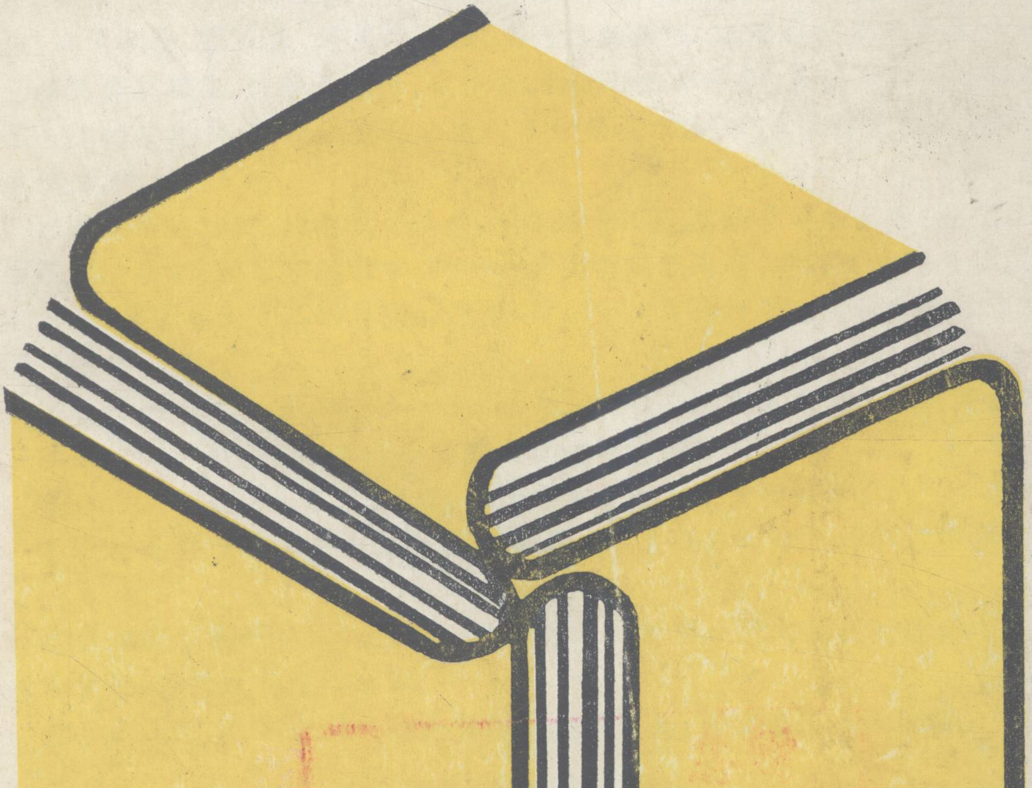
SHUXUE
FENXI

数学分析（1）

诸少民　罗桂诗　黄树荣



广州暨南大学

一九九二年七月

序　言

本教材是编者在暨南大学数学系多年来进行数学分析课教学的基础上集体编写成的，全书共四册，分二十一章。第一册包括一元函数极限、连续、导数与微分、中值定理；第二册包括极限与连续（续）、不定积分、定积分，定积分应用；第三册包括数项级数、非正常积分、幂级数、傅里叶级数、多元函数极限、连续以及多元函数微分学；第四册包括隐函数理论、含参量积分、重积分、曲线和曲面积分。在编写中、除严格按照部颁教学大纲的要求外，特别注意结合我校实际情况，力求使本教材更能适合我校教师和学生使用。

本教材阐述细致；概念叙述清楚，引入时特别注意结合学生实际；定理证明和公式推演条理清晰、重视启发性教学；对一些重要的细节问题，均以附注形式作出详细解释和补充；各章配备大量不同类型的例题，用以介绍各种解题方法和特殊技巧，有利于学生课外学习。

本教材第一、二、三、四、七、十六、十七、十八、十九各章由诸少民老师编写；

第五、六、十四、十五、二十一各章由罗桂诗老师编写；

第八、九、十、十一、十二、十三、二十各章由黄树荣老师编写。

本教材各章节均配有习题和习题答案。本系冯力和喻东两位老师参加了编写工作。

本教材能够顺利编成，全赖校、系领导以及数学分析与函数论教研室全体教师的支持和鼓励，在此表示衷心感谢。

由于水平所限，本教材的缺点和错误在所难免，恳请读者批评指正。

编　者　1992.7

目 录

第一章 函 数

§1 函数概念……………………………………………………………………………………………… (6)
一 实数概述　　二 变量与函数
三 函数的表示法　　四 函数关系举例
§2 一些特殊类型的函数………………………………………………………………………………… (16)
一 有界函数　　二 单调函数
三 奇函数与偶函数　　四 周期函数
§3 函数的运算…………………………………………………………………………………………… (21)
一 四则运算　　二 复合函数
三 反函数
§4 初等函数……………………………………………………………………………………………… (28)
一 基本初等函数　　二 初等函数

第二章 数列极限

§1 数列极限概念………………………………………………………………………………………… (37)
一 数列　　二 数列极限
三 例
§2 收敛数列的性质……………………………………………………………………………………… (48)
§3 收敛数列的四则运算………………………………………………………………………………… (52)
§4 数列极限存在的条件………………………………………………………………………………… (55)

第三章 函数极限

§1 函数极限概念………………………………………………………………………………………… (64)
一 $x \to +\infty$时函数 $f(x)$的极限
二 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$的极限
§2 函数极限的定理……………………………………………………………………………………… (75)
§3 两个重要极限………………………………………………………………………………………… (82)
一 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$　　二 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$
§4 无穷小量与无穷大量、阶的比较 ………………………………………………………………… (86)
一 无穷小量的定义　　二 无穷小量的运算性质
三 用无穷小量表示有极限的变量　　四 无穷小量阶的比较
五 无穷大量的定义　　六 无穷大量的性质

七 无穷大量阶的比较　　八 无穷大与无穷小的关系

第四章 函数的连续性

§1 连续性概念……（99）
一 函数在一点的连续性　　二 左连续与右连续
§2 间断点及分类……（103）
§3 连续函数的性质……（106）
一 连续函数的局部性质
二 闭区间上连续函数的基本性质
§4 连续函数的运算……（111）
一 连续函数的四则运算
二 复合函数的连续性
三 反函数的连续性
§5 初等函数的连续性……（116）
一 基本初等函数的连续性
二 初等函数的连续性

第五章 导数与微分

§1 导数概念……（125）
一 实例　　二 导数的定义
三 单侧导数　　四 导函数
§2 求导法则及导数公式……（134）
一 导数的四则运算　　二 反函数的导数
三 复合函数的导数　　四 基本求导法则与公式
§3 参量方程所表示的函数的导数……（145）
§4 微　分……（148）
一 微分概念　　二 微分的运算法则
三 微分在近似计算上的应用
§5 高阶导数与高阶微分……（154）
一 高阶导数　　二 莱布尼兹公式
三 高阶微分　　四 参量方程表示的函数的高阶导数

第六章 中值定理与导数应用

§1 微分学基本定理……（165）
一 费马定理　　二 中值定理
三 泰勒定理

§2 导数在研究函数上的应用……………………………………………………………(179)

一 函数为常数的条件　　二 函数为单调的条件

三 不等式定理　　四 极值的判别法

五 最大值与最小值的求法　　六 函数的凹凸性与曲线的拐点

七 曲线的渐近线　　八 函数图象的讨论

§3 不定式的定值法……………………………………………………………………(199)

一 $\frac{0}{0}$型不定式　　二 $\frac{\infty}{\infty}$型不定式

三 其它类型的不定式

逻辑符号

为了书写方便，本讲义常采用以下逻辑符号。

符号　　　　$\forall$

表示"任意"，"任给"，"全体"，"所有"。写法是将英文字母 A 倒过来。
例　"$\forall\ x \in R$"表示"任给实数 x"或"所有实数 x"。

符号　　　　$\exists$

表示"找到"，"存在"，写法是将英文字母 E 反过来。
例　"$\exists\ x_0 \in R$"表示"R 中存在某个实数 x_0"。

符号　　　　$S_1 \Rightarrow S_2$

表示由命题(或条件)S_1 可以推出命题(或条件)S_2。

符号　　　　$S_1 \Leftrightarrow S_2$

表示 S_1 与 S_2 等价，即表示由 S_1 可以推出 S_2，反过来由 S_2 也可以推出 S_1。

第一章 函　　数

§1　函数概念

函数是数学分析(甚至是整个高等数学)中最基本的研究对象。而数学分析是在实数范围内研究函数的,因此,我们先复习一下实数。

一　实数概述

1.　实数及其性质

实数由有理数和无理数两大类组成。

可表示为分数$\frac{p}{q}$(p、q 为整数,$q\neq 0$)的数称为有理数。

由于任何分数都可以化为无限十进循环小数(有限十进小数也可写成以 0 或以 9 为循环节的无限十进循环小数,例如$\frac{6}{5}=1.2=1.2\dot{0}=1.1\dot{9}$);反之,任何无限十进循环小数都可以表示为分数

例如,记 $0.\dot{2}\dot{3}=a$,

$$\text{则}\qquad 10^2a=23.\dot{2}\dot{3}=23+a$$

$$\text{于是}\qquad a=\frac{23}{10^2-1}=\frac{23}{99}$$

故此,有理数的另一个说法是:可表示为无限十进循环小数的数称为有理数。

除了这种数之外,每一个无限十进不循环小数称为无理数。当我们按照一定法则能写出一个无限十进不循环小数的任意位数时,这个无理数就是已知的。例如用开方的方法可以写出无理数$\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2}=1.4142\cdots\cdots$$

既然实数是有理数和无理数的总称,因此说,实数就是一个无限十进小数。

在实数集上可以定义其大小以及运算等。实数有如下性质:

性质 1　实数是有序的,即任意两个实数 a、b,必满足下述三个关系之一:

$$a<b,\quad a=b,\quad a>b;$$

并且,如果 $a<b$,$b<c$,则 $a<c$。

性质 2　实数对加、减、乘、除(除数不为 0)四则运算是封闭的,即对任意两个实数施行加、减、乘、除运算,其结果仍是实数。

性质 3　实数的加法、乘法与实数的序有如下的关系:如果 a、b、c 是实数,且 $a<b$,则 $a+c<b+c$;

如果 $a<b$,则当 $c>0$ 时,$ac<bc$;当 $c<0$ 时,$ac>bc$。

性质 4 任意两个正实数 a 与 b,总存在自然数 n,使得 $nb>a$,这个性质称为阿基米德性。

性质 5 实数集是稠密的,即任意两个不同实数之间,存在有理数和无理数。

性质 6 实数集与数轴上的点有着一一对应关系,即任一实数在数轴上有唯一一个点与它相对应,反之,数轴上任一点,有唯一一个实数与它相对应。这样,全体实数所对应的点就无空隙地填满了整个数轴,全体实数的这个性质称为实数集的连续性。

由于实数集和数轴上的点一一对应,今后我们将利用数轴上的点来表示实数,从而点和数不加区别。

2. 绝对值不等式

绝对值及其不等式是数学分析中研究问题常用的工具。

定义 任何实数 a 的绝对值 $|a|$ 定义为

$$|a|=\begin{cases} a, & a\geqslant 0 \\ -a, & a<0 \end{cases}$$

在数轴上,数 a 的绝对值 $|a|$ 就是点 a 到原点的距离。关于绝对值有如下一些性质:

性质 1 两个相反数的绝对值相等且非负数

$$|a|=|-a|\geqslant 0$$

当且仅当 $a=0$ 时才有 $|a|=0$

性质 2 对于任何实数 a,下面不等式总是成立:

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a|$$

性质 3 不等式 $|a|<h$ 与 $-h<a<h$ 等价;

不等式 $|a|\leqslant h$ 与 $-h\leqslant a\leqslant h$ 等价。

性质 4 和的绝对值不大于绝对值的和:

$$|a+b|\leqslant |a|+|b|$$

性质 5 差的绝对值不小于绝对值的差:

$$|a|-|b|\leqslant |a-b|$$

性质 6 积的绝对值等于绝对值的积;商的绝对值等于绝对值的商,即

$$|ab|=|a||b|; \qquad \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$$

下面证明性质 4:

由性质 2 有

$$-|a|\leqslant a\leqslant|a|,\qquad -|b|\leqslant b\leqslant|b|$$

相加后得 $\quad -(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|$

由性质 3 知，上式等价于 $\quad |a+b|\leqslant|a|+|b|$

注 将 b 改为 $-b$，还可得到不等式 $|a-b|\leqslant|a|+|b|$

下面证明性质 5：

由性质 4 有 $\quad |a|=|(a-b)+b|\leqslant|a-b|+|b|$

于是 $\quad |a|-|b|\leqslant|a-b|$

注 将 b 改为 $-b$，还可得到不等式 $|a|-|b|\leqslant|a+b|$

3. 邻域

满足绝对值不等式 $|x-a|<\delta$ 的全体实数叫做点 a 的 **δ 邻域**，记为 $U(a,\delta)$ 或简记为 $U(a)$。因为不等式 $|x-a|<\delta$ 与 $-\delta<x-a<\delta$

或 $\quad a-\delta<x<a+\delta$

等价，故此 $U(a,\delta)$ 就是以 a 为中心，半径为 δ 的开区间 $(a-\delta,a+\delta)$。

满足不等式 $0<|x-a|<\delta$ 的全体实数叫做点 a 的**空心 δ 邻域**记为 $U^{\circ}(a,\delta)$ 或简记为 $U^{\circ}(a)$。它与 $U(a)$ 的差别仅在于不包含点 a。

二 变量与函数

1. 变量

我们在观察各种自然现象或研究实际问题的时侯，会遇到许多的量，这些量一般可分为两种：一种是在我们观察的过程中保持不变的量，这种量称为常量。还有一种是在观察过程中会起变化的量，称为变量。例如物体自由下落时，时间和路程都是变量，而物体的质量则是常量。又如将一密封容器内的气体加热，气体的体积和分子数目都是常量，而气体的温度和压力都是变量。

通常用字母

$$x、y、z、u、v、t、\cdots\cdots$$

表示变量；而用字母

$$a、b、c、d、\cdots\cdots$$

表示常量。

2. 函数

在一个自然现象或一个实际问题中，往往有几个量同时变化，它们的变化不是彼此独立，而是互相联系着。下面举几个包含两个变量的例子：

例 1 在物体自由下落时，时间 t 和路程 S 由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

联系着，当 t 值取定之后，按照以上公式，S 的值也就随之确定。

例 2　用一块边长为 a 的正方形铁皮作一个高为 X 的无盖盒子(图 1—1)。当 X 改变时，盒子容积 V 也随之改变，它们之间由公式。

$$V=X(a-2X)^2$$

互相联系着。

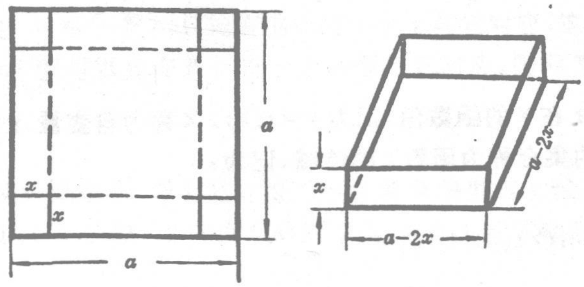


图 1—1

例 3　在气象观测站的百叶箱内，气温自动记录仪把一天的气温变化描绘在记录纸上(图 1—2)。时间 t 和气温 T 通过图中的曲线互相联系，根据这个图，可以知道 t 从 0 点到 24 点气温 T 的变化情况。

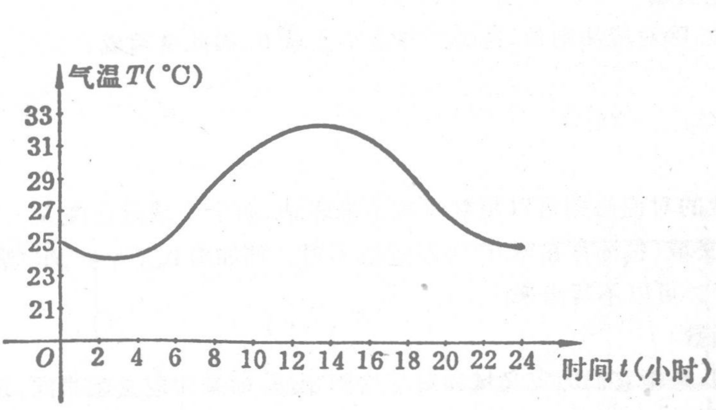


图 1—2

例 4　在货船的船头下部，常看到表示货轮吃水深度的吃水线。货轮吃水越深，说明排水量越

大，相应地货轮装的货物也越多。吃水深度与排水量之间的联系可用表格表示。例如：

吃水深度（米）	3	4	5	6	7	8	9
排水量（淡水：吨）	5020	7225	9275	11475	13750	16125	18525

以上几个例子，有一个共同特征：在同一现象中，存在着两个互相联系的变量。当第一个变量在某数集内取值时，按一定规则，第二个变量在另一数集内有唯一的一个值与之对应。把这种特征抽象写出来，便得到函数的概念。

定义 给定二个实数集 D、M，如果对 D 中任意数 X，按照某一确定的对应法则 f，在 M 中有唯一的一个数 y 与它相对应，则称 f 是确定在数集 D 上的函数，记作：

$$f: D \longrightarrow M$$

与数 X 对应的数 y 称为 f 在 X 的函数值，记为 $y=f(X)$。X 称为自变量，y 称为因变量。集 D 称为函数 f 的定义域。函数值的集合称为函数 f 的值域，记为：

$$f(D)=\{y|y=f(X), X\in D\}\subset M$$

根据函数的定义，上述四例皆为函数的实例。

关于函数概念的几点说明：

1） 函数的记法

在定义中，我们把对应法则 f 称为函数，把 $y=f(X)$称为函数值。严格说来，两者是不同的。但是，当我们知道对应法则，就可以确定各点的函数值；反之，知道各点的函数值，也就确定了一个对应法则。由于这个原因，以后我们就用“$y=f(X)$”或“$f(X)$”表示函数。

2） 函数的定义域

决定一个函数，除对应法则外，还必须知道定义域 D，因此常写成：

$$y=f(X), \qquad X\in D$$

如果一个函数的对应法则可以用数学式子来表达，而定义域就是使这一“式子”有意义的自变量值全体，此时定义域（也称存在域）D 可以省略不写。例如由式子 $y=\sqrt{\lg X}$表示的函数，其定义域是指 $D=\{X|X\geqslant 1\}$。可以不写出来。

3） 相同的函数

两个函数相同，是指它们的定义域和对应法则相同。如果对应法则相同，定义域不同，还不能说两个函数相同。例如：

$$f(X)\equiv 1, \qquad X\in(-\infty, +\infty)$$

与

$$h(\mathrm{X})=\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{X}},\qquad \mathrm{X}\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

是两个不同的函数。

如果对应法则相同，只是表达形式不同，例如

$$f(\mathrm{X})\equiv 1,\qquad \mathrm{X}\in(-\infty,+\infty)$$
$$g(\mathrm{X})=\mathrm{Sim}2\mathrm{X}+\cos 2\mathrm{X}\qquad \mathrm{X}\in(-\infty,+\infty)$$

实际上是相同的函数：$f(\mathrm{X})\equiv g(\mathrm{X})$

4) 单值函数与多值函数

在我们的函数定义中，对每一个 X，只能有唯一的一个 y 与它对应，这种函数称为**单值函数**。如果在函数定义中，同一个 X 值可以允许有不止一个 y 值与它对应，则称为**多值函数**。在本书范围内，只讨论单值函数。

5) 映射

函数也可以解释成映射或变换，即 f 把 X 轴上的点集 D 映射成 y 轴上的点集 $f(D)=\{y|y=f(\mathrm{X}),\mathrm{X}\in D\}\subset M$，f(a)称为 a∈D 的**象**。a 称为 f(a)的**原象**，映射 f 可用箭头图表示如下(图 1—3)：

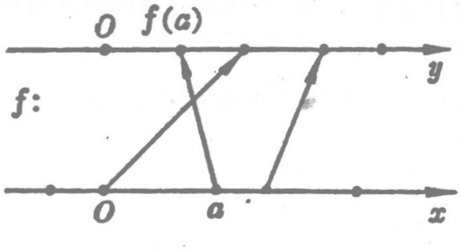


图 1—3

下面举几个实例(图 1—4)：

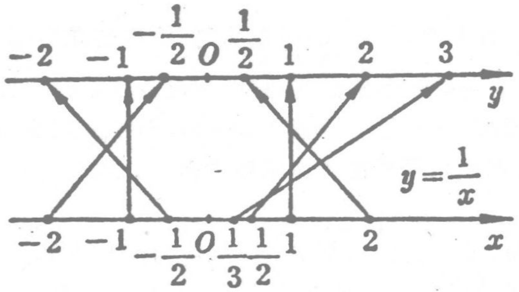


图 1—4(a)

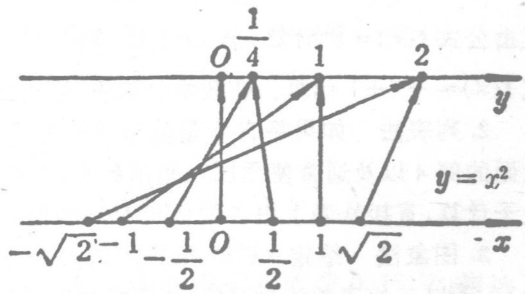


图 1—4(b)

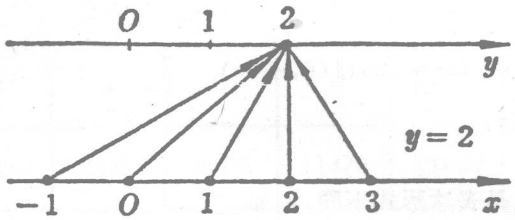


图 1—4(c)

6） 现代数学中的函数定义

它不要求定义域 D 和取值范围 M 都是数集。例如 D 代表一切三角形集合，M 代表一切圆集合。任给三角形，总有唯一的外接圆与之对应。这样在三角形集合和圆集合之间就建立了函数关系。不过，在本书范围内，只研究 D 和 M 都是数集的情形。

三　函数的表示法

1. 解析法　当函数的对应法则借助于数学式子给出时，称这种函数的表示方法为**解析法**。如上面的例 1 和例 2 以及

1）$y=x^2-2x+3\qquad(x>1)$；

2）$y=\dfrac{1}{1+x^2}\qquad(|x|)$；

3）$y=\sin x+\cos x\qquad(-\infty,+\infty)$；

4）$y=\ln x+x\qquad(x>0)$

都是解析法表示的函数，须要注意：一个函数也可以在其定义域的不同部分用不同的解析式表示，如

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in(0,+\infty)\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\\ -x+1, & x\in(-\infty,0)\end{cases}$$

这种形式的函数，称为分段函数，其对应法则是：当自变量 x 在 $(0,+\infty)$ 内取值时，对应的函数值由公式 $f(x)=x^2$ 计算，当 $x=0$ 时，则有 $f(0)=\dfrac{1}{2}$；当 x 在 $(-\infty,0)$ 内取值时，对应的函数值由公式 $f(x)=-x+1$ 计算。在数学分析中，解析法是表达函数的主要形式，它便于进行理论的研究。

2. 列表法　如果将自变量值与函数对应值列成表，去表示一个函 $f:D\to M$，则称为**列表法**，如上面的例 4 以及通常使用的三角函数表，对数表等，都是用列表法表达函数的例子。列表法优点是免予计算，直接从表上由 x 值读出 $f(x)$ 的值。

3. 图象法　给定 $x\in D$，根据函数关系 $f:D\to M$，求出对应函数值 $f(x)$，得到一有序数对 $(x,f(x))$，若以 x 代表横坐标，$f(x)$ 代表纵坐标，则可以画出平面上一点 $(x,f(x))$。让点 x 在 D 上变化，于是得到一个有序数对的集合：

$$\{(x,y)\mid y=f(x), x\in D\}$$

相应地得到平面上一条曲线 $y=f(x)$，它称为函数的图象。由图象给出函数对应法则的方法称为图象法。如上面例 3 以及下面图 1—5 都是用图象法表示函数的例子。图象法的优点是直观、形象，它把函数许多主要性质(如增减、凸性、最大值与最小值等)一目了然地呈现出来。图象法往往配合解析法一起应用。值得注意：因为我们只研究单值函数，故此函数的图象曲线 $y=f(x)$ 与平行 y 轴的直线最多只有一个交点。

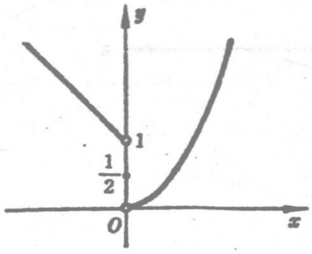


图 1—5

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in(0,+\infty) \\ \dfrac{1}{2}, & x=0 \\ -x+1, & x\in(-\infty,0) \end{cases}$$

4. 描述法　通过文字或语言描述函数关系的方法称为描述法。

例如，当 x 为有理数时 $f(x)$ 为 1，当 x 为无理数时 $f(x)$ 为 0，这句话就确定一个在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数，称为狄利克雷(Dirichlet)函数。也可以写成下面的形式：

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

四　函数关系举例

例 5　设有本金为 M，年利率为 P，计算复利，间 t 年后应得本利和多少？

解　一年后得利息 MP，本利和应为 $M+MP=M(1+P)$

二年后得利息 $M(1+P)\cdot P$，本利和应为 $M(1+P)+M(1+P)P=M(1+P)^2$

三年后得利息 $M(1+P)^2\cdot P$，本利和应为 $M(1+P)^2+M(1+P)^2\cdot P=M(1+P)^3$。

依此类推，t 年后应得本利和为：

$$W=M(1+P)^t$$

即本利和 w 是时间 t(年)的函数。

例 6　从甲地到乙地，行李收费如下：行李重不超过 50 公斤时，每公斤收费 0.15 元；超过 50 公斤时，超重部分每公斤收费 0.25 元。试写出运费与行李重的函数关系。

解　设行李重为 x，运费为 $f(x)$，于是有(图 1—6)

$$f(X)=\begin{cases} 0.15X, & 0\leqslant X\leqslant 50 \\ (0.15)\cdot 50+0.25\cdot(X-50), & X>50 \end{cases}$$

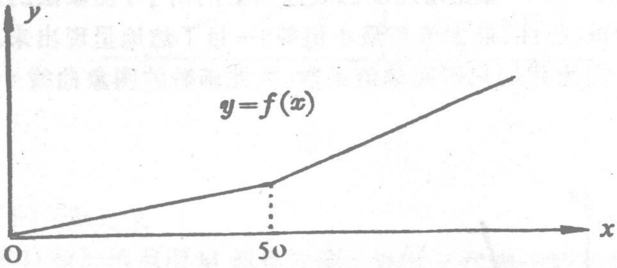


图 1—6

例 7 已知一个三角波(图 1—7),试用解析表示式写出 y 与 t 的函数关系。

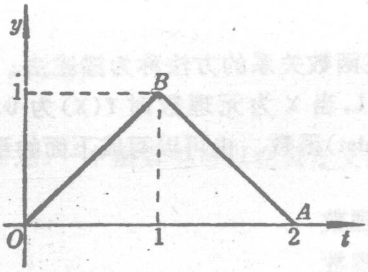


图 1—7

解 由图知 0(0,0),A(2,0),B(1,1),根据直线方程的两点式,得直线 0B 与直线 AB 的方程分别为 y=t 与 y=−t+2,故得:

$$y=\begin{cases} t, & 0\leqslant t\leqslant 1 \\ -t+2, & 1<t\leqslant 2 \end{cases}$$

例 8 y 表示不超过 X 的最大整数

显然,这句话确定了 y 是 X 定义在整个数轴上的函数,称之为"整数部函数",记为:

$$y=[X]$$

图 1—8 是它的图象。

$[2.5]=2$，$[3]=3$，$[0]=0$，$[-\pi]=-4$

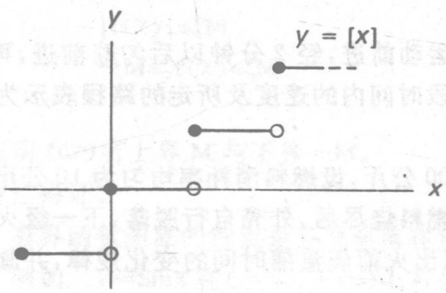


图 1—8

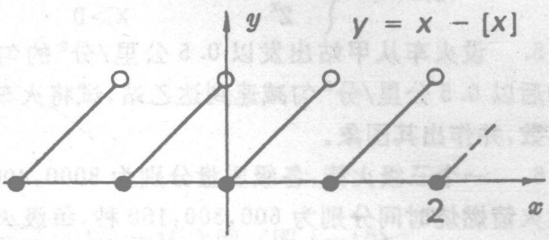


图 1—9

例 9 y 表示 X 的正小数部分

这句话也确定 y 是 X 定义在整个数轴上的函数，记为 $y=\{X\}$，

显然有 $y=\{X\}=X-[X]$

图 1—9 是它的图象

$\{2.5\}=2.5-[2.5]=2.5-2=0.5$

$\{5\}=5-[5]=5-5=0$

$\{-3.14\}=-3.14-[-3.14]=-3.14-(-4)=0.86$

例 10 定义在 $[0,1]$ 上的黎曼(Riemann)函数

$$f(X)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & \text{当 } X=\dfrac{p}{q}(p、q \text{ 为正整数}, \dfrac{p}{q} \text{ 为既约分数})\\ 0, & \text{当 } X \text{ 为无理数}\end{cases}$$

它的图象不是曲线。

§1 习　　题

1. 设 0 为原点，点 A 的坐标是 $(4,0)$，线段 $X+y=6$ $(X\geqslant 0$ 且 $y\geqslant 0)$ 上动点 p 的坐标为 $p(X,y)$，ΔOAP 的面积是 S。写出 X 与 S 的对应关系，根据这种关系确定了 S 是 X 的函数 $S=f(X)$，并求它的定义域和值域。

2. 跳伞运动员在 t_0 秒内自由降落，然后打开降落伞，并按速度 V 米/秒降落 t_1 秒，试把它所经过的路程表成时间 t 的函数。

3. 设 $f(X)=X^3-4X^2+11X+7$

求 $f(0),f(-2),f(12),f(1),f(-x),f(x+h)$

4. 求下列函数在 $x=1,-\frac{1}{2},0$ 处的值，画出函数图形。

(1) $f(x)=|x|$

(2) $f(x)=\begin{cases} 2+x & x\leqslant 0 \\ 2^x & x>0 \end{cases}$

(3) $f(x)=[x]$

5. 设火车从甲站出发以 0.5 公里/分^2 的匀加速运动前进，经 2 分钟以后匀速前进，再过 7 分钟后以 0.5 公里/分^2 匀减速到达乙站，试将火车在这段时间内的速度及所走的路程表示为时间的函数，并作出其图象。

6. 一个三级火箭，各级质量分别为 8000,4000,2000 公斤，设燃料消耗率均匀为 10 公斤/秒，各级火箭燃烧时间分别为 600,300,150 秒，每级火箭的燃料烧尽后，外壳自行脱落，下一级火箭就自行燃烧，最后一级火箭为人造卫星，绕地球运行。试写出火箭质量随时间的变化规律，并画出图象。

7. 应用三角不等式证明：

(1) 当 $|x+1|<\frac{1}{2}$ 时， $|x-2|<\frac{7}{2}$

(2) 当 $|x-1|\leqslant 1$ 时， $|x^2-1|\leqslant 3|x-1|$

8. 若 $f(0)=-2,f(3)=5$，求线性函数 $f(x)=ax+b$，并求 $f(1)$ 和 $f(2)$。

§2 一些特殊类型的函数

一 有界函数

定义 如果存在某常数 M，对任意 $x\in D$，都有

$$f(x)\leqslant M \qquad (f(x)\geqslant M)$$

则称 $f(x)$ 在 D 上有上界(有下界)

如果 $f(x)$ 在 D 上既有上界又有下界，则称 $f(x)$ 在 D 上有界。可以证明，$f(x)$ 在 D 上有界的充分必要条件是：存在某正数 M，对任意 $x\in D$，都有：

$$|f(x)|\leqslant M$$

事实上，如 $f(x)$ 在 D 上有界，即存在 M_1 与 M_2，有

$$M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2$$

令 M 为 $|M_1|$ 与 $|M_2|$ 中的最大者，记为 $M=\max\{|M_1|,|M_2|\}$