中学理科学习指导丛书

高二代数辅导与练习

南开

北京市海淀区教师进修学校主编

重庆出版社

中学理科学习指导丛书

高二代数辅导与练习

北京市海淀区教师进修学校主编

重 庆 出 版 社

一九八三·年重庆

编　者

北京市花园村中学　陶大裕
北京市二十中　范登宸
北京市北大附中　陈剑刚
北京市海淀区教师进修学校　张士充　赵大悌

高二代数辅导与练习

重庆出版社出版（重庆李子坝正街102号）
四川省新华书店重庆发行所发行
湖北省新华印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 6.75　字数 143 千
1983年7月第一版　1983年7月第一次印刷
印数：1—417,000 册

书号：7114·133　定价：0.48 元

前　言

长期以来，我们感到：学生迫切需要一种能帮助他们学好功课的课外读物；家长希望有一种能督促和检查自己孩子学习的材料；教师欢迎出版一种能帮助自己辅导学生学习的书籍．为了满足这些要求，我们组织了一些有教学经验的教师编写了这套丛书．

通过教学实践，我们认识到：

（1） 只有把知识的结构分析清楚时，知识才易于学生理解、记忆和运用，并从而掌握知识的整体．

（2） 打好基础，是学生学好全部知识的前提．在基础知识中，重点和难点掌握不好，是有些学生学习不好的原因之一．

（3） 引导学生对所学过的那些主要题型做到心中有数，又启发学生掌握各级题型的解题规律，是帮助学生消化知识提高解题能力的有效途径．

（4） 对学习较好的学生来说，在学好基础知识的前提下，不断提高他们综合运用知识，以及把知识向深、广两个方面进行适当引申的能力，这不但是可行的，而且是应该的．

（5） 知识必须通过不断地复习、检查，才能逐步深化、巩固．

基于以上认识，本书在编写时，各章都包含以下几个部分：

（1） 结构分析：有些章分析比较简单，可以在学习开始时看，有些则分析得较深入，可以在学完全章后再看。

（2） 重点和难点分析：说明重点内容的重要性在哪里，特别是如何通过它们掌握全章内容。说明难点之所以困难的原因，特别是通过解决难点能学到哪些思考方法、解题技巧，和促进哪些能力的增长。

（3） 各级题型：配以典型的例题，并说明解题规律。

（4） 启发与体会：着重介绍教师的教学经验和体会，以及教科书上没讲的思路、观点、方法等，以及适当启发学生对所学知识作更深入的思考。

（5） 自我检查题：在每单元之后，配备知识面尽量全、并具有一定综合性、用以检查本单元学习的一套题目，以帮助学生了解自己学习后的收获与存在的问题。

本书尽量作到以上各项要求，并体现紧密配合教材，但又不重复教材内容的原则。但是限于编者水平，未必都能做到，且不免出现错误或不妥之处，我们诚恳地希望读者给以批评和指正。

北京市海淀区教师进修学校

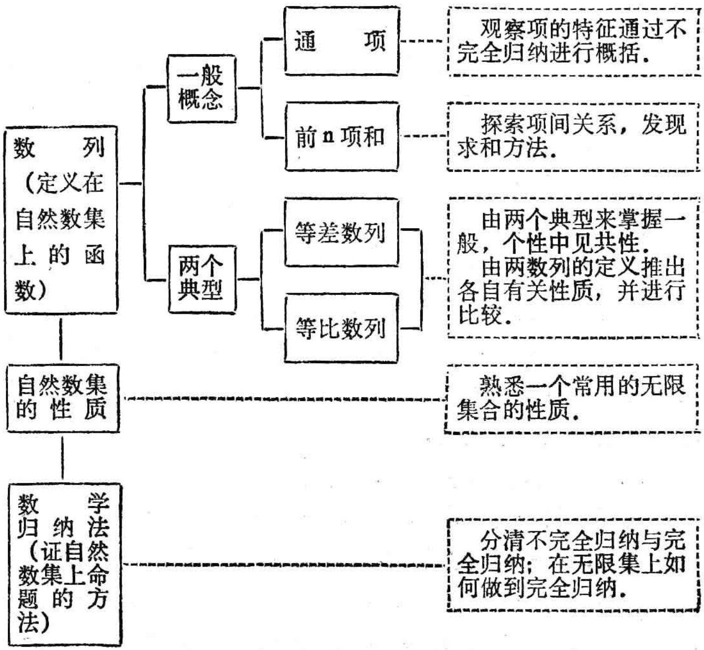
1983年2月

目 录

第一章　数列与数学归纳法

一　结 构 分 析

各项内容间的联系　　　　结合进行的思维训练



二　重点、难点分析

数列的基础知识、等差数列、等比数列、数学归纳法，这四个内容都是本章的重点。这些知识，应用广泛，经常与其他知识综合出现；其次，影响深远，微积分等高等数学的学习中常要用到它们；再者，方法性强，本章包含着不少数学方法，掌握它们，对提高数学能力具有重要意义。所以，对这四部分知识都应当予以重视。

这几部分知识，比较起来，数学归纳法难度略大一些。学习时，要特别注意一下。

下面，我们就对这些知识，作一些简要的分析。

1．　数列的基本知识：

既然数列是一种定义域为自然数集的函数的函数值系列，因此，用函数的观点来认识它是有益的。回忆一下学过的各种具体函数，可以知道，在中学里，函数知识的展开层次一般是：定义$\longrightarrow$表示法$\longrightarrow$性质。现在，我们就用这样的层次来研究一下数列。

（1）　定义：顾名思义，数列就是数的队列。严格地说，数列是依一定次序排列着的一列数。以前见过数列吗？当然见过。$(a+b)^2$的展开式的系数 1、2、1 不就是一个数列嘛。其实任何一个多项式的系数都构成一个数列；此外，平面上一点的横纵坐标 a、b 不也是一个只有两项的数列吗？当然，这类例子还很多。

从函数观点来看，数列是定义域为N或其子集$\{1,2,3,\cdots,n\}$的函数，当自变量从小到大依次取值时相应的一系列函数值。你能借助于函数$y=\sin x$造一个数列吗？显然，$\sin 1$，$\sin 2$，…，$\sin n$，… 就是一个。

除了定义域是自然数以外，数列的定义域中还有一点值得注意的是"有次序"。请回答：

数列 2，3，-1，6 与集合$\{2, 3, -1, 6\}$等价吗？

正确的回答，应该是：不！因为，集合中的元素是不讲顺序的，把上述集合写成$\{-1, 3, 2, 6\}$，仍是同一个集合，而数列 -1，3，2，6 则与上述数列不是同一数列了。

（2） 表示法：一般函数有三种表示法，数列也不例外。

① 列表法：把数列写成

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \ \cdots, \ a_n, \ \cdots,$$

其中 a_n 是数列的第 n 项。

这，实际上就是在用列表法表示数列，只是省略了自变量那一行而已。

② 图象法：在直角坐标系中，数列可以用一群分散的孤立的点表示。这，其实就是数列的图象法表示。请读者自己画一画数列

$$1^2, \ 2^2, \ 3^2, \ 4^2, \ 5^2,$$

的图象。

③ 解析法：

1° 通项公式法：如果一个数列的第 n 项 a_n 与项数 n 之间的函数关系可以用一个公式$a_n=f(n)$表示，这个公式就叫做数列的通项公式。如，数列

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ 2n-1,\ \cdots,$$

的通项公式是 $a_n=2n-1$。容易理解，这就是数列的一种解析法表示。

2°递推法：数列也可以用下面两个条件结合起来的方式表示：1)给出最初的一项或几项；2)给出数列中后面的项用前面的项来表示的公式。这，就是数列的又一种解析表示法。如数列 $1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 2n-1,\ \cdots,$

的递推法表示为：$\begin{cases} a_1=1, \\ a_n=a_{n-1}+2,\ (n\geqslant 2). \end{cases}$

其中 $a_n=a_{n-1}+2$ 称为该数列的递推公式。

（3） 性质：函数的性质，通常指在定义域或它的某部分上函数值的增、减性，奇偶性，周期性，极值等。数列也有这些基本性质；但一般着重于讨论它的定义域、值域、增减性和极值四方面，并依前三方面对数列进行分类。

依定义域可以将数列分为有穷数列与无穷数列两类（定义请见教材）；

依值域可将数列分为有界数列与无界数列；

依增减性可将数列分为递增数列、递减数列与摆动数列；

后两者，我们都没有具体写出各类数列的定义，你能根据以往学过的函数的有关知识，给出它们的定义吗？

2. 等差数列：

这部分知识有四个要点：定义，通项公式，等差中项与前 n 项和公式。

（1） 定义：粗略地说，等差数列就是“差等数列”，

即是一种相邻两项的差相等的数列。严格地说，从第二项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数，则这个数列叫做等差数列。

请读者思考：

① 如果a_1，a_2，a_3，…，a_{100}是等差数列，那末每隔一定项数取其一项得到的数列如：

$1°$ a_1，a_3，a_5，…，a_{99}；

$2°$ a_1，a_5，a_{10}，…，a_{100}； $d'=nd$.

分别是什么数列？ $d'=d$

如果将原数列倒置为a_{100}，a_{99}，a_{98}，…a_1，这个数列又是什么数列呢？等差.

如果所得到的新数列是等差数列，那末各新数列的公差与原数列的公差各有什么关系？$d'=nd$

② 借助于代数式，你能用几种方法表示一个等差数列？

提示：1) a，$a+d$，$a+2d$，…，$a+(n-1)d$，…

特殊地，只有三项时，可表示为

a，$a+d$，$a+2d$；

或 $a-d$，a，$a+d$.

这种表示法的妙处在于它灵活地选取了起点a，又灵活地引入负数的概念用在d身上，因而获得三项间的对称性。

特殊地，只有四项时，可表示为

a，$a+d$，$a+2d$，$a+3d$；

或 $a-3d$，$a-d$，$a+d$，$a+3d$.

这种表示法的特点是灵活地选取了公差。

2) $a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_n-a_{n-1}=\cdots$

特殊地，只有三项时，

$$a_2-a_1=a_3-a_2;$$

或 $$2a_2=a_1+a_3.$$

3) $$\begin{cases}a_1=a & (n=1\text{时}),\\ a_n=a_{n-1}+d & (n>1\text{时}).\end{cases}$$

③ 你能从日常生活中，找到一种等差数列的模型吗？（提示：例如楼梯各级离地面的高度就是一种很直观的等差数列的模型。）

（2） 通项公式：

通项公式，教材是用列出等差数列的一些项，再观察其中的规律而得到的．这种从一部分特殊的结果，观察出一般结论的方法，叫不完全归纳法，是很值得学习的一种方法．

能否从另外的途径推出等差数列的通项公式呢？可以．我们已经知道，等差数列公差d可以表示为

$$d=a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_n-a_{n-1}=\cdots.$$

那末显然有

$$a_2-a_1=d,$$
$$a_3-a_2=d,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n-a_{n-1}=d,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

所谓通项公式，就是用a_1、d和n来表示a_n．能否通过上述这组等式来达到用a_1、d和n表示a_n的目的呢？思考一下以后，我们会发现，只要把上述等式中的前$n-1$个相加，就得到 $a_n-a_1=(n-1)d$.

进而，可有 $a_n=a_1+(n-1)d$.

但是需要注意的是，所得到的公式中，要求$n\geqslant 2, n\in N$.

这是因为，推导过程中用到的第 $n-1$ 个等式 $a_n-a_{n-1}=d$ 中有 a_{n-1}，当 $n=1$ 时，$a_{n-1}=a_0$，而 a_0 是数列中所没有的。

为了弥补上边指出的漏洞，一般常采用验证的办法。当 $n=1$ 时，公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 的左边为 a_1，右边为 $a_1+0\cdot d=a_1$。可见，当 $n=1$ 时，公式也成立。所以，公式对一切自然数 n 都成立。当然，它就是通项公式了。

请读者思考：

① 善于联想，是一种极可贵的思维习惯。见到公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 以后，你可能已经联想到一次函数，从而认识到当 a_1、d 是常数时，a_n 与 n 是一次函数关系。在这一认识的基础上，你能说出：等差数列的图象是什么？d 在其图象中的几何意义是什么？一个等差数列至少知道其中几项则这个数列就可以确定了？

② 公式要能熟练运用，必须掌握它的各种变形。你能写出等差数列通项公式的一些变形吗？

③ 抽象能力，是学好数学的一种根本能力。从通项公式的各种变形，你能抽象出什么更具有一般性的认识？

④ 模型，是现代常用的一个科学术语。从学生时代起就不断训练自己去寻找有关知识的具体模型或去建立其抽象模型是很有好处的。你能结合前文提示的等差数列的楼梯模型，解释公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 吗？你能借助于这种模型，把通项公式进行引申和发展吗？

上述问题的提示：

① 等差数列的图象是横坐标为自然数的同在一条直线上的、一些分散的点。对比 $d=\dfrac{a_n-a_1}{n-1}$ 与 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，

可以看出d的几何意义是图象上的点所在直线的斜率。根据两点可以确定一条直线，由此可知，已知两项就可以确定一个等差数列。如，已知$a_3=5$，$a_7=13$，则可确定一个等差数列。

② $a_1=a_n-(n-1)d$;

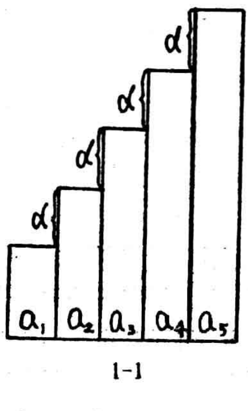
$$n=\frac{a_n-a_1}{d}+1, \text{ 等.}$$

③ 如果抽去a_1、a_n、n、d分别是第一项、第n项、项数、公差这些具体意义，只是把它们看成普通的四个未知数。那末，公式$a_n=a_1+(n-1)d$只是给出了这四个未知数间的一种关系。由此，我们可以得出一个更一般的认识：借助于这一关系，这四者中知道其中任意三个，总可以求得第四个。

④ 如图1-1，从a_1上到a_4显然要上3个d。自然从a_1上到a_n则要上$(n-1)d$。这就是公式

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

中，要在a_1之后加上$(n-1)$倍的d而得出a_n的一种直观解释。



1-1

从图中还可以看出，如果是从a_3上到a_5，要上2个d，即上$(5-3)$个d。由此可以想到通项公式可引申为$a_n=a_m+(n-m)d$。这一结论，用解析式也不难求出：

∵ $a_n=a_1+(n-1)d$, $a_m=a_1+(m-1)d$.

相减：$a_n-a_m=(n-m)d$,

∴ $a_n=a_m+(n-m)d$.

（3） 等差中项：

如果 a、A、b 三个数成等差数列，那末 A 就叫做 a 与 b 的等差中项。

根据上述定义可知，$A-a=b-A$。由此可以推出

$$2A=a+b, \text{或} \quad A=\frac{a+b}{2}.$$

请思考：今后要证明 a、A、b 成等差数列，常常改证 $2A=a+b$。与上边得出的，"a、A、b 成等差数列，则 $2A=a+b$"。结合起来，说明"$2A=a+b$"是 a、A、b 成等差数列"的充要条件。你能证明这一点吗？

（4） 前 n 项和公式：

注意研究等差数列，可以发现：当 $m+n=p+q$ 时，$a_m+a_n=a_p+a_q$。就是说，等差数列中，只要某两项的项数和等于另外两项的项数和，就知这两项的和等于另外两项的和。这一结论，请读者自己证明一下。这一结论的特殊情况是：$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\cdots$，即对有穷等差数列来说，距首末两项等远的两项的和都相等。

现在，我们来推导求等差数列前 n 项和 S_n 的公式。着手之前，先思考一下"大方向"是有好处的。S_n，就等于 $a_1+a_2+\cdots+a_n$；S_n 的公式，无非是用数列某些特殊项及项数，以简单的形式表示出 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 的结果；怎样才能使 n 个数相加变得简单些呢？化成相同的因数相加，变加法为乘法是一个办法，借助减法消去一些项又是一个办法，……。联想到上段的结论，比较容易地想到要走变加法为乘法的路子。

具体地说，设 $\quad S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，

则 $\quad\quad\quad S_n=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1$。

相加，得 $2S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\cdots+(a_n+a_1)$，

即 $2S_n=(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)$，

$\therefore$ $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$.

请读者思考：

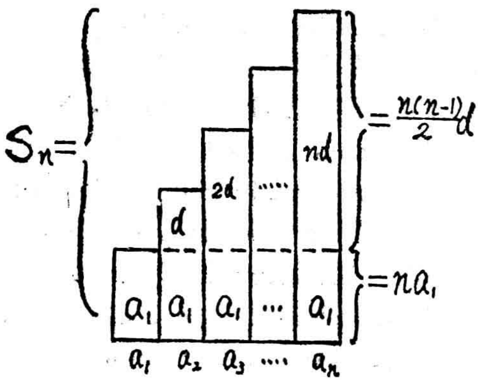
① 抽象地看，这个公式中知道其中几个量就可以求出其余几个量？如果与通项公式结合起来看呢？

提示：求S_n的公式与求a_n的公式结合起来共有五个量，知道其中任意三个可求其余两个.

② 这一公式外形上与梯形面积公式十分相似，这是偶然的吗？

请仔细看一下教材中的示意图，它会给你以启发.

③ 将$a_n=a_1+(n-1)d$代入$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，可以得到 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$. 这也是经常用到的一个求$S_n$的公式. 借助于下图中各部分的面积，你能对这个公式给以直观



1-2