普通高等教育“十二五”规划教材·工科数学系列教材

概率论与数理统计

主　编　孙海珍　王亚红
副主编　王丽英　赵士欣

科学出版社

内容简介

本书是“普通高等教育‘十二五’规划教材·工科数学系列教材”中的一本，是编者在多个省部级科研成果的基础上，结合多年教学经验编写而成的. 本书共11章，内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析和正交试验. 每章最后有精心选配的习题用以巩固知识，书后附有参习题案.

本书面向工科院校，可作为土木工程、机械工程、电气自动化工程、计算机工程、交通工程、工程管理、经济管理等本科专业的教材或教学参考书，也可供报考工科硕士研究生的人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/孙海珍，王亚红主编. —北京：科学出版社，2012

普通高等教育“十二五”规划教材·工科数学系列教材

ISBN 978-7-03-035308-5

Ⅰ.①概… Ⅱ.①孙… ②王… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第190413号

责任编辑：相 凌 唐保军／责任校对：朱光兰

责任印制：阎 磊／封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012年8月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2012年8月第一次印刷 印张：15 1/4

字数：351 000

定价：26.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

编　委　会

主　任　顾祝全

副主任　牟卫华　陈庆辉　张保才　孙海珍

编　委　王永亮　范瑞琴　赵　晔　李向红　左大伟
陈聚峰　郭志芳　郭秀英　李京艳　张素娟
赵士欣　王亚红　王丽英

前　言

本系列教材是在原铁道部部级课题、河北省“九五”教育学科规划重点课题“面向21世纪高等工科教育数学系列课程教学内容与课程体系改革的研究与实践”和全国高等学校数学研究中心承担科技部“创新方法工作专项项目——科学思维、科学方法在高等数学课程中的应用与实践”的研究成果基础上，通过多年的教学实践，广泛征求意见，按照教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会2009年编制的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》编写而成的.本系列教材在多年的教学实践中受到了广大师生的欢迎和同行的肯定，在总体结构、编写思想和特点、难易程度把握等方面，经受了实践的检验.本系列教材包括《高等数学》(上下册)、《线性代数与几何》、《概率论与数理统计》等.在教学中，《高等数学》(上下册)与《线性代数与几何》配套使用.

本系列教材在编写中力求做到渗透现代数学思想，淡化计算技巧，加强应用能力培养；在内容编排上从实际问题出发，建立数学模型，抽象出数学概念，寻求数学处理方法，解决实际问题.通过学习本系列教材，希望提高学生对数学的学习兴趣，培养数学建模意识，使学生较好地掌握高等数学方法，提高数学应用能力.书中带有“*”号的内容为选学内容.

本书在编写中力求做到：

(1) 以简明适用为原则，突出了对基本概念、基本方法、基本理论的介绍和训练.

(2) 在内容选择与安排上，注意将理论体系的系统性、严谨性与丰富的背景、广泛的应用做了有机的结合，使读者能够对基本概念有更深入的理解，并能够重视理论联系实际.

(3) 在基本概念的引入或基本方法的应用中，注意从实际问题出发，到抽象为理论，再应用于实践中，以调动学生学习的积极性，提高学生分析问题和解决问题的能力.

(4) 为培养学生学习概率论与数理统计的兴趣，在部分章节简介了数学家和相关的研究背景及应用.

本书由孙海珍、王亚红任主编，负责总体方案的设计、具体内容安排及统稿工作，王丽英、赵士欣任副主编.参编者有赵士欣(第1章)，王亚红(第2、3章)，孙海珍(第4、5、10、11章)，王丽英(第6～9章).在编写过程中，得到了顾祝全、牟卫华老师的大力支持.陈庆辉老师提出了许多宝贵意见，在此表示感谢.

由于编者水平有限，书中仍可能有不当之处，敬请读者批评指正.

编　者

2012年4月

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第 1 章　随机事件与概率

概率论源于 17 世纪中叶. 当时，欧洲经济萧条，许多达官贵人沉迷于非常盛行的赌博之中. 在赌博过程中，人们就提出一些问题，如投资一定的金钱参与赌博，在何时结束最好. 针对这些问题和赌博中输赢的偶然性，数学家们进行了认真的思考和研究. 通常大家都认为概率的数学理论是由法国数学家帕斯卡(1623—1662)和费马(1601—1665)首创的. 他们成功地导出了包括掷骰子在内的一些赌博的实际概率. 在帕斯卡、费马、伯努利等的努力下，现在广泛应用于各个领域的概率论逐步建立起来了. 同时，随着航海、航空、保险业的发展，这些领域中提出的问题也促使概率论得到了进一步的发展和完善. 到 19 世纪，初等概率论已经走向成熟. 初期研究概率论的代表人物有欧美派的拉普拉斯(Laplace)、高斯(Gauss)、泊松(Poisson)等和苏联的车贝谢夫、马尔可夫、柯尔莫哥洛夫、格涅坚科等. 现在，概率论已经广泛应用到物理、数学、军事科学、天文学、经济和金融学、生物和医学、电子学等领域.

数理统计的发展是 19 世纪中叶开始的，在其奠基阶段，主要的代表人物有英国的统计学家 K. Pearson 和 R. A. Fisher. Pearson 主要研究利用一些数据来求频率曲线，从而描述所研究对象的特征分布；而 Fisher 则开创了实验设计、估计理论和方差分析等统计理论. 自从 1920 年以来，J. Neyman 和 E. Pearson 创立了假设检验理论后，数理统计开始蓬勃发展起来，逐步建立了统计判断理论、多元统计分析、方差分析、时间序列分析、随机模拟等数理统计分支. 随着各学科不断提出新问题和数理统计在各个领域的不断应用，使数理统计和其他学科相互渗透，产生了各种各样的应用统计分支，如水文统计、地质统计、生物统计、工程统计、质量统计和计量经济等. 从数理统计的特点和发展过程看，它是一门研究如何收集数据、整理数据和分析数据的应用数学学科，它在国民经济的各个领域中都有着重要的作用.

1.1　随机事件和样本空间

1.1.1　随机试验

人们通常把自然界或社会中出现的现象分为两类：一类是必然的(或称为确定性的)，如重物在高处总是垂直落到地面，水在 100℃时沸腾，气体在一定大气压下满足状态方程 $pV=nRT$ 等，早期的科学就是研究这一类现象的规律性，所应用的数学工具有数学分析、几何、代数、微分方程等. 另一类现象是事前不可预测的，即在相同条件下重复进行试验，每次的结果未必相同，这一类现象称为偶然现象或随机现象，如掷一枚硬币，其结果可能是正面，也可能是反面，其他如农作物在收获前的产量，射击时子弹的落点，新生婴儿在出生前是男是女都是不能事先确定的. 这些偶然现象的发生表面上看是偶然的，但是，在偶然的表面下蕴含着必然的内在规律性. 概率论就是研究这种偶然现象的内在规律性的

一门学科.

在概率论研究中,可以把人们的某种活动称为试验.这里试验的含义十分广泛,包括各种各样的科学试验,也包括进行一次测量或进行一次抽样观察.注意与物理、化学等科学实验的区别.

定义 1.1.1　将满足如下条件的试验称为**随机试验**(用 E 表示):

(1) 在相同的条件下可以重复进行;

(2) 每次试验的可能结果有多个,并且事先知道所有可能发生的结果;

(3) 每次试验的具体结果不能事先确定.

以后我们提到的试验都指的是随机试验,例如:

E_1:将一枚硬币抛掷三次,观察正面 H、反面 T 出现的情况;

E_2:记录寻呼台一分钟内接到的呼唤次数;

E_3:掷一颗骰子,记录其出现的点数;

E_4:在一批灯泡中任取一只,测试它的寿命.

1.1.2　样本空间

定义 1.1.2　随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间,记为 Ω. 样本空间的元素,即 E 的每个结果称为样本点,记为 ω 或 $\omega_1,\omega_2,\cdots$.

上述试验 $E_i(i=1,2,3,4)$ 的样本空间 Ω_i 为

$\Omega_1=\{\mathrm{HHH},\mathrm{HHT},\mathrm{HTH},\mathrm{THH},\mathrm{HTT},\mathrm{THT},\mathrm{TTH},\mathrm{TTT}\}$;

$\Omega_2=\{0,1,2,3,\cdots\}$;

$\Omega_3=\{1,2,3,4,5,6\}$;

$\Omega_4=\{t\mid t\geqslant 0\}$.

1.1.3　随机事件

定义 1.1.3　在一次试验中可能出现也可能不出现的结果或事件叫**随机事件**,简称**事件**,用字母 $A,B,C,\cdots$ 表示;把不可能再分或没有必要再分的事件称为**基本事件**即**样本点**. 样本空间一定会发生,故也称**必然事件**;每次试验不可能发生的事件称为**不可能事件**,用$\varnothing$表示.

下面举出一些随机事件的例子. 例如,在试验 E_1 中,事件“恰有一次正面朝上”表示为

$$A_1=\{\mathrm{HTT},\mathrm{THT},\mathrm{TTH}\};$$

在试验 E_3 中,事件“出现偶数点”表示为

$$A_2=\{2,4,6\};$$

在试验 E_4 中,事件“寿命小于 1000h”表示为

$$A_3=\{t\mid 0\leqslant t\leqslant 1000\};$$

随机事件还可以定义为,随机试验 E 的样本空间 Ω 的子集.

一次试验中有且只有一个基本事件出现;随机事件 A 出现或发生当且仅当 A 所含基本事件之一出现.

1.1.4 随机事件的关系与运算

进行一次试验,会有这样或那样的事件发生,它们各有不同的特点,彼此之间又有一定的联系.下面引入一些事件之间的关系和运算,来描述这些事件之间的联系.

1. 事件的关系

1) 包含关系

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 A 包含于事件 B,或称事件 B 包含事件 A,或称事件 A 是事件 B 的子事件,记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

显然,对任意事件 A,有 $\varnothing \subset A$, $A \subset \Omega$.

2) 互斥(互不相容)

如果两个事件 A,B 不可能同时发生,则称事件 A 和事件 B 互斥或互不相容.必然事件和不可能事件互斥.

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为同一样本空间 Ω 中的随机事件,若它们之间任意两个事件是互斥的,则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互斥的.

2. 事件的运算

1) 事件的并(或和)

若 C 表示"事件 A 与事件 B 至少有一个发生"这一事件,则称 C 为 A 与 B 的并或和,记为 $C = A \cup B$. 当事件 A 与 B 互斥时,将并事件记为 $C = A + B$ 且称 C 为 A 与 B 的直和.显然有 $A \cup A = A$, $A \cup \Omega = \Omega$.

2) 事件的交(或积)

若 D 表示"事件 A 与事件 B 同时发生"这一事件,则称 D 为 A 与 B 的交或积,记为 $D = A \cap B$,也可简记为 $D = AB$. 显然 $A \cap A = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap \Omega = A$,事件 A 与 B 互斥等价于 $AB = \varnothing$.

3) 事件的差

若 F 表示"事件 A 发生而事件 B 不发生"这一事件,则称 F 为 A 与 B 的差事件,记为 $F = A - B$. 显然有 $A - A = \varnothing$, $A - \varnothing = A$, $A - \Omega = \varnothing$.

4) 事件的逆(对立事件,余事件)

称"事件 A 不发生"为事件 A 的逆事件,记为 $\overline{A}$. 显然 $A \cup \overline{A} = \Omega$, $A\overline{A} = \varnothing$, $A - B = A\overline{B} = A - AB$.

如果以平面内的某个正方形表示样本空间,用两个小圆表示事件 A 和 B,则事件的运算可以通过平面图形来表示,这种更加直观的表示方法被称为文氏(Venn)图,见图 1.1.1.

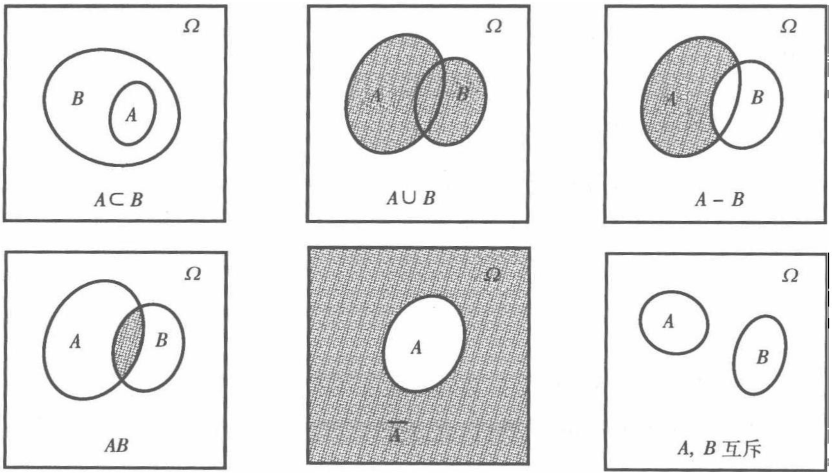

图 1.1.1

事件的并和交可以推广到有限多个或无穷多个事件的情形：

“有限个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生”这一事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并，记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$；

“有限个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生”这一事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交，记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$；

“无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 至少有一个发生”这一事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的并，记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$；

“无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生”这一事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的交，记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

3. 事件的运算规律

随机事件的运算满足以下规律.

交换律：$A\cup B=B\cup A$,

$A\cap B=B\cap A$.

结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

德摩根律(DeMorgan)：$\overline{\bigcup\limits_{i}A_i}=\bigcap\limits_{i}\overline{A}_i$，$\overline{\bigcap\limits_{i}A_i}=\bigcup\limits_{i}\overline{A}_i$.

由于样本空间是以所有基本事件为元素的集合，随机事件是样本空间的一个子集，因而随机事件之间的相互关系和运算规律是集合论中集合之间相互关系和运算规律的平行移置. 见表 1.1.1.

表 1.1.1 集合与随机事件对照表

符 号	集 合	随 机 事 件
Ω	空间或全集	样本空间，必然事件
$\varnothing$	空集	不可能事件
$\omega\in\Omega$	Ω 中的元素	基本事件或样本点
$A\subset B$	集合 A 包含在集合 B 中	事件 A 是事件 B 的子事件
$A\cup B$	集合 A 与集合 B 的并	事件 A 与事件 B 至少有一个发生
$A\cap B$	集合 A 与集合 B 的交	事件 A 与事件 B 同时发生
$\overline{A}$	集合 A 的余集	事件 A 的逆事件或余事件
$A-B$	集合 A 与 B 之差	事件 A 发生而 B 不发生
$A\cap B=\varnothing$	集合 A 与 B 无公共元素	事件 A 与 B 互不相容(互斥)
$A=B$	集合 A 与 B 相等	事件 A 与事件 B 相等

下面举一些例子来说明上面的概念和运算.

例 1.1.1 在掷骰子试验中，事件 A 表示“点数小于 2”，事件 B 表示“点数为奇数”，显然有 $A\subset B$，$A\cup B=\{1,3,5\}$，$A\cap B=\{1\}$，$B-A=\{3,5\}$，$\overline{A}=\{2,3,4,5,6\}$，$\overline{B}=\{2,4,6\}$.

例 1.1.2 简化下列各式：(1) $(A\cup B)(A\cup\overline{B})$； (2) $(A\cup B)-A$.

解 (1) $(A\cup B)(A\cup\overline{B})=A\cup A\overline{B}\cup BA\cup B\overline{B}=A\cup(A\overline{B}\cup AB)$

$$=A\cup A(\overline{B}\cup B)=A;$$

(2) $(A\cup B)-A=(A\cup B)\overline{A}=A\overline{A}\cup B\overline{A}=B\overline{A}=B-A$.

例 1.1.3 向指定目标射击 3 次，以 A_1,A_2,A_3 分别表示事件“第一、二、三次击中目标”，试用 A_1,A_2,A_3 表示下列事件.

(1) 只击中第一次；(2) 只击中一次；(3) 三次都未击中；(4) 至少击中一次.

解 (1) 事件“只击中第一次”意味着第一次击中，第二次和第三次都未击中同时发生，所以事件“只击中第一次”可表示为 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

(2) 事件“只击中一次”并不指定哪一次，三个事件“只击中第一次”、“只击中第二次”、“只击中第三次”中任意一个发生，都意味着事件“只击中一次”发生. 而且，上述三个事件是两两互斥的，所以事件“只击中一次”可表示为 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

(3) 事件“三次都未击中”意味着“第一次、第二次、第三次都未击中”同时发生，所以它可以表示为 $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

(4) 事件“至少击中一次”意味着三个事件“第一次击中”、“第二次击中”、“第三次击中”中至少有一个发生，故它可表示为 $A_1\cup A_2\cup A_3$，也可表示为 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1A_2A_3$.

1.2 概率的定义

一个随机事件在一次试验中可能发生，也可能不发生，虽然在试验前不能确定它到底

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

会不会发生，但是我们希望能够知道事件出现的可能性大小，并且希望用数来刻画这种可能性. 用来刻画事件发生可能性大小的数，称为事件发生的**概率**.

1.2.1 概率的定义

定义 1.2.1 对于随机试验 E，随机事件 A 在一次试验中可能出现也可能不出现. 在相同的条件下重复试验 n 次，观察事件 A 出现的次数为 r，则称 $f_n(A)=\frac{r}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**.

例如，多次掷一枚均匀的硬币，考察正面 A 出现的次数，这样的试验在历史上有很多人做过，结果见表 1.2.1

表 1.2.1

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
德摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
K·皮尔逊	12000	6019	0.5016
K·皮尔逊	24000	12012	0.5005

从以上数据可以看出，随着 n 增大，频率呈现出稳定性，在 0.5 附近徘徊，而逐渐稳定于 0.5.

事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 的性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2) $f_n(\Omega)=1, f_n(\varnothing)=0$；

(3) 若 $AB=\varnothing$，则 $f_n(A+B)=f_n(A)+f_n(B)$.

定义 1.2.2(概率的统计定义) 在相同条件下重复进行 n 次试验，当 n 很大时，事件 A 发生的频率在一个常数附近摆动，并且随着 n 的增大，这种摆动“大致上”越来越小，称这个常数为事件 A 的**概率**，记为 $P(A)$.

例 1.2.1 从某鱼池中取 100 条鱼，做上记号后再放入该鱼池中. 现从池中任意捉来 40 条鱼，发现其中两条有记号，问池内大约有多少条鱼？

解 设池中有 n 条鱼，则从池中捉到一条有记号鱼的概率为 $\frac{100}{n}$，它近似于捉到有记号鱼的频率 $\frac{2}{40}$，即 $\frac{100}{n}\approx\frac{2}{40}\Rightarrow n=2000$.

概率的统计定义虽然很直观，但有通过频率来求概率，需要做的试验次数多，费时、费力、费财，并且不严格，也不利于推广.

根据频率的性质及概率的统计定义，我们给出下面的公理化定义，使它既可包括前面的特殊情况，又具有更广泛的一般性.

定义 1.2.3(概率的公理化定义) 设 E 是一个随机试验，Ω 是基本事件空间，对于任意事件 $A\subset\Omega$，定义一个实的集函数 $P(A)$，它满足下面三条公理：

(1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2) $P(\Omega)=1$;

(3) 对于可列个两两互斥的随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$,有

$$P(\sum_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n),$$

则称 $P(A)$为**事件 A 发生的概率**.

1.2.2 概率的性质

由概率的公理化定义可得如下的性质:

性质 1 $P(\varnothing)=0$.

证 因为 $\Omega=\Omega\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$,且 $\Omega,\varnothing,\cdots$ 两两互斥,由定义 1.2.3 中公理(3)知 $P(\Omega)=P(\Omega)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots$,又由公理(2)知 $P(\Omega)=1$,故 $P(\varnothing)=0$.

性质 2(有限可加性) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互斥的事件,则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

证 令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$,由定义 1.2.3 中公理(3)和性质 1 知结论成立.

性质 3 对任意事件 A,有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

证 由 $\Omega=A+\overline{A}$ 知 $P(A)+P(\overline{A})=P(\Omega)=1$,得证.

性质 4 若 $A\subset B$,则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

证 因 $B=A\cup(B-A)$且 $A(B-A)=\varnothing$,故

$$P(B)=P(A+(B-A))=P(A)+P(B-A),$$

从而

$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$

性质 5 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

证 因 $A\cup B=A+(B-AB)$,故有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

性质 6 若 $A\subset B$,则 $P(B)\geqslant P(A)$.

证 由 $P(B-A)\geqslant 0$ 和性质 4 可证.

注 性质 5 可推广到 n 个事件的并的情形,如三个事件的并的概率为

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)=&P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)\\&-P(BC)-P(AC)+P(ABC).\end{aligned}$$

例 1.2.2 已知 $P(A)=0.4$,$P(B)=0.3$,$P(A\cup B)=0.6$,求 $P(A\overline{B})$和 $P(\overline{A}\cup B)$.

解 由性质 5 知 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.1$. 又由 $B=AB+\overline{A}B$,且 AB 与 $\overline{A}B$ 互不相容,于是有:$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=0.2$. 再由性质 5 有

$$P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}B)=0.7.$$

例 1.2.3 某厂有两台机床,机床甲发生故障的概率为 0.1,机床乙发生故障的概率为 0.2,两台机床同时发生故障的概率为 0.05,试求:

(1) 机床甲和机床乙至少有一台发生故障的概率;

(2) 机床甲和机床乙都不发生故障的概率;

(3) 机床甲和机床乙不都发生故障的概率.

解 令 A 表示"机床甲发生故障",B 表示"机床乙发生故障",则

$$P(A)=0.1, \quad P(B)=0.2, \quad P(AB)=0.05.$$

(1) $A\cup B$ 表示"机床甲与机床乙至少有一台发生故障",故

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.1+0.2-0.05=0.25.$$

(2) $\overline{A}\,\overline{B}$ 表示"机床甲与机床乙都未发生故障",故

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.25=0.75.$$

(3) $\overline{AB}$表示"机床甲与机床乙不都发生故障",故

$$P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.05=0.95.$$

1.3 古典概型和几何概型

1.3.1 古典概型

古典概型是概率论发展过程中最早被研究的概率模型. 它的计算公式虽然简单,但是许多类型的问题的概率计算却比较困难且富有技巧. 对于初学者来说,困难在于对随机试验的内容理解不准确以及对排列组合掌握得不牢.

定义 1.3.1 称满足下列条件的概率问题为**古典概型**,也称为**等可能概型**:

(1) 所有可能结果只有有限个,即样本空间只含有有限个基本事件;

(2) 每个基本事件发生的可能性是相同的,即等可能发生.

设 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$,$A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_k}\}\subset\Omega$,由古典概型的定义可知$P(\omega_i)=\dfrac{1}{n}$,$i=1,2,\cdots,n$. 从而 $P(A)=P(\omega_{i1})+\cdots+P(\omega_{ik})=\dfrac{k}{n}$. 于是可得古典概型的计算公式为

$$P(A)=\frac{A\text{ 所含的基本事件个数}}{\Omega\text{ 所含的基本事件个数}}.$$

此公式只适用于古典概型,因此在使用此公式前要正确判断你所建立的样本空间是否属于古典概型,即样本空间所含基本事件个数是否有限,每个基本事件是否等可能出现. 例如,掷骰子试验,由于骰子是质地均匀的正六面体,所以各点数为 1,2,3,4,5,6 这六个面是等可能出现的. 若骰子不是正六面体而是一个长方体,则这些面出现就不是等可能的. 对于同一个试验,可以建立不同的样本空间,它可能属于古典概型,也可能不属于古典概型. 例如,袋中装有大小相同的 4 个白球和 2 个黑球,分别标有号码 1,2,3,4,5,6,从中任取一球,若根据取到球的号码建立样本空间 $\Omega_1=\{1,2,3,4,5,6\}$,显然,它是属于古典概型的;若根据取到球的颜色建立样本空间 $\Omega_2=\{$黑,白$\}$,则它不是古典概型问题,这是因为基本事件不是等可能出现的.

例 1.3.1 设有 4 个人都以相同的概率进入 6 间房子的每一间,每间房子可容纳人数不限,求下列事件的概率.

(1) A:"某指定的 4 间房中各有一人";

(2) B:"恰有 4 间房子各有一人";

(3) C:"某指定的一间房中恰有 k 人"($k=1,2,3,4$).

解 由于每人都可以进入 6 个不同的房间,且每个房间可容纳人数不限,故 4 个人进入 6 个房间总共有 6^4 种方法,即样本空间所含基本事件个数为 6^4.

(1) 因指定的 4 间房只能各进 1 人,因而第一人可以有 4 种选择,第二人只能选择剩下的 3 个房间,第三人有 2 种选择,第四人只有 1 种选择,故 A 包含的基本事件数为 4. 所以

$$P(A)=\frac{4!}{6^4}.$$

(2) 与(1)不同的是 4 间房没有指定,可以从 6 间房任意选出 4 间,有 C_6^4 种方法,所以事件 B 包含有 $C_6^4 4!$ 个基本事件. 所以

$$P(B)=\frac{C_6^4 4!}{6^4}.$$

(3) 要使指定房间恰有 k 人,只需从 4 个人中先选 k 人进入此房间,共有 C_4^k 种方法,其余$(4-k)$人任意进入其他 5 间房有 5^{4-k} 种进入法,故事件 C 包含的基本事件数为 $C_4^k 5^{4-k}$,所以

$$P(C)=\frac{C_4^k 5^{4-k}}{6^4}.$$

注 可归入"分房问题"来处理的古典模型的实际问题非常多,例如,

(1) 生日问题:n 个人的生日的可能情形,这时 $N=365(n\leqslant 365)$.

(2) 乘客下车问题:一客车上有 n 名乘客,它在 N 个站上都停,乘客下车的各种可能情形.

(3) 印刷错误问题:n 个印刷错误在一本有 N 页的书中的一切可能的分布(n 不超过每一页的字符数).

(4) 放球问题:将 n 个球放入 N 个盒子中的可能情形.

值得注意的是,在处理这类问题时,要分清什么是"人",什么是"房",不能颠倒.

例 1.3.2 十个号码 $1,2,\cdots,10$ 装于一个袋中,从中任取 3 个,问大小在中间的号码恰为 5 的概率.

解 从十个号码中任取三个,共有 C_{10}^3 种取法,而三个数中,要想大小在中间的号码恰为 5,必须一个小于 5,一个等于 5,一个大于 5,这样的取样有 $C_4^1 C_1^1 C_5^1$ 种,所以所求的概率为

$$P=\frac{C_4^1 C_1^1 C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}.$$

上例更一般的提法是:一个袋中有 n 个球,其中 n_1 个标有号码"1",n_2 个标有号码"2",……,n_k 个标有号码"k",$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$. 今从中任取 m 个球,求恰有 m_j 个标号为"j"的概率,$j=1,2,\cdots,k$,且 $m_1+m_2+\cdots+m_k=m$. 同理可得所求概率为

$$P=\frac{C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2}\cdots C_{n_k}^{m_k}}{C_n^m}.$$

上式称为超几何概率,实际问题中的许多问题都可以利用这一模型.

例 1.3.3　100 台同型号的电视机中,有 40 台一等品,60 台二等品.从中任取 3 台,在下列两种抽取方法中求事件 $A=\{3$ 台都是二等品$\}$和事件 $B=\{2$ 台一等品,1 台二等品$\}$的概率.

(1) 每次只抽取一台,检查后放回,然后再取下一台(这种抽取方法称为有放回抽样);

(2) 每次抽取一台,检查后不放回,在剩下的电视机中再取下一台(这种抽取方法称为无放回抽样).

解　(1) 有放回抽样情形.由于是有放回抽样,每次抽取都有 100 种选择,故从 100 台中抽取 3 台有 100^3 种可能方法,即样本空间总共含有 100^3 个基本事件,而 A 表示取得的 3 台都是二等品,它只能从 60 台二等品中取,共有 60^3 种取法,故

$$P(A)=\frac{60^3}{100^3}=0.216.$$

B 表示 2 台一等品,1 台二等品,故有 2 台是从 40 台一等品中取,1 台从 60 台二等品中取,由于样本空间的建立考虑了顺序问题,所以 B 也应考虑 2 台一等品是在第一、二、三次抽取中的哪两次中取得,故 B 含有 $C_3^2\times40^2\times60$ 个基本事件,从而

$$P(B)=\frac{C_3^2\times40^2\times60}{100^3}=0.288.$$

(2) 无放回抽样情形.由于是不放回抽取,当从 100 台中取走一台之后,第二次只能从剩下的 99 台中取,第三次只能从 98 台中取,所以基本事件总数 $n=100\times99\times98=P_{100}^3$,同理 A 所含基本事件数为 $k=60\times59\times58=P_{60}^3$,所以

$$P(A)=\frac{P_{60}^3}{P_{100}^3}\approx0.212.$$

同样事件 B 包含的基本事件数为 $k=C_3^2P_{60}^1P_{40}^2$,所以

$$P(B)=\frac{C_3^2P_{60}^1P_{40}^2}{P_{100}^3}\approx0.288.$$

一般地,有放回抽样与无放回抽样所得的概率不同,特别是在抽取的对象数目不大时更是如此.但是,当抽取对象的数目较大时,有放回和无放回抽取所得的结果相差甚微,在实际应用中,人们经常利用这一点,把不放回抽样当作有放回抽样来处理,为解决实际问题带来许多方便.

1.3.2　几何概型

古典概型是在试验结果的出现是等可能的情形下研究事件发生的概率.但是它要求试验的结果必须是有限个,对于试验结果是无穷多个的情形,古典概型就无能为力了.为了克服这个局限性,我们仍然以基本事件等可能为基础,把研究的范围推广到试验结果有无穷多个的情形,这就是所谓的几何概型问题.

设某一随机试验的样本空间是欧氏空间的某一区域 Ω(Ω 可以是一维空间的一段线段,二维空间的一块平面区域,三维空间的某一立体区域甚至是 n 维空间的一区域),基本事件就是区域 Ω 内的一个点,且在区域 Ω 内等可能出现.设 A 是 Ω 中的任一区域,基本

事件落在区域 A 的概率为

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

其中 $\mu(\cdot)$表示度量(一维空间中是长度,二维空间中是面积,三维空间中是体积,等等).

例 1.3.4 甲、乙两人约在下午 6 时到 7 时之间在某处会面,并约定先到者应等候另一个人 20min,过时即可离去.求两人能会面的概率.

解 以 x 和 y 分别表示甲、乙两人到达约会地点的时间(单位:min).

在平面上建立直角坐标系(图 1.3.1),由题意知 (x,y)的所有可能取值构成的集合 Ω 对应图中边长为 60 的正方形,其面积

$$S_\Omega=60^2.$$

而事件 A=“两人能够会面”相当于 $|x-y|\leqslant 20$,即图中阴影部分,其面积为

$$S_A=60^2-40^2.$$

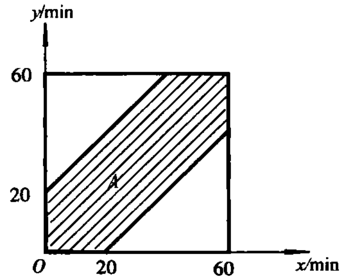

图 1.3.1

由几何概率的定义知

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{60^2-40^2}{60^2}=\frac{5}{9}.$$

例 1.3.5 在区间(0,1)中随机地取出两个数,求两数之和小于 1.2 的概率.

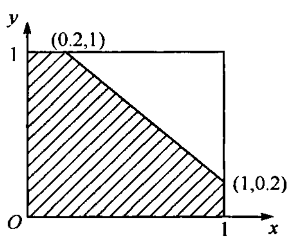

图 1.3.2

解 设 x,y 是从区间(0,1)中随机取出的两个数,则试验的样本空间为

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0<x<1,\mid 0<y<1\},$$

而所求的事件为

$$A=\{(x,y)\mid(x,y)\in\Omega,x+y<1.2\}.$$

从而由几何概率的计算公式及图 1.3.2 知

$$P(A)=\frac{A\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}}=\frac{1-\frac{1}{2}\times 0.8^2}{1}=0.68.$$

1.4 条件概率与全概率公式

1.4.1 条件概率

大千世界中事物是互相联系、互相影响的,随机事件也不例外,一个事件发生与否对其他事件发生的可能性大小也会有影响.比如,在计算概率时,也许获得了关于试验的新信息,这就需要根据新信息去修改样本空间,在新的样本空间中计算概率.

在已知事件 A 已经发生的条件下,事件 B 发生的概率,称为 A 发生的条件下 B 的条件概率,记为 $P(B|A)$,它与 $P(A)$是不同的两类概率.下面用一个例子来说明.

例 1.4.1 考察试验 E:掷一颗骰子,观察出现的点数,其样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,4,$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com