Measurement Data Processing Research

测量数据处理研究

赵长胜 著

测绘出版社

测量数据处理研究

Measurement Data Processing Research

赵长胜　著

测绘出版社

内容简介

本书根据作者多年误差理论与测量平差、广义测量平差等课程的教学经验和相关科研成果，介绍了测量误差及其传播，最小二乘平差原理、经典平差方法及其在控制测量中的应用，自由网平差、抗差估计、有偏估计、回归分析、数据拟合，平差系统的常用假设检验，静态滤波推估与配置，卡尔曼滤波等动态数据处理理论和空间数据的不确定性分析等测量数据处理理论与方法。

本书可作为测绘工程专业本科和测绘科学与技术研究生的教学参考书，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

测量数据处理研究 / 赵长胜著. — 北京 ：测绘出版社，2013. 3
ISBN 978-7-5030-2791-8

Ⅰ. ①测… Ⅱ. ①赵… Ⅲ. ①测量—数据处理—高等学校—教材 Ⅳ. ①P207

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 033495 号

责任编辑	余易举	**封面设计**	李 伟	**责任校对**	董玉珍

出版发行	测绘出版社	**电　　话**	010—83060872（发行部）
地　　址	北京市西城区三里河路 50 号		010—68531609（门市部）
邮政编码	100045		010—68531160（编辑部）
电子信箱	smp@sinomaps.com	**网　　址**	www.chinasmp.com
印　　刷	三河市世纪兴源印刷有限公司	**经　　销**	新华书店
成品规格	169mm×239mm		
印　　张	20.25	**字　　数**	395 千字
版　　次	2013 年 3 月第 1 版	**印　　次**	2013 年 3 月第 1 次印刷
印　　数	0001—1500	**定　　价**	59.00 元

书　　号 ISBN 978-7-5030-2791-8/P・642

前　言

产生于19世纪初的经典测量平差，经过200多年发展，形成了比较完整的科学体系，其内容包括条件平差、间接平差、附有参数的条件平差和附有限制条件的间接平差，解决了大量的测量数据处理问题，至今仍然在应用。自20世纪60年代开始，随着计算机技术、空间技术、电子技术的进步和生产实践中高精度的需要，测量平差得到了很大发展，主要表现在以下几个方面：①从法方程系数矩阵满秩扩展到法方程系数矩阵亏秩，发展了秩亏自由网平差理论；②从待估参数为非随机变量扩展到待估参数为随机变量，发展了静态滤波、推估和配置；③从无偏估计扩展到有偏估计，发展了有偏估计理论；④从观测值仅含偶然误差扩展到含有系统误差和粗差，发展了含系统参数的间接平差；⑤从主要研究函数模型扩展到深入研究随机模型，发展了赫尔模特方差分量估计理论；⑥从最小二乘估计准则扩展到其他多种估计准则，发展了抗差估计；⑦从仅处理静态数据扩展到处理动态数据，发展了卡尔曼滤波；⑧从线性模型的参数估计扩展到非线性模型的参数估计，发展了非线性平差、扩展卡尔曼滤波、无迹卡尔曼滤波和粒子滤波。

全书分为9章：第1章介绍了误差来源与分类、精度指标、定权方法、协方差与协因数传播律等理论与方法；第2章介绍了条件平差、间接平差、附有参数的条件平差、附有限制条件的间接平差、附加系统参数的平差和序贯平差等平差原理和统计性质；第3章介绍了水准控制网平差、水平控制网平差、GPS控制网平差和误差椭圆等理论与方法；第4章介绍了自由网平差、平差模型的抗差估计和有偏估计；第5章介绍了偶然误差特性的假设检验、平差参数的显著性检验、平差模型正确性的统计检验、粗差检验方法和验后方差估计；第6章介绍了滤波与推估、最小二乘配置、逐次滤波与逐步配置；第7章介绍了卡尔曼滤波，包括卡尔曼滤波的误差处理、离散系统的卡尔曼滤波、抗差卡尔曼滤波、卡尔曼滤波的发散问题及其解决办法、自适应卡尔曼滤波、有色噪声作用下线性系统卡尔曼滤波、扩展卡尔曼滤波、无迹卡尔曼滤波和粒子滤波；第8章介绍了回归分析、拟合和插值；第9章介绍了空间数据的不确定性。

本书基于作者多年教学、科研成果，将现有各种测量数据处理理论和方法汇集

起来，简化理论推导，注重实际应用，理论联系实际，其算法便于计算机编程。本书撰写过程中，查阅了大量现有测量数据处理书籍，引用了部分理论和算例，在此对相关参考书作者表示衷心感谢。本书得到国家自然基金项目（项目号：41174032）和江苏省高校优势学科建设工程项目统计学学科的资助，另外，张连蓬教授、冯遵德教授、赵卿博士审阅了书稿，在此一并表示衷心感谢。

由于编者水平有限，书中缺点、错误在所难免，敬请读者批评指正。

赵长胜

2012 年 9 月

目　录

Contents

第1章　测量误差及其传播律

§1.1　测量误差与平差

测量数据或观测数据是指用一定的仪器、工具、传感器或其他手段获取的反映地球或其他实体空间分布的有关信息的数据。观测数据可以是直接测量的结果，也可以是经过某种变换后的结果。任何观测数据总是包含有用信息和干扰两个部分，干扰部分也称为误差或噪声。为了获得有用信息，就要设法排除或削弱误差影响。

在各种测量工作中，当对同一个观测量进行重复观测时就会发现，其观测值之间会存在一定的差异。例如：在地面上两点间进行水准测量，往返测得到的两点间高差并不相同；观测一个三角形的三个内角，就会发现三个内角和不等于180°。这种同观测量的不同观测值之间，或在各观测值某个函数与其理论值之间存在差异的现象，在测绘工作中是普遍存在的。产生上述情况的原因，是观测量中带有观测误差。

1.1.1　误差来源

观测误差产生的原因概括起来有以下四个方面（隋立芬，2001；陶本藻，2007）。

1. 外界条件

测量工作是在自然环境下进行的，我们把测量所处的自然环境称为外界条件。外界条件千变万化，对我们的观测产生各种各样的影响。例如：我们测量地球上两点间距离，大气温度、湿度和气压都会影响边长观测值；大气折光会影响角度观测值和高差观测值；GPS信号穿过电离层会受到电离子折射而产生时间延迟。这些影响都会使观测值产生误差。

2. 测量仪器

测量工作离不开测量仪器。测量仪器本身的精密度也会给观测数据带来误差。例如：J_2型经纬仪测微器最小刻划为1″，在估读1″以下的尾数时就存在误差。仪器结构不完善也会给观测数据带来误差。例如：水准仪的视准轴不平行于水准轴；全站仪的竖轴与横轴不垂直、视准轴与横轴不垂直。

3. 测量对象

观测对象也就是观测目标，也可能产生误差。例如：测量角度时，照准目标为

照准圆筒可能会产生相位差；水准测量时，水准标尺的沉降或倾斜产生的误差；卫星受到摄动力的影响偏离理想轨道产生的误差。

4. **观测者**

观测者感觉器官的鉴别能力、技术水平和责任心对观测数据的质量都会产生直接影响。例如：仪器的安置、照准、读数等方面产生误差。

外界条件、测量仪器、测量对象和观测者是引起测量误差的主要来源，因此我们把产生误差的综合因素称为观测条件。观测条件的好坏与观测成果的质量密切相关。观测条件好，成果质量就高；观测条件差，成果质量就不高。但是，不管观测条件如何，在测量中产生误差是不可避免的。测量工作者的责任是采取不同的措施，尽可能地消除或减少误差对观测结果的影响，提高观测成果的精度。

1.1.2 误差分类

由于观测条件不完善，因此观测值不可避免地会产生误差，搞清各种误差的性质，这样便于对不同性质误差采用不同的方法加以处理。根据观测误差对测量结果影响的性质不同，可以把测量中出现的误差分为三种类型：系统误差、偶然误差和粗差。

1. **系统误差**

系统误差是观测条件中某些特定因素的系统性影响而产生的误差。在相同测量条件下，系统误差的大小和符号常固定不变，或者为某一常数，或者呈周期性的变化，对观测结果的影响具有累积性，对观测成果的质量影响也特别显著。在实际工作中，根据系统误差的来源和规律可以采用如下不同方式加以消除或减弱，使其达到实际上可以忽略不计的程度。

1)设计正确的观测程序

设计正确的观测程序可以消除或减弱部分系统误差。例如：①根据大气折光对测量角度产生影响的规律性，规定在日出后半小时到上午十点、下午二点到日后前半小时两个时段测量水平角，而在上午十点到下午二点测量竖直角，这样可以减少大气折光所产生的测量角度的系统误差；②根据水准仪的视准轴与水准轴不平行产生的误差规律性，规定水准测量时水准仪离前后视两个水准尺的距离大致相等；③为消除或减弱多路径误差对 GPS 观测的影响，对 GPS 控制点设置做了必要的规定。

2)建立系统误差改正模型

观测量加系统误差改正是常见解决系统误差的方法。例如：电磁波测距的气象改正和周期误差改正；GPS 测量中载波相位观测值的电离层改正、对流层改正。

3)仪器的检验与校正

在测量之前对测量仪器要进行认真的检验与校正，测量仪器要定期检修，确保

仪器没有明显问题,减少由仪器产生的系统误差。

4)在数据处理中加入系统误差参数

误差是不可避免的,即使观测者十分认真且富有经验,测量仪器作了最好的校正,而且外界条件又最有利,某些误差仍然会产生。因此,有时可在测量数据处理时将系统误差作为参数参加平差计算。

2. 偶然误差

偶然误差是在测量过程中各种随机因素的偶然性影响而产生的误差。在相同测量条件下作一系列的观测,偶然误差从表面上看其数值和符号不存在任何确定的规律性,但就大量误差总体而言,具有统计性的规律。用经纬仪测量角度时,测角误差可能是照准误差、读数误差、外界条件变化和仪器本身不完善等多项误差的代数和,这些小误差是由偶然因素引起的,这些偶然因素在不断变化,体现在单个的微小测角误差上,其数值或大或小,符号或正或负,无法事先预知,呈随机性。根据概率统计理论可知,如果各个误差项对其总的影响都是均匀的小,不管这些微小误差服从什么分布,也不论它们是同分布或不同分布,只要它们具有有限的均值和方差,那么它们的总和将服从或近似服从正态分布,且误差的平均值随观测次数的增加而趋于零。由此可见,偶然误差就总体而言,具有一定的统计规律,偶然误差也就是均值为零的随机误差,也称为不规则的误差。

系统误差与偶然误差在观测过程中是同时发生的,当观测值中有显著的系统误差时,偶然误差就居于次要地位,观测误差就呈现出系统的性质,这时需要在观测值中加入系统误差改正以消除系统误差。反之,如果在观测列中已经排除了系统误差,或者与偶然误差相比已处于次要地位,则该观测列误差呈现出偶然误差的性质。

3. 粗差

错误或者粗差属可避免的误差,例如瞄错目标、读错数等。粗差可能是由作业人员的粗心大意或仪器故障所造成的差错,也可能是外界环境发生突变所造成的粗大误差。从统计学的观点看,粗差是观测结果,但不属于所研究的分布中相同的样本,所以不能和其他观测结果一起使用,如在正态分布中粗差不可能发生。因此,优化测量程序时要能够查出粗差,并加以排除。可以根据几何条件闭合差检验粗差,但在使用现今的高新测量技术,如全球定位系统(GPS)、地理信息系统(GIS)、遥感(RS)等自动化数据采集中,也会有粗差混入信息中,这时需要通过设计合理的数据处理方法进行识别与消除。

1.1.3　测量平差的任务和内容

由于观测不可避免地存在着误差,误差又可分为系统误差、偶然误差和粗差三种类型。系统误差一般可以在观测中或系统误差改正等多种方法中加以消除。经

典测量平差主要研究处理带有偶然误差的观测值，消除不符值，找出待求量的最佳估值。由于这些带有偶然误差的观测值是一些随机变量，因此，可以根据概率统计的方法来求出观测量的最可靠结果，这就是测量平差的其中一个主要任务，另一个主要任务是评定测量成果的精度。

为了测定两点间距离，仅丈量一次就可以得出其长度，但是无法知道误差有多大。可以对该距离进行 n 次观测，得到 n 个观测边长，取其平均长度为两点最后距离。可以证明多次观测的平均值精度高于一次观测精度，也就是偶然误差得到削弱。这样增加了 $n-1$ 次观测，提高了测量结果的精度，又可以发现粗差。我们称这多测的 $n-1$ 次为多余观测，用 r 表示，即 $r=n-1$ 次。多余观测数就是多于未知量的观测数。未知量的个数称为必要观测。在测量工程中，多余观测可以提高成果质量和可靠性。由于观测值带有误差，进行了多余观测，就可能发现问题。如确定一个平面三角形的现状和大小，只要在 3 条边、3 个内角 6 个元素中观测至少含有 1 条边的 3 个元素即可，但如果观测了 6 个元素，就会发现 3 个内角观测值之和可能不等于 180°，按正弦定理或余弦定理确定的边角关系可能也不正确，这就是由误差造成的。误差造成了几何图形不闭合，产生了不符值或闭合差。测量平差的目的就是要合理地消除这些不符值，求出未知量的最佳估值，并评定结果的精度。

测量平差就是测量数据依据某种最优化的准则，由一系列带有观测误差的测量数据，求取未知量的最佳估值，并评定结果精度的理论与方法。

本书主要讨论下述观测值平差处理问题（王新州 等，2006）。

(1)误差理论。包括偶然误差特性和偶然误差的传播，精度指标及其估计，权与中误差的定义及其估计方法，偶然误差与系统误差的联合传播，粗差检验与修复等内容。

(2)最小二乘原理及方法，测量平差原理，按最小二乘原理导出的间接平差（或参数平差）的计算公式和精度评定公式，最小二乘平差结果的最优性质。

(3)控制网平差与平差理论在其他领域中的应用。包括水准网平差、导线网平差、GPS 网平差、回归分析、多项式拟合等内容。

(4)测量平差中必要的统计假设检验方法。包括误差分布的假设检验、平差模型正确性的统计检验、平差参数的统计检验的区间估计等内容。

(5)抗差估计和近代测量数据处理方法。包括抗差估计理论与方法，自由网平差基本方法，滤波、推估与配置的理论与方法，卡尔曼滤波基本方法等内容。

§1.2　正态分布

前面讲过偶然误差服从正态分布，因此正态分布是处理观测数据的基础，下面简要介绍有关正态分布的基本内容。

1.2.1　数学期望

1. 定义

设有随机变量 X，其概率密度为 $f(x)$，则数学期望的定义为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x \tag{1-2-1}$$

2. 性质

(1)设 C 是常数，则有

$$E(C)=C \tag{1-2-2}$$

证：把常数 C 看作一个随机变量，它只能取得唯一的值 C，取得这个值的概率显然等于 1，所以，$E(C)=C\times 1=C$。

(2)设 X 是随机变量，a、b 是常数，则有

$$E(aX+b)=aE(X)+b \tag{1-2-3}$$

证：若 X 是连续型随机变量，且其密度函数为 $f(x)$，则

$$\begin{aligned}E(aX+b)&=\int_{-\infty}^{+\infty} a(x+b)f(x)\mathrm{d}x=a\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x+b\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\\&=aE(X)+b\end{aligned}$$

当 X 是离散型随机变量的情形时，将上述证明中的积分号改为求和号即得。

(3)设 X、Y 都是随机变量，则有

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y) \tag{1-2-4}$$

证：若 X、Y 是连续型随机变量，且其密度函数为 $f(x,y)$，则

$$\begin{aligned}E(X+Y)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_x(x)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty} yf_y(y)\mathrm{d}y\\&=E(X)+E(Y)\end{aligned}$$

式中，$f_x(x)$、$f_y(y)$ 为边缘密度函数。

这一性质可以推广到有限个随机变量之和的情况，即

$$E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n) \tag{1-2-5}$$

(4)设 X、Y 是相互独立的随机变量，则

$$E(XY)=E(X)E(Y) \tag{1-2-6}$$

证：仅就 X、Y 都是连续型随机变量的情形来证明。设 X、Y 的概率密度分别为 $f_x(x)$ 和 $f_y(y)$，X、Y 的联合概率密度为 $f(x,y)$，又因 X、Y 相互独立，所以有

$$f(x,y)=f_x(x)f_y(y)$$

由此得

$$\begin{aligned}E(XY)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf_x(x)f_y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_x(x)\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty} yf_y(y)\mathrm{d}y=E(X)E(Y)\end{aligned}$$

此性质可以推广到有限个相互独立的随机变量之积的情况，即

$$E(X_1 X_2 \cdots X_n) = E(X_1)E(X_2)\cdots E(X_n) \tag{1-2-7}$$

以上数学期望的性质在以后的公式推导中常要用到。

1.2.2 方差与协方差

数学期望描述概率分布的集中度，方差则是描述概率分布的离散度。如果观测数据集中在数学期望的周围，则离散度小，方差小，精度就高；反之，则离散度大，方差大，精度就低。

1. 方差的定义

设有随机变量 X，其概率密度为 $f(x)$，数学期望为 $E(X)$，则方差的定义为

$$\sigma^2 = E\{[X - E(X)]^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x)\mathrm{d}x \tag{1-2-8}$$

2. 方差的性质

(1)设 C 是常数，则有

$$\sigma_C^2 = 0 \tag{1-2-9}$$

证：常数 C 的数学期望 $E(C) = C$，代入式(1-2-8)

$$\sigma_C^2 = E\{[C - E(C)]^2\} = E[(C - C)^2] = 0$$

(2)设 X 是随机变量，$Y = aX + b$，a、b 是常数，则有

$$\sigma_Y^2 = a^2 \sigma_X^2 \tag{1-2-10}$$

证：若 X 是连续型随机变量，则

$$\sigma_Y^2 = E\{[aX + b - E(aX + b)]^2\} = a^2 E\{[X - E(X)]^2\} = a^2 \sigma_X^2$$

(3)设 X、Y 是互相独立的随机变量，当 $Z = X + Y$，则有

$$\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 \tag{1-2-11}$$

证：若 X、Y 是连续型随机变量，则

$$\begin{aligned}\sigma_Z^2 &= E\{[(X + Y) - E(X + Y)]^2\} \\ &= E\{[X^2 - 2XE(X) + E^2(X)]\} + E\{[Y^2 - 2YE(Y) + E^2(Y)]\} + \\ &\qquad 2[E(XY) - E(X)E(Y)]\} \\ &= E\{[X - E(X)]^2\} + E\{[Y - E(Y)]^2\} \\ &= \sigma_X^2 + \sigma_Y^2\end{aligned}$$

这一性质可以推广到有限个相互独立随机变量之和的情况，当 $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$，即

$$\sigma_Z^2 = \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 + \cdots + \sigma_{X_n}^2 \tag{1-2-12}$$

3. 协方差

设有随机变量 X 和 Y，描述它们之间相关性的量度称为协方差，其定义为

$$\sigma_{XY} = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} = E\{[Y - E(Y)][X - E(X)]\} = \sigma_{YX} \tag{1-2-13}$$

上式说明协方差矩阵具有对称性。

如果 X 和 Y 互相独立，则

$$\sigma_{XY}=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=E\{[X-E(X)]\}E\{[Y-E(Y)]\}=0 \tag{1-2-14}$$

4. 相关系数

为使 σ_{XY} 成为无量纲的量，可将其标准化，使用

$$\rho=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} \tag{1-2-15}$$

来表示 X 和 Y 相关的程度，称 ρ 为相关系数，$-1\leqslant\rho\leqslant1$。当 $\rho=0$ 时，X 和 Y 不相关或互相独立。

1.2.3　一维正态分布

服从正态分布的一维随机变量 X 的概率密度（胡细宝 等，2004）为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad(-\infty<x<+\infty) \tag{1-2-16}$$

式中，μ、σ 是概率密度的两个参数。把随机变量 X 服从参数为 μ、σ 的正态分布，记为 $X\sim N(\mu,\sigma)$。

随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 σ_X^2 为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\mu \tag{1-2-17}$$

$$\begin{aligned}\sigma_X^2&=E\{[X-E(X)]^2\}=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2f(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\sigma^2\end{aligned} \tag{1-2-18}$$

正态分布的参数 μ 就是 X 的数学期望，而 σ^2 就是它的方差，数学期望 μ 和方差 σ^2 是正态分布的数字特征。只要知道某一服从正态分布的随机变量的数字特征就可以知道它的分布律。因此，我们主要研究数字特征。

正态分布随机变量 X 出现在指定区间 $(\mu-k\sigma,\mu+k\sigma)$（$k$ 为正数）内的概率为

$$P(\mu-k\sigma<X<\mu+k\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

可得

$$\left.\begin{aligned}P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)&\approx0.683\\P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)&\approx0.955\\P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)&\approx0.997\end{aligned}\right\} \tag{1-2-19}$$

式中，σ 称为均方差，测量平差中也称为中误差。可见服从正态分布的随机变量 X

以它的数学期望为对称轴，越靠近对称轴，密度越大，离开对称轴越远，密度越小。

1.2.4 n 维正态分布

设随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_n)^{\mathrm{T}}$，若 $\boldsymbol{X}$ 服从正态分布，则 $\boldsymbol{X}$ 为 n 维正态随机变量，其联合概率密度（崔希璋 等，1992）为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\left|\boldsymbol{\Sigma}_{XX}\right|^{\frac{1}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}_X)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{XX}^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}_X)]} \tag{1-2-20}$$

式中随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的数学期望 $\boldsymbol{\mu}_X$ 和协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_{XX}$ 为

$$\boldsymbol{\mu}_X=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E(X_1)\\ E(X_2)\\ \vdots\\ E(X_n)\end{pmatrix} \tag{1-2-21}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{XX}=\begin{pmatrix}\sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1X_2} & \cdots & \sigma_{X_1X_n}\\ \sigma_{X_2X_1} & \sigma_{X_2}^2 & \cdots & \sigma_{X_2X_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sigma_{X_nX_1} & \sigma_{X_nX_2} & \cdots & \sigma_{X_n}^2\end{pmatrix} \tag{1-2-22}$$

数学期望 $\boldsymbol{\mu}_X$ 和协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_{XX}$ 是 n 维正态随机变量的数字特征。$\boldsymbol{\mu}_X$ 中各元素 μ_i 为随机变量 X_i 的数学期望，$\boldsymbol{\Sigma}_{XX}$ 中各主对角线上的元素 $\sigma_{X_i}^2$ 为 X_i 的方差，非对角线上的元素 $\sigma_{X_iX_j}$ 为 X_i 关于 X_j 的协方差，是描述随机变量 X_i 关于 X_j 相关性的量。$\boldsymbol{\Sigma}_{XX}$ 为 n 阶对称方阵。当两两随机变量互相独立时，有

$$\sigma_{X_iX_j}=\sigma_{X_jX_i}=0$$

则 $\boldsymbol{\Sigma}_{XX}$ 为一对角矩阵，即

$$\boldsymbol{\Sigma}_{XX}=\begin{pmatrix}\sigma_{X_1}^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sigma_{X_2}^2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{X_n}^2\end{pmatrix}$$

1.2.5 正态随机向量的条件概率密度

设有 $n+m$ 维正态随机向量 $\boldsymbol{X}$，且设

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1\\ \boldsymbol{X}_2\end{pmatrix},\boldsymbol{\mu}_X=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}_1\\ \boldsymbol{\mu}_2\end{pmatrix},\boldsymbol{\Sigma}_X=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12}\\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22}\end{pmatrix}$$

式中，$\boldsymbol{X}_1$、$\boldsymbol{X}_2$ 分别是由 $\boldsymbol{X}$ 的前 n 个分量和后 m 个分量构成的正态随机向量，即 $\boldsymbol{X}_1\sim N_n(\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\Sigma}_{11})$，$\boldsymbol{X}_2\sim N_m(\boldsymbol{\mu}_2,\boldsymbol{\Sigma}_{22})$。$\boldsymbol{X}$ 的概率密度是