平面几何学

平面幾何學

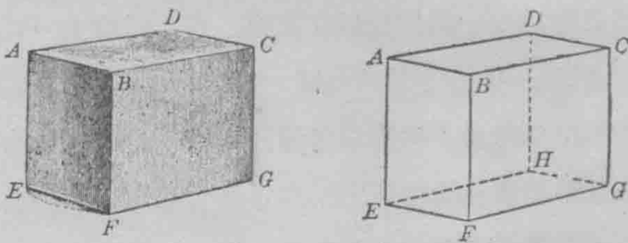
緒論

1.算術的性質 在算術裏面，我們學習用數的運算。我們可以有一個用代數符號的公式，例如 $a=bh$，在那裏，a代表一個長方形的面積，b 和 h 則各自代表底與高的長度單位的數目；但應用這個公式於一特別情形的實際運算則是算術的一部份。

2.代數的性質 在代數裏面，我們把算術普遍化了，我們不說一個底4吋高2吋的長方形的面積是 4×2 方吋，而我們用一個普遍的定律 $a=bh$ 來表示。在算術裏面，我們可以有一個等式，如同 $2\times16+17=49$：但在代數裏面，我們則常用方程式，如同 $2x+17=49$. 代數，所以，是普遍化的算術。

3.幾何的性質 現在我們起首算學的另一部份，牠雖然用數目而主要並不在數目，牠雖然用方程而並不專意於方程；而牠則以研究形象為主，例如三角形，平行四邊形，和圓形。許多的事實，在算術和代數裏有了敘述，而在幾何裏得到證明。例如，在幾何裏，我們證明了直角三角形的弦上的正方形等於其他兩邊上的正方形之和，和圓周等於直徑的 3.1416 倍。

4. 立體 這個木塊所代表的叫做立體；牠是用物質冲滿於空間的有限的一部份。在幾何裏，我們不管這個物體是用什麼做成的；我們只研究牠的形狀和大小，如第二圖。



一個物質立體是可以摸得着拿得住的；而一個幾何立體則是一個物質立體所佔有的空間。例如，一支手杖是一個物質立體，但假使我們把牠插入濕的灰泥中間，然後把牠抽出來，則牠所留下的孔可視做一個幾何立體，雖然其中已是冲滿空氣了。

5. 幾何立體 空間有限的一部叫做幾何立體。

6. 元 §4裏的木塊有三個主要的方向：

(1)自左至右，即，自A至D；

(2)自後至前，即，自A至B；

(3)自上至下，即，自A至E.

這些方向叫做木塊的元，並可依次叫做長，寬，厚(高)。同樣，我們可以說每一立體有三個元。

時常我們見到不能指出，或從寬和厚分別出長來的立體，例如不規則的煤塊；又如一個圓球，都是不能從其中分別出各元來的。

7.表面 §4的木塊有六個平面，每一個叫做一個表面。假如把各面都磨平，使一直尺放在任一面上，而這直尺的任一部份都和表面接觸，那每一面叫做一個平面。

這些表面只是這立體的界限。牠們沒有厚，甚至如同色光射在紙面上而不能使紙加厚一般。我們可以把一個木片刨得薄薄的，然後再用沙紙搽得更薄些，如此牠就差不多近於一個理想的幾何平面了；但牠永遠是一個用表面界限住的立體。

有長短和寬狹而無厚薄的叫做面。

8.線 在§4的立體上我們看見二個鄰面相交於一線。所以線是面的界限，並無寬狹和厚薄。

有長短而無寬狹和厚薄的叫做線。

例如一條電線不是一條線，而是一個立體。甚至用鉛筆畫的一條線也有寬和很小很小的厚，所以也是一個立體。但假如我們把一條線拖長，那牠便愈來愈細，就差不多漸近於我們理想的幾何線了。

9.量 立體，面和線都叫做量。

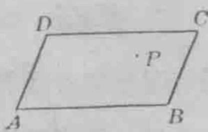
10.點 在§4的立體上，若二線相交，則相交於一點。所以點是線的界限，並且無長，無寬，無厚。

有位置而無長短，寬狹或厚薄的叫做點。

我們可看線的端做點。我們也可視二線相交爲一點，和二面相交爲一線。

11.點和幾何量的代表法 我們不僅可以想像出些幾何的量，如同線或平面；我們也可畫圖來表示牠們。

如此，我們可以用一個小點來代表點並用一個字母來做牠的名字，例如下圖中的P。



我們可以用一條細道來代表線，並用牠的兩端的字母做牠的名字，例如AB。

我們可以用牠的邊線來代表表面，並用牠的角上的字母，或其他方便的方法，做牠的名字，例如ABCD。

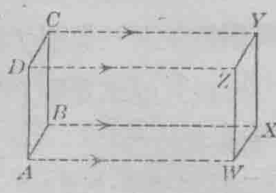
我們可以用牠的界面或這些面的邊線來代表一個立體，如在§4中的一般。

12. 幾何量的產生 我們可視做

(1)線產生於一個動點；

(2)表面產生於一個動線；

(3)立體產生於一個動表面。



例如下圖，設表面 ABCD 移動到 WXYZ 的位置。於是

(1)A產生了線AW；

(2)AB 產生了表面A WXB；

(3)ABCD產生了立體AY.

自然一個點僅止把牠反轉來而不能產生一條線，因爲這並不是點的動作；同樣一條線沿牠的本身向前後拉一拉或一個平面在牠自已上前後左右滑一滑也得不到平面或立體的。

13. 幾何圖形 一個點，一條線，一個面，一個立體，或這幾樣的任意的組合叫做一個幾何圖形。

一個幾何圖形普通簡稱做圖形。

14. 幾何學 研究幾何圖形的科學叫做幾何學。

平面幾何學研究完全在同一平面上的圖形，卽平面圖形。

立體幾何學研究不完全在同一平面上的圖形。

15. 直線 一條線，把牠的任一部份的兩個端點放到任意另一部份上而這部份的全體都在這線上的叫做直線。

例如 AB 是一條直線，因爲假如我們截取牠的半吋長的一段，把這一段放在 AB任何另一部份上，而使牠的兩端都在 AB上，而這半吋長的一段則都在 AB上。這是很易用摹寫紙來表明的。

線字單用時常做直線解。

一條線的一部分叫做線分。

16. 等線 兩條直線分可以把其中的一條放到另一條的上面而使牠們兩端都相合的叫做相等。

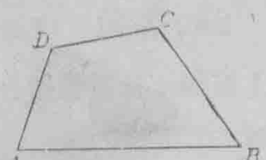
普通說來，假使可使兩個幾何量各部都相合，那牠們便相等。以後我們將要看到有些圖形如果相合的話，便叫做相合。

17. 折線 由於兩條或兩條以上的直線做成的線叫做折線。

例如CD即是一條折線。

18. 直線圖形 用折線做成的平面圖形叫做直線圖形。

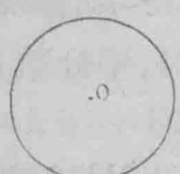
例如，ABCD是一個直線圖形。



19. 曲線 無一處直的線叫做曲線。

例如EF是一條曲線。

20. 曲線圖形 用曲線做成的平面圖形叫做曲線圖形。

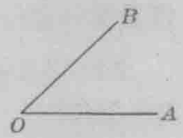


例如O便是我們已熟知的曲線圖形。

有些曲線圖形是用曲線界成的表面，而另外有些則是曲線的本身。

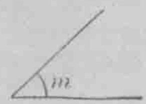
21. 角 **經過一點的兩條直線中間的開口便叫做角。**

狹義的說來，這是平面角。我們以後將見到用曲線做成的角和用平面做成的角。

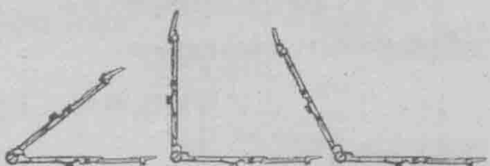


這兩條線叫做角的邊，而相交之點叫做角的頂點。

一個角我們可以用牠的邊的字母，而把頂點的字母置於中間來表示牠，如角 AOB。也可以用牠的頂點來稱呼一個角，如角O，或用角內的一個小寫字母，如角m。常常在裏面畫一條曲條來表示某一特別的角，如角m中。

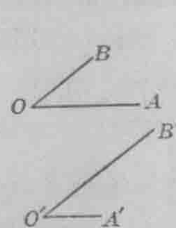


22. 角的大小 **角的大小在於把一邊移置於另一邊地位所必須的旋轉的多少。**



一角大於另一角設牠的旋轉的多少也是較多的話。如此右邊的幾個圓規中，第一角小於第二角。也小於第三角。邊的長短與角的大小無關。

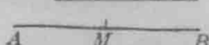
23. 等角 **兩個角，可以把其中的一個放到另一個的上面而使其頂點相合，兩邊相沿的叫做相等。**



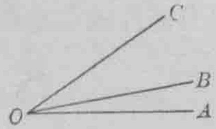
例如，角AOB與角A'O'B'(做讀"A Prime, O prime, B prime")相等。這很可以把一個角畫在薄紙上而舖到另一個的上面來證明。

24. 平分點(線) **一個點，一條線，或一個平面可以把一個幾何量分成兩個相等部份的就叫做這量的平分點(線)。**

例如線AB的中點M便是這條線的平分點。

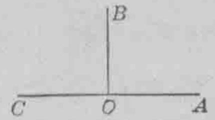


25. 鄰角 如果兩個角有同一個頂點和一個公共邊便叫做鄰角。



例如，角 AOB 和 BOC 是鄰角，和§26內，角 AOB 和 BOC 也是鄰角。

26. 直角 設一條直線與另一條直線相交而做成的鄰角相等，那每一個角便叫做一個直角。



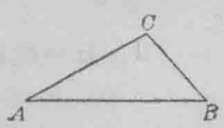
例如右圖中的角AOB和BOC。設把CO切去，角AOB依然是一個直角。

27. 垂直 一條直線與另一條直線做成直角的時候便叫做垂直於第二條線。

如此，OB垂直於CA，並且CA垂直於OB。OB也可叫做CA的垂線並且O可叫做垂線OB的足。

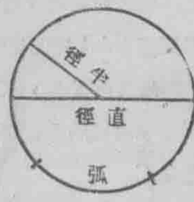
28. 三角形 由三條直線所界的平面的一部份叫做三角形。

線AB，BC和CA叫做三角形ABC的邊，邊的總和叫做周界。點A, B和C是三角形的頂點並且角BA, C和是三角形的角。邊AB叫做三角形的底。同樣可推到別的平面圖形。



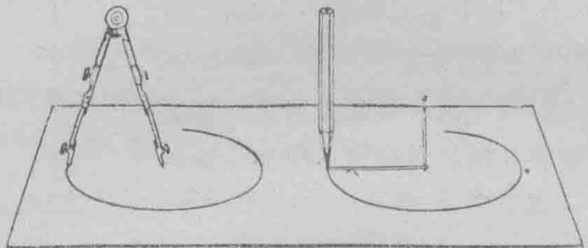
29. 圓 一個平面上的閉曲線，而在牠上面的一切點與在這個平面上的一個定點的距離都是相等的便叫做圓。

圓的長叫做圓周。與圓上一切點等距離的點叫做圓心。圓的任一部份叫做弧。從圓心到圓的直線叫做半徑。經過圓心而兩端到圓爲止的直線叫做直徑。



以前在初等幾何中，圓則是所包含的空間，而牠的界線叫做圓周。近世的說法則合於高等算學中所用的定義。

30.幾何學的儀器 在幾何學中，除去筆與紙外，只有兩件儀器是必須的。這便是直尺和圓規。



在無有規的時候，特別是爲了黑板的工作，可用一個繩圈來替代。但爲長度的準確計，則圓規是合宜的。

31.用儀器的習題 下面這些簡單習題則是爲了使學生熟習於用儀器起見。並不企圖得到證明，這些證明均將見於本書的後面。

本節可任意取消與全書無關係。

習　題　一

1. 自一條已知直線上的一個已知點，作一條垂直線。

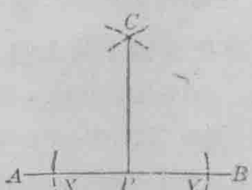
設AB爲已知線並且P爲已知點。

求自P作一直線垂直於AB。

用P做圓心，任意合宜的長度做半徑，做兩個弧交AB於X和Y。

用X做圓心，XY做半徑畫一圓；用Y做圓心，同樣的半徑再畫一圓，並叫這二圓的交點做C。

用直尺，自P至C畫一直線，卽合所求。

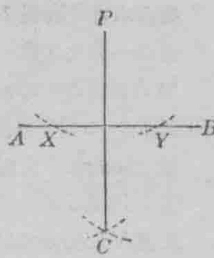


2. 自一條已知線外的一個已知點，作一條垂直線。

設AB為已知線並且P為已知點。求自P做一直線垂直於AB。

用P做圓心，任意合宜的長度做半徑，做弧，交AB於X和Y。

用X做圓心，任意合宜的長度做半徑，畫一圓；用Y做圓心，同樣的半徑再畫一圓，並叫這二圓的交點做C



用直尺，自P至C畫一直線，卽合所求。

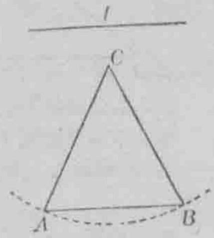
3. 做一個三角形有兩邊等於一條已知線。

設l為已知線。

求做一三角形有兩邊等於l。

用任一圓心，如C，和等於l的半徑，做一弧。

用直線連結弧上的任意兩點，如A和B並連結A和B與C。



於是ABC卽所求的三角形。

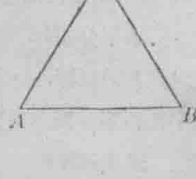
4 求做一個各邊都等於一條已知線的三角形。

設AB為已知線。

求做一個三邊都等於AB的三角形。

用A做圓心，AB做半徑，畫一圓；再用B做圓心，同樣的半徑，另畫一圓。

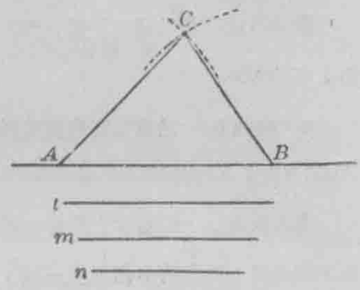
用直線連接二圓的任一交點和A與B。



於是ABC卽所求的三角形。

在這種情形之下，不必畫出全圓，只畫出可能看出交點的弧來，卽可。

5. 求做一個三邊等於三條已知線的三角形。



設三條已知線爲l, m 和 n。

現在求做什麼呢？

在任一線上，截一線分AB等於l。

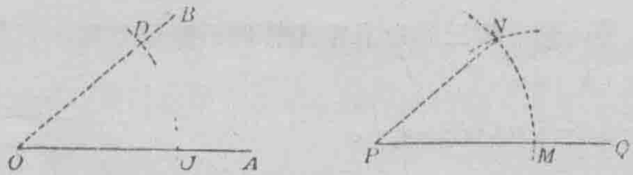
用A做圓心，心m做半徑畫一圓；用B做圓心，n做半徑畫一圓。

設二圓的任一交點爲C。

畫AC和BC。

於是ABC卽所求的三角形。

6. 從一條已知線的一個已知點，畫一個角等於一個已知角。



設P是已知線PQ上的已知點，並設角AOB是已知角。

現在求做什麼呢？

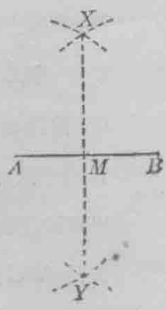
用O做圓心，任意的半徑，做一個弧與AO相交於C，與BO相交於D。

用P做圓心，OC做半徑，做一個弧與PQ相交於M。

用M做圓心，連接C和D的直線做半徑，做一個弧，而與方纔做的弧相交於N，並畫PN。

於是角MPN卽是所求的角。

7. 求平分一條已知直線。



設AB是已知直線。

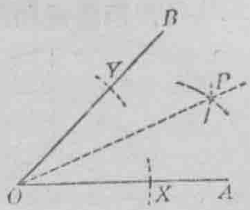
求平分AB。

用A做圓心，AB做半徑畫一圓，用B做圓心，同樣的半徑再畫一圓。叫這兩個圓的兩個交點做X和Y。

畫直線XY。

於是XY在交點M平分直線AB。

8. 求平分一個已知角。



設AOB爲已知角。

求平分角AOB。

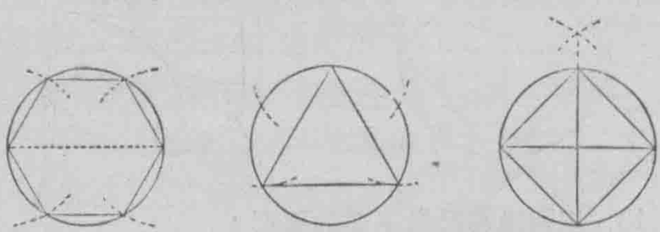
用O做圓心，用任意合宜的半徑畫一弧，交A於X,OB於Y。

用X做圓心 連接X和Y的線做半徑畫一圓；用Y做圓心，同樣的半徑再畫一圓，並叫二圓的任一交點做P。

畫直線OP。

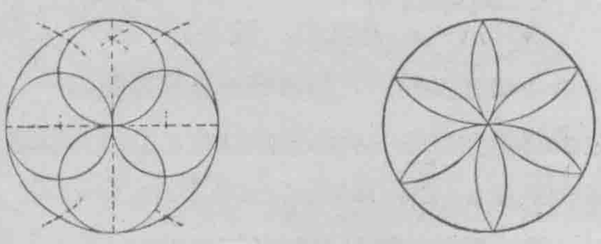
於是，OP即所求的角AOB的平分線。

9. 用圓規和尺做下面的圖形：



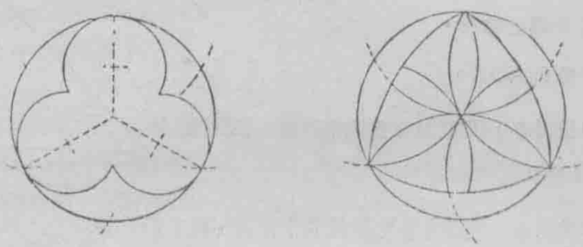
虛線指示出如何定畫圖必需的點，並且在把圖畫完後即可擦去。普通在幾何學中，輔線(只用於輔助的)都用虛線來表示。

10. 用圓規和尺做下面的圖形：

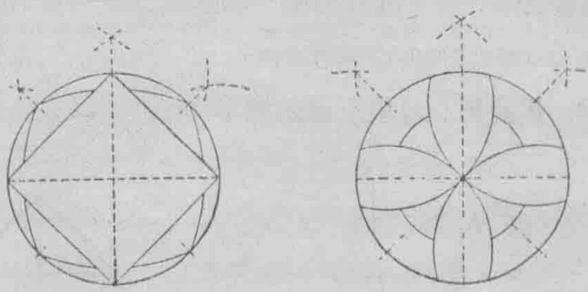


從第9題和第10題， 我們很明顯的看出來可以用圓的半徑畫弧而把圓分爲六等分。

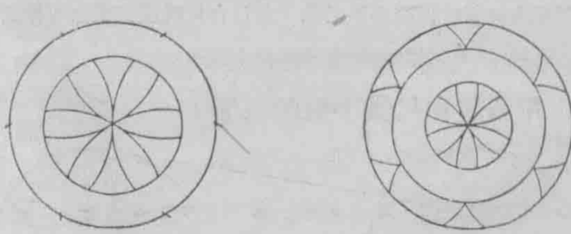
11. 用圓規和尺做下面的圖形：



12. 用圓規和尺做下面的圖形：



13. 用圓規和尺做下面的圖形：



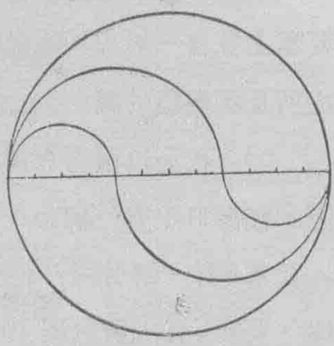
在這類圖形中，可以塗上各種顏色做爲藝術化的模型。那些圖案可以應用到花玻璃窗，漆布，花磚，或其他的裝飾品上面。

14. 畫一個每邊等於$1\frac{1}{4}$吋的三角形。

15. 畫二條成直角而互相平分的直線。

16. 平分每個二條互相平分的直線做成的四個直角。

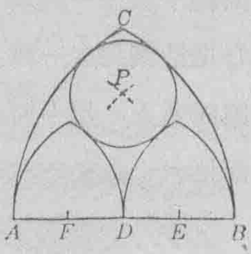
17. 畫一條長$1\frac{1}{2}$吋的線，再用尺把牠分為每段$\frac{1}{8}$吋。然後用圓規做右圖。



當我們到了圓的度量的時候，我們很容易的可以看出這兩條曲線把圓中的空間分做等分。

把圖中各個半圓都畫為整圓，即可得到另一個有趣的圖形。其餘相似的圖案甚易尋出，可獎勵學生作些這類圖案。

18. 在計劃一個峨特式的窗時，下面的圖是必需的。用A做圓心，AB 做半徑，做弧 BC。這些小弧則是用 A, D和 B 做圓心，AD 做半徑而畫成的。圓心 P 則是用 A和B 做圓心，AE 做半徑求出來的。如何求這些點 D,E 和 F 呢？把這個圖照樣畫出來。



29. 畫一個每邊 1吋長的三角形。平分每邊。用平分點做圓心，$\frac{1}{2}$吋做半徑，畫三個圓形。

20. 一個壘球場是一個每邊90呎的正方形。用$\frac{1}{16}$吋代表一呎做這個圖樣。求距本壘60呎的投手的位置。

21. 一人自A地出發，東行1哩至B地。他折向正北，行$1\frac{3}{4}$哩至C地。用$\frac{1}{2}$吋代表1哩，畫這個圖樣，並量AC的長度準到$\frac{1}{4}$哩。

22. 在海口兩旁，有兩座正對着的要塞，相距13哩。要塞上各有一射程10哩的礮。用$\frac{1}{16}$吋代表 1哩，做一個礮火所及的面積的圖。

23 在海口兩旁有兩座正對着的要塞，A和B'相距16哩。在海口中有一個距A12哩距B11哩的島，其上卽要塞C。要塞A有一個射程 12哩的礮，要塞B有一個射程 11哩的礮，要塞C有一個射程 10哩的礮。畫海口的形勢，並表出每礮所及的面積。

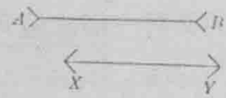
24. 在一片50呎見方的草地的一角上，用一條25呎長的繩子繫住一匹馬，則牠可在所及的草地上任意吃草。次日把牠繫到次一角上，第三日則在第三角上，第四日則在第四角上。用$\frac{1}{8}$吋代表 5呎，做一個圖表示出牠所吃草的面積。

25. 一個園丁按下面的計劃做了一個花池：他做了一個每邊 16呎長的三角形A B C，並平分其中的二角。從這兩條平分線的交點P，他畫了這個三角形的三邊的垂線，PX，PY和PZ。然後，他用P做圓心，PX做半徑，畫一圓，而恰合於這個三角形。用$\frac{1}{4}$吋代表1呎，作這圖樣。

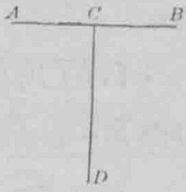
32. 證的必需 雖然幾何中包含一部畫圖，但這並非主要的。而本質則在證明這個圖形恰是我們所需要的。只看牠的形狀而卽認爲眞實的危險可看習題二。

習題二

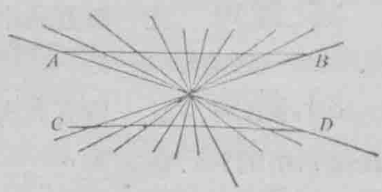
1. 估計哪一條線長些，AB 呢或 XY呢？並長若干？然後把你估計的結果，用圓規或精確的畫在紙條上來試一試。



2. 估計哪一條線長些，AB 呢或 CD呢？並長若干？試驗你所估計的結果如第一題。

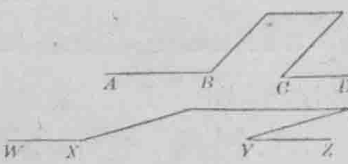


3. 看右圖，AB和CD都是直線嗎？若有一條不是的話，是哪一條呢？用一個尺或折疊一個紙條的邊來試驗你的答案。

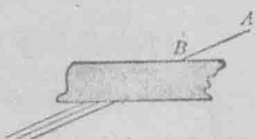


4. 看右圖，並說出AB和CD的距離在A和C是不是與在B和D相等。如第一題試驗你的結果。

5. 看右圖，並說出AB的延長線是否在CD上。並說出WX的延長線是否在YZ上。沿線放一直尺來試驗你的答案。



6. 看右圖，並說明下面三條線中，哪一條是 AB 的延長。然後沿 AB 放一條尺來試驗你的答案。



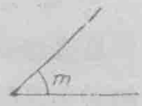
33.直線角 當一個角的兩邊恰向相反的兩方進展，那卽說兩邊都在一條直線上，這個角便叫一個直線角。

例如，圖中的角AOB便是一個直線角。在線下的角AOB也是一個直線角。

34.直角和直線角 從直角的定義(§26)可知一個直角等於一個直線角的一半。

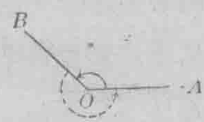
同樣，可知一個直線角等於兩個直角。

35.銳角 比一個直角小的角叫做銳角。



例如，圖中的角m是一銳角。

36.鈍角 比一個直角大而比一個直線角小的角叫做鈍角。



例如，圖中的角AOB是一鈍角。

37.蝕角 比一個直線角大而比兩個直線角小的角叫做蝕角。

例如，在§36的圖中，用虛線表出的角AOB卽是一個蝕角。

當我們說兩條已知線做成一個角的時候，除非特別指出來，我們總是指較小的角說的。

38.斜角 銳角和鈍角都叫做斜角。

斜角的邊稱做互斜，並可叫做斜線。

顯然的，假如我們平分一個直線角，我們卽得二直角；假如我們平分一個直角或一個鈍角，我們卽得二銳角；假如我們平分一個蝕角，我們卽得二鈍角。