普通高等教育"十二五"规划教材

线性代数

经管类

何 斌 主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数

（经管类）

主　编　何　斌
副主编　龙　瑶　高建兴
参　编　何建锋　谌孙康

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是编者充分考虑了经管类专业对线性代数课程的需求，并结合自身多年教学经验编写而成的. 全书共6章，内容包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值、二次型和数学实验. 其中，第1～5章为教学基本内容，第6章可根据实际需要选用.

本书可供综合性大学及师范院校经济类、管理类各专业学生学习使用，也可作为理工类非数学专业学生的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数：经管类/何斌主编．—北京：科学出版社，2013
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-036288-9

Ⅰ.①线… Ⅱ.①何… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第314298号

责任编辑：胡云志 任俊红 唐保军／责任校对：陈玉凤
责任印制：阎 磊／封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
化学工业出版社印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2013年1月第 一 版 开本：720×1000 B5
2013年1月第一次印刷 印张：13 1/2
字数：261 000

定价：26.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

本书是普通高等教育"十二五"规划教材。全书紧扣财经类《线性代数教学大纲》编写而成，在保持传统优秀教材特点的基础上，对体系进行了适当的增删和优化。本书可作为经济类、管理类各专业的学习用书，也可作为理工类非数学专业学生的参考用书。

全书共 6 章，分别是行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值、二次型和数学实验，按 54 学时进行设计、编写。第 1～5 章涵盖了线性代数的基本内容，是主要的教学内容，第 6 章可根据实际情况，作为教学内容或自学内容。

本书的编写具有以下特点：

(1) 较充分地考虑了教材的可读性，在保证内容自身的科学性、逻辑性的基础上，尽量简洁明了；

(2) 适当增加了线性代数在社会、经济活动中实际应用的内容，使教材更加贴近现实生活；

(3) 对难度较大的部分基础理论，不作严密论证和推导；

(4) 注重基本运算方法的介绍与训练，不追求过分复杂的计算；

(5) 考虑到不同层次学生的实际需要，第 1～5 章每章都安排了 A、B 两组习题，力求使学生的课后训练达到循序渐进的效果。

本书第 1 章由龙瑶编写，第 2 章由高建兴编写，第 3 章由何建锋编写，第 4、5 章由何斌编写，第 6 章由谌孙康编写。全书由何斌负责统稿和定稿。

本书在编写过程中，参考和引用了一些教材、书籍的部分内容和习题，在此一并向相关作者和编著者表示由衷的感谢。

由于编者水平有限、经验不足，书中难免有不当之处，敬请读者批评指正。

编　者

2012 年 6 月 30 日

序　言

当今中国高等教育已从传统的精英教育发展到现代大众教育阶段.高等学校一方面要尽可能满足民众接受高等教育的需求,另一方面要努力培养适应社会和经济发展的合格人才,这就导致大学的人才培养规模与专业类型发生了革命性的变化,教学内容改革势在必行.高等数学课程是大学的重要基础课,是大学生科学修养和专业学习的必修课.编写出具有时代特征的高等数学教材是数学教育工作者的一项光荣使命.

科学出版社“十二五”教材出版规划的指导原则与云南省大部分高校的高等数学课程改革思路不谋而合,因此我们组织了云南省具有代表性的十所高校的数学系骨干教师组成项目专家组,共同策划编写了新的系列教材,并列入科学出版社普通高等教育“十二五”规划教材出版项目.本系列教材以大众化教育为前提,以各专业的发展对数学内容的需要为准则,分别按理工类、经管类和化生地类编写,第一批出版的有高等数学(理工类)、高等数学(经管类)、高等数学(化生地类)、概率论与数理统计(理工类)、线性代数(理工类),以及可供各类专业选用的数学实验教材.教材的特点是,在不失数学课程逻辑严谨的前提下,加强了针对性和实用性.

参加教材编写的教师都是在教学一线有长期教学经验积累的骨干教师.教材的第一稿已通过一届学生的试用,在征求使用本教材师生意见和建议的基础上作了进一步的修改,并通过项目专家组的审查,最后由科学出版社统一出版.在此对试用本教材的师生、项目专家组以及科学出版社表示衷心感谢.

高等教育改革无止境,教学内容改革无禁区,教材编写无终点.让我们共同努力,继续编出符合科学发展、顺应时代潮流的高质量教材,为高等数学教育做出应有的贡献.

郭　震

2012年8月1日于昆明

目　　录

第1章　行　列　式

本章主要介绍二阶、三阶行列式，n 级排列及相关性质，n 阶行列式的定义、性质和计算以及克拉默法则等内容，这些内容在数学、经济、管理等许多领域都有广泛的应用.

1.1　二阶、三阶行列式

1.1.1　二阶行列式

定义 1.1　记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，**称为二阶行列式**，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

其中，数 $a_{ij}(i,j=1,2)$为二阶行列式中位于第 i 行和第 j 列交叉处的元素. 二阶行列式表示的代数和可用对角线法则(图 1.1)来帮助记忆，把 a_{11} 到 a_{12} 的实连线称为主对角线，把 a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为副对角线，于是二阶行列式等于主对角线上两个元素的乘积减去副对角线上两个元素的乘积.

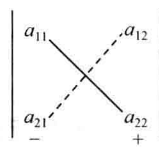

图 1.1

1.1.2　二元线性方程组

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases}$$

将第一个方程的两端乘以 a_{22}，第二个方程的两端乘以 a_{12}，然后两式相减得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}.$$

同理可得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq0$ 时，求得方程组的唯一解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

利用二阶行列式的定义，记

$$D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当 $D\neq 0$ 时,方程组的唯一解可用二阶行列式表示如下:

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

注 1.1 这里的分母 D 是由方程组的未知量系数所确定的二阶行列式(称为**系数行列式**),x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1,b_2 分别替换 D 中 x_1 的系数 a_{11},a_{21} 所得的二阶行列式,x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1,b_2 分别替换 D 中 x_2 的系数 a_{12},a_{22} 所得的二阶行列式.

例 1.1 解方程组$\begin{cases} 2x_1-4x_2=3, \\ x_1+3x_2=4. \end{cases}$

解
$$D=\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=2\times 3-(-4)\times 1=10,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=3\times 3-(-4)\times 4=25,\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=2\times 4-3\times 1=5,$$

因为 $D\neq 0$,故方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{25}{10}=\frac{5}{2},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}.$$

1.1.3 三阶行列式

定义 1.2 记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$表示如下代数和:

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

称为三阶行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

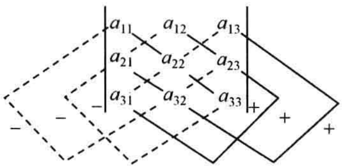

图 1.2

定义 1.2 表明,三阶行列式所表示的代数和共有 6 项,每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再加上正负号,其运算规律也可用“对角线法则”来表述(图 1.2).

例 1.2　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解　由对角线法则,有

$$D=1\times5\times2+(-2)\times(-4)\times0+(-3)\times1\times3-3\times5\times0-(-2)\times(-3)\times2-1\times(-4)\times1$$
$$=-7.$$

例 1.3　求解方程 $D=\begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix}=0.$

解　$$D=x^2+0-4x-0+3-0=x^2-4x+3,$$

由 $D=0$ 可得

$$x^2-4x+3=0,$$

由此解得 $x=3$ 或 $x=1$.

1.2　n 级排列

为了定义 n 阶行列式,先介绍一些预备知识.

定义 1.3　由 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的不重复的每个有确定次序的数组,称为一个 ***n* 级排列**(简称**排列**).

例如,2341 与 3412 都是 4 级排列,而 45321 是一个 5 级排列. n 级排列的个数通常用 P_n 表示. 下面讨论 P_n 的计算公式.

从 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 中任取一个放在第 1 个位置上,有 n 种取法;从剩下的 $n-1$个元素中任取一个放在第 2 个位置上,有 $n-1$ 种取法……这样继续下去,直到最后剩一个元素放在第 n 个位置上,只有 1 种取法. 于是由乘法原理有

$$P_n=n(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1=n!$$

定义 1.4　在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$ 中,若 $i_t>i_s$,则称 i_t 与 i_s 构成一个**逆序**. 一个 n 级排列中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**,记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

定义 1.5　逆序数为偶数的排列称为**偶排列**,逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

例 1.4　计算下列排列的逆序数,并讨论其奇偶性:

(1) 2176354;

(2) $n(n-1)(n-2)\cdots321$;

(3) $(2k)1(2k-1)2(2k-2)3(2k-3)\cdots(k+1)k$.

解　(1)在排列 2176354 中,2 排在首位,故不产生逆序;1 的前面有一个比 1

大的数 2,故产生 1 个逆序;7 的前面没有比 7 大的数,故不产生逆序;6 的前面有一个比 6 大的数 7,故产生 1 个逆序;3 的前面有两个比 3 大的数 7,6,故产生 2 个逆序;5 的前面有两个比 5 大的数 7,6,故产生 2 个逆序;4 的前面有三个比 4 大的数 7,6,5,故产生 3 个逆序. 于是该排列的逆序数

$$\tau(2176345)=0+1+0+1+2+2+3=9,$$

此排列为奇排列.

(2) 与(1)的讨论类似,可得该排列的逆序数

$$\tau(n(n-1)(n-2)\cdots321)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2},$$

当 $n=4k,4k+1$ 时,该排列为偶排列;当 $n=4k+2,4k+3$ 时,该排列为奇排列.

(3) 与(1)的讨论类似,可得

$$\begin{aligned}&\tau((2k)1(2k-1)2(2k-2)3(2k-3)\cdots(k+1)k)\\ =&0+1+1+2+2+\cdots+(k-1)+(k-1)+k\\ =&\frac{2(1+k-1)(k-1)}{2}+k=k^2.\end{aligned}$$

当 k 为偶数时,该排列为偶排列;当 k 为奇数时,该排列为奇排列.

定义 1.6 把一个排列中某两个数的位置互换,其余数的位置不变,就得到另一个排列,将这一过程称为将该排列进行了一次**对换**.

例如,经过 1,2 对换,排列 1324 变成 2314. 显然,如果对一个排列进行两次相同的对换,则该排列就还原了.

定理 1.1 任意一个排列经过一个对换后,其奇偶性改变.

这就是说,偶排列经过一次对换变成奇排列,而奇排列经过一次对换变成偶排列. 显然,偶数次对换不改变排列的奇偶性,而奇数次对换一定改变排列的奇偶性.

利用上述结论可以证明下面的定理.

定理 1.2 在所有 $n(n\geqslant2)$ 级排列中,奇排列和偶排列各占一半.

证明 n 级排列的总数为 $n!$. 设其中奇排列有 m 个,偶排列有 p 个. 若对每个奇排列都进行一次对换,则由定理 1.1,m 个奇排列均变为偶排列,故 $m\leqslant p$. 同理,对每个偶排列都进行一次对换,则 p 个偶排列均变为奇排列,故 $p\leqslant m$. 因此,$m=p$,从而 $m=p=\dfrac{n!}{2}$.

例如,在三级排列中,奇排列与偶排列各为三个. 事实上,123,231,312 是偶排列,132,213,321 是奇排列.

1.3 n 阶行列式

为了得到 n 阶行列式的定义,先对三阶行列式进行研究. 观察三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

容易看出：

(1) 三阶行列式共有 3！项；

(2) 每项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积；

(3) 当每项三个元素的行标构成的三级排列按自然数顺序排列后，该项的正负号取决于其列标构成的排列的奇偶性，偶排列为正号，奇排列为负号，如 $a_{12}a_{23}a_{31}$ 的列标构成的排列的逆序数为 2，前面为正号；$a_{11}a_{23}a_{32}$ 的列标构成的排列的逆序数为 1，前面为负号，所以三阶行列式可写成

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对所有三级排列 $j_1j_2j_3$ 求和.

按此规律，可以把行列式推广到一般的情形.

定义 1.7 由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n **阶行列式**，其中横排称为**行**，竖排称为**列**，它表示所有取自不同行与不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和. 各项的符号如下确定：当该项各个元素的行标构成的排列按自然顺序排列后，若列标构成的排列是偶排列，则取正号；若是奇排列，则取负号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 为对所有的 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和. 称上式等号右端为行列式 D 的**展开式**.

定义 1.7 表明，n 阶行列式是所有形如 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的项的代数和，并称 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 为行列式的**一般项**.

注 1.2　(1) n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和；

(2) n 阶行列式的每项都是位于不同行不同列的 n 个元素的乘积；

(3) $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的符号为 $(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}$；

(4) 约定一阶行列式 $|a_{11}|$ 就是数 a_{11}；

(5) 当 $n>3$ 时,由定义知,n 阶行列式不能由对角线法则得到其展开式；

(6) 行列式还可记为 $D=|a_{ij}|$ 或 $D=\det(a_{ij})$.

例 1.5　计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解　设 D 的一般项为 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$,下面考察不为零的项. a_{1j_1} 取自行列式第 1 行,但只有 $a_{14}\neq 0$,故只可能 $j_1=4$;同理可得 $j_2=3,j_3=2,j_4=1$,即行列式的展开式中不为零的项只有 $(-1)^{\tau(4321)}1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$,所以 $D=24$.

例 1.6　计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ $(a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\neq 0)$.

解　设 D_n 的一般项为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,下面考察不为零的项. a_{nj_n} 取自第 n 行,但只有 $a_{nn}\neq 0$,故只可能 $j_n=n$;$a_{(n-1)j_{n-1}}$ 取自第 $n-1$ 行,由于 a_{nn} 取自第 n 列,故 $j_{n-1}\neq n$. 若要 $a_{(n-1)j_{n-1}}\neq 0$,只能 $j_{n-1}=n-1$;同理可得 $j_{n-2}=n-2,\cdots,j_2=2,j_1=1$,即行列式的展开式中不为零的项只有 $(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$,所以 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

注 1.3　例 1.6 中,D_n 的**主对角线**($a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 所在的直线)以下的元素全为零,称这一类型的行列式为**上三角形行列式**. 类似地,主对角线以上元素全为零的行列式称为**下三角形行列式**. 不难验证,一个上(下)三角形行列式等于其主对角线上所有元素的乘积.

例 1.7　计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

解　D_n 的展开式中不为零的项为 $a_{1(n-1)}a_{2(n-2)}\cdots a_{(n-1)1}a_{nn}=n!$,而该项列标构成的排列的逆序数为 $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$,故 $D_n=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$.

在定义 1.7 中，为了决定每一项的正负号，把 n 个元素的行标按自然顺序排列. 事实上，数的乘法满足交换律，因此，这 n 个元素的次序可以任意交换. 一般地，n 阶行列式中的项可以写成

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$，$j_1j_2\cdots j_n$ 为两个 n 级排列. 利用排列的性质，不难证明，$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$的符号为

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+(j_1j_2\cdots j_n)}.$$

事实上，根据定义 1.7，为了确定 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 的符号，就要把这 n 个元素重新排列，使得其行标构成自然顺序排列，即将该项排成

$$a_{1j'_1}a_{2j'_2}\cdots a_{nj'_n},$$

于是它的符号为

$$(-1)^{\tau(j'_1j'_2\cdots j'_n)}.$$

下面证明 $(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+(j_1j_2\cdots j_n)}$ 与 $(-1)^{\tau(j'_1j'_2\cdots j'_n)}$ 是一致的. 已经知道，由 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 到 $a_{1j'_1}a_{2j'_2}\cdots a_{nj'_n}$ 可以经过一系列元素的对换来实现，每进行一次对换，元素的行标与列标所构成的排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 就同时进行了一次对换，即$\tau(i_1i_2\cdots i_n)$与 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$同时改变奇偶性，因此，它们的和

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)$$

的奇偶性不变. 也就是说，互换 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 中的任意两个数并不改变$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+(j_1j_2\cdots j_n)}$的值. 于是在一系列的互换之后有

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(j'_1j'_2\cdots j'_n)}=(-1)^{\tau(j'_1j'_2\cdots j'_n)},$$

这就证明了$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+(j_1j_2\cdots j_n)}$与$(-1)^{\tau(j'_1j'_2\cdots j'_n)}$是相等的.

例如，$a_{23}a_{12}a_{41}a_{34}$是四阶行列式中的一项，$\tau(2143)=2$，$\tau(3214)=3$，于是它的符号应为$(-1)^{2+3}=-1$. 将其行标按自然顺序排列，就是 $a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$，$\tau(2341)=3$，因此，它的符号也是$(-1)^3=-1$.

由上面的讨论可知，为了确定每一项的符号，同样也可以将各项的列指标按自然顺序排列，于是 n 阶行列式又可**定义为**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

1.4 行列式的性质

根据行列式的定义，四阶行列式需要计算 4! =24 项，五阶行列式需要计算 5! =120 项. 当行列式的阶数很高时，根据定义计算行列式几乎不可能. 因此，为

了简化行列式的计算,必须首先学习行列式的性质.

定义 1.8 设行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,记 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,称行列式 D^{T} 为行列式 D 的**转置行列式**.

性质 1.1 行列式与它的转置行列式相等.

证明 记

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 D^{T} 的(i,j)元素为 b_{ij},则 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$. 由行列式的定义有

$$D^{\mathrm{T}}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}.$$

又因为行列式 D 可表示为 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}$,故 $D^{\mathrm{T}}=D$.

由性质 1.1 可知,行列式中的行与列具有同等的地位,行列式凡是对行成立的性质对列也同样成立,反之也成立.

性质 1.2 互换行列式的两行(列),行列式反号.

证明 设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 对换 i,j 两行得到的,即当 $k\neq i,j$ 时,$b_{kp}=a_{kp}$;当 $k=i,j$ 时,$b_{ip}=a_{jp}$,$b_{jp}=a_{ip}$. 于是

$$\begin{aligned} D_1&=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n}\\ &=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}, \end{aligned}$$

而

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n},$$

并且排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 与排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的奇偶性不同,则 D 与 D_1 的每一项都相差一个符号,因此,$D=-D_1$.

说明 为方便起见,以 r_i 表示行列式的第 i 行,以 c_i 表示第 i 列. 交换 i,j 两

行记为 $r_i \leftrightarrow r_j$，交换 i,j 两列记为 $c_i \leftrightarrow c_j$.

推论 1.1 如果行列式有两行(列)完全相同，则此行列式等于零.

证明 把该行列式的相同两行(列)互换，则有 $D=-D$，故 $D=0$.

性质 1.3 行列式某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

说明 第 i 行(或列)乘以数 k，记为 $r_i \times k$(或 $c_i \times k$).

推论 1.2 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面，(第 i 行(或列)提出公因子 k，记为 $r_i \div k$(或 $c_i \div k$)).

性质 1.4 若行列式中有两行(列)元素成比例，则此行列式等于零.

性质 1.5 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和，如第 i 列的元素都是两数之和，

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}+a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}+a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni}+a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式的和，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.6 把行列式某一行(列)的各个元素乘以同一数，然后加到另一行(列)对应的元素上去，行列式不变.

例如，以数 k 乘以第 j 列加到第 i 列上，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{c_i+kc_j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}+ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}+ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad i \neq j$$

说明 以数 k 乘以第 j 行(列)加到第 i 行(列)上，记为 $r_i + kr_j$($c_i + kc_j$).

在通常情况下，对于一个行列式，可以利用行列式的性质将其化为一个三角形

行列式来进行计算.

例 1.8　计算

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

解

$$D\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2}-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}\xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1}-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-8r_2]{r_3+4r_2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}\xlongequal{r_4+\frac{5}{4}r_3}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix}=40.$$

例 1.9　计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解　这个行列式的特点是每一行(列)元素的和均相等,根据行列式的性质,把第 2,3,…,n 列全都加到第 1 列,行列式不变,于是

$$D=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1}[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$