cdot dS = \int_\tau \nabla \cdot E d\tau$$

故

$$\int_\tau \nabla \cdot E d\tau = \frac{1}{\varepsilon}\int_\tau \rho d\tau$$

由于 τ 是任意的，因此

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{\varepsilon}\rho$$

所以 $\Delta V = \frac{1}{\varepsilon}\rho$

此即泊松方程(在真空中 $\varepsilon = \varepsilon_0$)。若我们讨论的区域中无电荷，上式变为

$$\Delta V = 0$$

此即拉普拉氏方程(简称拉氏方程)。

例1-4-5 长为 l 的均匀杆，侧面绝缘，一端温度为零，另一端有恒定热量 q 进入(即单位时间由通过单位截面积流入的热量为 q)，杆的初始温度分布是 $\frac{x(l-x)}{2}$，试写出相应的定解条件。

解：该问题是一维热传导问题，初始条件为

$$u(x,0) = \frac{x(l-x)}{2},\ 0 \leqslant x \leqslant l$$

现考虑边值条件，设在 $x=0$ 这段的温度为0，则有

$$u(0,t)=0,\ t>0$$

另一端($x=l$)外有恒定的热流 q 进入杆内，由 Foruier 实验定律知在边界面 Σ 上有

$$-K\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_\Sigma = q$$

从而有 $K\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} = q$

即 $u_x(l,t) = \frac{q}{K}$

综上所述，相应的定解条件为

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx},\ 0<x<l,\ t>0 \\ u(0,t)=0,\ u_x(l,t) = \frac{q}{K} \\ u(x,0) = \frac{x(l-x)}{2} \end{cases}$$

例1-4-6 长为 l 的弦两端固定，开始时在 $x=c$ 受到冲量 K 的作用，试写出相应的定解问题。

解：该问题是一维弦振动问题，边界条件是显然的。由于弦两端固定，所以在这两点处的位移为0，即

$$u(0,t)=0 \quad u(l,t)=0$$

考虑初始条件，当冲量 K 作用于 $x=c$ 处时，就相当于在这点给出了一个初速度。考虑

以 c 为中心，长为 2δ 的一小段弦 $(c-\delta,\ c+\delta)$，假设弦是均匀的，其线密度为 ρ，则这一小段弦的质量为 $2\delta\rho$，受冲击时速度为 $u_t(x,\ 0)$，由动量定理得

$$2\delta\rho u_t(x,\ 0)=K,\ c-\delta<x<c+\delta$$

在这小段外，初速度为 0，于是有初始条件为

$$\begin{cases} u(x,\ 0)=0 \\ u_t(x,\ 0)=\begin{cases}\dfrac{K}{2\delta\rho}, & |x-c|\leqslant\delta \\ 0, & |x-c|>\delta\end{cases} \end{cases} \quad (\delta\to 0)$$

所以定解问题为

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx},\ 0<x<l,\ t>0 \\ u(0,\ t)=u(l,\ t)=0,\ t>0 \\ u(x,\ 0)=0,\ u_t(x,\ 0)=\begin{cases}0, & |x-c|>\delta \\ \dfrac{K}{2\delta\rho}, & |x-c|\leqslant\delta\end{cases} \quad (\delta\to 0) \end{cases}$$

例 1-4-7　在弦振动情形下，若弦的右端 $x=l$ 固定在弹性支撑上，如图 1-6 所示，推导此边界条件。

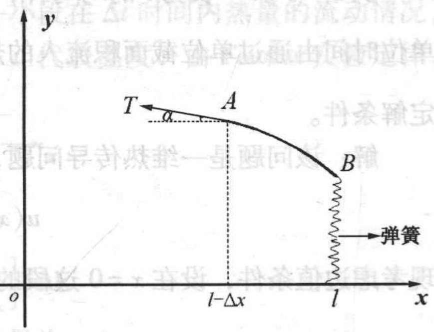

图 1-6

解：如图 1-6 所示，支撑的弹性回复力 F_l 与支撑的伸缩满足虎克定律

$$F_l=-K_lu$$

作用于弧 AB 上的合力沿 u 方向的分力为

$$\begin{aligned}(T+F_l)_u &= T\sin\alpha-K_lu\approx T[-\tan(\pi-\alpha)]-K_lu \\ &= -T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l-\Delta x}-K_lu\big|_{x=l}\end{aligned}$$

使该小段产生加速度，根据牛顿第二定律

$$-T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l-\Delta x}-K_lu\big|_{x=l}=\rho\Delta x\cdot\frac{\partial^2u}{\partial t^2}$$

令 $\Delta x\to 0$，即

$$\left[T\frac{\partial u}{\partial x}+K_lu\right]_{x=l}=0$$

同理，若弦的左端点 $x=0$ 连接在弹性支撑上，则边界条件为

$$\left[T\frac{\partial u}{\partial x}-K_0u\right]_{x=0}=0$$

例 1-4-8　弹性杆的原长为 l，一端固定，另一端被拉离平衡位置 b 而静止，放手让其振动，如图 1-7 所示。

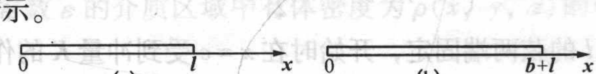

图 1-7

将其平衡位置选在 x 轴上，请写出定解条件。

解：因为弹簧纵振动所满足的是一维波的方程

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f$$

因此，必须有两个初始条件和两个边界条件。因为放手后才能振动，即放手之时为振动的初始时刻 $t=0$，此时杆振动的速度为零，即

$$u_t\big|_{t=0}=0$$

而 $x=l$ 端拉离平衡位置使整个弹簧杆伸长了 b，这个 b 是整个杆各部分延伸后的贡献，而不是 $x=l$ 端伸长的贡献，故整个系统的初始位移为

$$u\big|_{t=0}=\frac{b}{l}x$$

再看边界条件，一端固定即在该端没有位移，故有 $u\big|_{x=0}=0$；另一端放手任其振动时未受外力，故有 $u_x\big|_{x=l}=0$，因为该端单位面积受其外力 $F(t)$ 时，由虎克定律：

$$E\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=F(t)，\ 即\ \ \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=\frac{1}{E}F(t)$$

习　题

1.1　在弦的横振动问题中，若单位长度的弦受到一与速度成正比的阻力，试推导弦的阻尼振动方程为

$$u_{tt}+cu_t=a^2u_{xx}$$

其中，c 为常数。又考虑到回复力与弦的位移成正比的情形，证明这时所得到的数理方程为

$$u_{tt}+cu_t+bu=a^2u_{xx}$$

其中，b 为常数。此方程称为电报方程。

1.2　试推导均匀细杆的纵向振动方程

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,\ t)$$

其中，$a^2=\dfrac{E}{\rho}$，$f=\dfrac{F(x,\ t)}{\rho}$；E 为杨氏模量，ρ 为杆的密度，$F(x,\ t)$ 为单位长度的杆沿杆长方向所受的外力。

1.3　在一维热传导方程 $u_t=Du_{xx}$ 中，假设热量因杆的物质放射衰变(按指数规律)而损失，证明上式方程变为

$$u_t=Du_{xx}-h\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

其中 h 和 α 都是大于零的常数。

1.4　试推导一维和三维的热传导方程。

1.5　设扩散物质的源强度为 $F(x,\ y,\ z,\ t)$(单位时间、单位体积内所产生的扩散物质)，试建立扩散方程。

1.6　长为 l 的柔软均质绳索，一端固定在以匀速 ω 转动的竖直轴上，由于惯性离心力的作用，这弦的平衡位置应是水平线，试推导此绳相对于水平线的横振动方程。

1.7　长为 l 的柔软均质重绳，上端固定在以匀速 ω 转动的竖直轴上，由于重力作用，绳的平衡位置应是竖直线，试推导此线相对于竖直线的横振动方程。

1.8　真空中电磁场的麦克斯韦方程组得微分形式为

$$\begin{cases}\nabla\cdot E=0\\ \nabla\times E=-\dfrac{1}{c}H_t\\ \nabla\cdot H=0\\ \nabla\times H=\dfrac{1}{c}E_t\end{cases}$$