



智能科学/技术/著作/丛书

# 区间多目标进化优化 理论与应用

巩敦卫 孙靖 著



科学出版社

智能科学技术著作丛书

# 区间多目标进化优化理论与应用

巩敦卫 孙 靖 著

科学出版社

北 京

## 内 容 简 介

区间多目标优化问题普遍存在且非常重要,但已有的解决方法却非常少。采用进化优化方法求解区间多目标优化问题是近年来进化优化界的热点研究方向之一。本书阐述了用于求解区间多目标优化问题的进化优化理论与方法,主要包括:目标函数值为区间时,进化个体的比较、决策者偏好的融入及其在种群进化的应用,以及含有很多目标函数优化问题的降维转化与求解等。同时,本书还给出了不同方法在基准数值函数优化和室内布局的应用,以及全面详细的算法对比结果。为便于应用本书阐述的方法,书后附有部分区间多目标进化优化方法 Matlab 源程序。本书是国内第一部用进化优化方法解决区间多目标优化问题,特别是融入决策者偏好解决该问题的学术著作,也是作者近五年来在多项国家和省部级科研项目资助下取得的一系列研究成果的结晶。

本书可供理工科大学相关专业的教师及研究生、自然科学和工程技术领域的研究人员学习参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

区间多目标进化优化理论与应用/巩敦卫,孙靖著. —北京:科学出版社, 2013

(智能科学技术著作丛书)

ISBN 978-7-03-037517-9

I. ①区… II. ①巩… ②孙… III. ①多目标(数学)-最优化算法  
IV. ①O224

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 103658 号

责任编辑:刘宝莉 孙 芳 / 责任校对:宣 慧  
责任印制:张 倩 / 封面设计:陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新科印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2013 年 6 月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2013 年 6 月第一次印刷 印张:14 3/4

字数:278 000

定价:68.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)



## 《智能科学技术著作丛书》序

“智能”是“信息”的精彩结晶，“智能科学技术”是“信息科学技术”的辉煌篇章，“智能化”是“信息化”发展的新动向、新阶段。

“智能科学技术”(intelligence science&technology, IST)是关于“广义智能”的理论方法和应用技术的综合性科学技术领域,其研究对象包括:

- “自然智能”(natural intelligence, NI),包括“人的智能”(human intelligence, HI)及其他“生物智能”(biological intelligence, BI)。

- “人工智能”(artificial intelligence, AI),包括“机器智能”(machine intelligence, MI)与“智能机器”(intelligent machine, IM)。

- “集成智能”(integrated intelligence, II),即“人的智能”与“机器智能”人机互补的集成智能。

- “协同智能”(cooperative intelligence, CI),指“个体智能”相互协调共生的群体协同智能。

- “分布智能”(distributed intelligence, DI),如广域信息网、分散大系统的分布式智能。

“人工智能”学科自 1956 年诞生的,五十余年来,在起伏、曲折的科学征途上不断前进、发展,从狭义人工智能走向广义人工智能,从个体人工智能到群体人工智能,从集中式人工智能到分布式人工智能,在理论方法研究和应用技术开发方面都取得了重大进展。如果说当年“人工智能”学科的诞生是生物科学技术与信息科学技术、系统科学技术的一次成功的结合,那么可以认为,现在“智能科学技术”领域的兴起是在信息化、网络化时代又一次新的多学科交融。

1981 年,“中国人工智能学会”(Chinese Association for Artificial Intelligence, CAAI)正式成立,25 年来,从艰苦创业到成长壮大,从学习跟踪到自主研发,团结我国广大学者,在“人工智能”的研究开发及应用方面取得了显著的进展,促进了“智能科学技术”的发展。在华夏文化与东方哲学影响下,我国智能科学技术的研究、开发及应用,在学术思想与科学方法上,具有综合性、整体性、协调性的特色,在理论方法研究与应用技术开发方面,取得了具有创新性、开拓性的成果。“智能化”已成为当前新技术、新产品的发展方向和显著标志。

为了适时总结、交流、宣传我国学者在“智能科学技术”领域的研究开发及应用成果,中国人工智能学会与科学出版社合作编辑出版《智能科学技术著作丛书》。需要强调的是,这套丛书将优先出版那些有助于将科学技术转化为生产力以及对社会和国民经济建设有重大作用和应用前景的著作。

我们相信,有广大智能科学技术工作者的积极参与和大力支持,以及编委们的共同努力,《智能科学技术著作丛书》将为繁荣我国智能科学技术事业、增强自主创新能力、建设创新型国家做出应有的贡献。

祝《智能科学技术著作丛书》出版,特赋贺诗一首:

**智能科技领域广  
人机集成智能强  
群体智能协同好  
智能创新更辉煌**

涂序彦

中国人工智能学会荣誉理事长  
2005年12月18日

## 序

最优化问题是经济、管理、医药和诸多工程领域最为普遍的问题之一,其中,含有多个相互冲突目标函数的优化问题很常见。此外,问题内在的变化、测量条件的限制、有限的的数据等偶然和认知不确定因素,使得目标函数的参数无法用精确数值表示,从而传统的简化目标函数表达形式的做法具有很大的局限性,难以有效求解问题。正是由于客观存在的诸多不确定性,研究含有不确定参数的多目标优化问题更具有实际意义。对于多种不确定性的表现形式,区间形式最容易获取,而且模糊数和随机数等其他不确定表现形式往往可通过合适的方式转化为区间形式。由此,区间成为一种最重要的不确定表现形式,区间多目标优化问题的研究具有广阔的应用前景。

作为一类受自然界生物进化启发产生的全局概率搜索方法,进化优化方法具有群体搜索特点,其非常适于求解多目标优化问题,可同时获得问题的多个 Pareto 最优解。近三十年来,多目标进化优化方法的研究取得了令人瞩目的进展,进化优化方法业已成为解决多目标优化问题的有效途径。对于区间多目标优化问题,如果通过一定的方法将区间转化为精确数值,则可采用已有的进化多目标优化方法进行求解。然而,转化过程不可避免将丢失部分信息,从而可能使求解结果产生偏离,尤其是涉及多准则决策的基于偏好的多目标进化优化问题。因此,专门针对区间多目标优化问题,研究直接求解问题的相关进化优化理论与方法具有重要的学术意义和实际应用价值,迫在眉睫。

在多项国家和省部级科研项目资助下,该书作者近年来取得了一系列关于区间多目标进化优化的研究成果。作为研究成果的结晶,该书针对区间多目标优化问题面临的若干难题,全面系统地阐述了区间多目标进化优化的理论与方法,内容涵盖了多目标进化优化领域的诸多热点研究方向。该书内容丰富、结构合理、阐述严谨、通俗易懂、数据翔实,是我国计算智能与智能优化领域又一部颇具阅读性、实用性和参考性的专业著作。



2013年4月8日于清华大学



## 《智能科学技术著作丛书》编委会

名誉主编：吴文俊

主 编：涂序彦

副 主 编：钟义信 史忠植 何华灿 何新贵 李德毅 蔡自兴 孙增圻  
谭 民 韩力群 黄河燕

秘 书 长：黄河燕

编 委：（按姓氏汉语拼音排序）

蔡庆生（中国科学技术大学）

蔡自兴（中南大学）

杜玉平（北京邮电大学）

韩力群（北京工商大学）

何华灿（西北工业大学）

何 清（中国科学院计算技术研究所）

何新贵（北京大学）

黄河燕（北京理工大学）

黄心汉（华中科技大学）

焦李成（西安电子科技大学）

李德毅（中国人民解放军总参谋部第六十一研究所）

李祖枢（重庆大学）

刘 宏（北京大学）

刘 清（南昌大学）

秦世引（北京航空航天大学）

邱玉辉（西南师范大学）

阮秋琦（北京交通大学）

史忠植（中国科学院计算技术研究所）

孙增圻（清华大学）

谭 民（中国科学院自动化研究所）

谭铁牛（中国科学院自动化研究所）

涂序彦（北京科技大学）

王国胤（重庆邮电学院）

王家钦（清华大学）

王万森（首都师范大学）

吴文俊（中国科学院数学与系统科学研究院）

杨义先（北京邮电大学）

于洪珍（中国矿业大学）

张琴珠（华东师范大学）

赵沁平（北京航空航天大学）

钟义信（北京邮电大学）

庄越挺（浙江大学）

## 前 言

很多实际优化问题同时包含多个相互冲突的目标函数,由于主客观因素的影响,这些目标函数往往含有不同类型和强度的不确定参数,使得目标函数值也具有不确定性,这类问题称为不确定多目标优化问题。鉴于描述模糊参数的隶属函数和随机参数的分布函数往往难以获取,且通过一定的方法,模糊参数和随机参数均可以转化为区间参数,此外,获取描述区间参数的上下限相对容易,因此,研究区间多目标优化问题具有非常重要的理论意义和实际应用价值。

作为一类模拟自然界生物进化和遗传变异机制的全局概率搜索方法,进化优化方法虽然已经成功应用于很多实际的复杂优化问题,包括含有多个目标函数的优化问题,但当目标函数含有区间参数或目标函数值为区间时,已有的进化优化方法却不再适用,主要体现在:①传统的 Pareto 占优关系基于精确的目标函数值,因此,当目标函数值为区间时,无法采用已有的 Pareto 占优关系比较不同进化个体的性能,这大大影响后续遗传操作的实施,说明研究适用于区间目标函数值的 Pareto 占优关系是非常必要的。②问题的 Pareto 优化解集在目标空间的分布非常复杂,这时,除了要求 Pareto 前沿具有好的逼近性、分布性及延展性之外,还通常要求具有小的不确定性,这使得产生均衡上述特性的 Pareto 前沿非常困难。如果将决策者的偏好融入进化求解过程,通过决策者的偏好引导种群进化,那么,将有助于产生均衡上述特性的 Pareto 前沿,但目前这方面的研究成果却非常少,说明研究将决策者偏好融入进化过程的方法以提高问题优化解集的性能是非常有意义的。③如果问题包含的目标函数很多,那么,采用已有的多目标进化优化方法求解,Pareto 优化解的选择压力将明显降低,描述 Pareto 前沿需要的优化解将指数增加,且无法可视化,说明研究求解区间高维多目标优化问题的有效方法势在必行。

鉴于此,作者在近年来主持的多项国家和省部级科研项目资助下,一直从事区间多目标进化优化理论与方法的研究,给出目标函数值为区间时,用于比较不同进化个体性能的 Pareto 占优关系,提出多种决策者偏好融入及其在种群进化应用的策略,建立高维多目标优化问题的降维转化理论,并设计有针对性的进化求解方法。上述成果已经成功应用于很多基准数值函数优化和室内布局问题,并通过与已有方法的全面详细比较,证实了所提理论与方法的有效性。这些成果丰富了进化优化理论,提高了进化优化方法解决实际问题的能力,并拓展了进化优化方法的应用范围,因此,具有重要的理论意义和实际应用价值。



本书是作者在该领域国内外权威期刊及有影响的国际会议论文集上发表十余篇学术论文的基础上,进一步加工、深化而成的,是对已有成果的全面总结和高度概括,主要内容包括:目标函数值为区间时,进化个体的比较、决策者偏好的融入及其在种群进化的应用,以及含有很多目标函数优化问题的降维转化与求解等。据作者所知,本书是国内第一部用进化优化方法解决区间多目标优化问题,特别是融入决策者偏好解决该问题的学术著作。因此,不但具有很高的学术价值,而且对该方向的发展具有重要的引领作用。

本书在阐述区间多目标进化优化理论与方法时,均给出问题研究的必要性、所提方法的思想、相关的技术措施及实现算法的具体步骤等。在阐述方法的应用时,均给出应用问题的背景、应用过程中所需参数的设置、不同算法的对比结果及详细的分析等。力求读者读后感到该工作非常有必要做,且做得思路清晰,措施合理,结果正确、可靠。此外,在撰写过程中,本书尽量做到文笔流畅,语言表达准确、通俗,数学符号统一,公式规范,图表清楚。

在撰写本书过程中,作者得到清华大学博士生导师王凌教授多方面的指导,王老师在百忙之中不但仔细审阅了全部书稿,提出许多非常中肯的建议和意见,而且欣然为本书作序,令作者深受鼓舞,在此,向王老师表示衷心感谢! 硕士研究生秦娜娜和季新芳为书稿提供部分内容,江苏省重点学科“控制理论与控制工程”博士点为本书的出版提供大力支持,在此一并表示感谢!

区间多目标进化优化是一个快速发展、多学科交叉的新颖研究方向,其理论及应用均有大量问题尚待进一步深入研究。由于作者学识水平和可获得资料的限制,书中难免存在不妥之处,敬请同行专家和读者批评指正。

作 者

2013年4月于中国矿业大学

# 目 录

《智能科学技术著作丛书》序

序

前言

<b>第 1 章 基本知识</b> .....	1
1.1 区间多目标优化问题 .....	1
1.2 进化多目标优化方法 .....	4
1.3 区间进化优化 .....	9
1.4 基准优化问题.....	12
1.5 性能指标.....	17
1.6 本书主要内容.....	19
1.7 本章小结.....	21
参考文献 .....	22
<b>第 2 章 基于可信度的区间多目标进化优化方法</b> .....	26
2.1 方法的提出.....	26
2.2 区间可信度.....	27
2.3 基于可信度的占优关系.....	27
2.4 基于区间的拥挤距离.....	28
2.5 算法描述.....	30
2.6 在数值函数优化的应用.....	32
2.7 本章小结.....	37
参考文献 .....	37
<b>第 3 章 基于可信度下界的区间多目标进化优化方法</b> .....	39
3.1 方法的提出.....	39
3.2 区间占优可信度下界.....	40
3.3 基于可信度下界的占优关系.....	42
3.4 算法描述.....	43
3.5 性能分析.....	45
3.6 在数值函数优化的应用.....	45
3.7 本章小结.....	53
参考文献 .....	54

<b>第 4 章 混合指标优化问题的大种群进化优化方法</b> .....	55
4.1 方法的提出 .....	55
4.2 混合指标优化问题 .....	57
4.3 人机评价任务分配 .....	57
4.4 进化个体定性指标值估计 .....	58
4.5 算法描述 .....	59
4.6 性能分析 .....	60
4.7 在室内布局优化系统的应用 .....	61
4.8 本章小结 .....	66
参考文献 .....	67
<b>第 5 章 区间混合指标优化问题的大种群进化优化方法</b> .....	69
5.1 方法的提出 .....	69
5.2 区间混合指标转化 .....	70
5.3 进化种群分类数确定 .....	73
5.4 算法描述 .....	74
5.5 在室内布局优化系统的应用 .....	75
5.6 本章小结 .....	81
参考文献 .....	82
<b>第 6 章 区间混合指标优化问题的区间偏好大种群进化优化方法</b> .....	84
6.1 方法的提出 .....	84
6.2 嵌入用户偏好的多目标进化优化 .....	85
6.3 进化个体区间定性指标值估计 .....	88
6.4 用户区间偏好精确化 .....	90
6.5 进化个体排序 .....	91
6.6 算法描述 .....	93
6.7 在室内布局优化系统的应用 .....	95
6.8 本章小结 .....	102
参考文献 .....	103
<b>第 7 章 基于目标相对重要性的区间多目标进化优化方法</b> .....	106
7.1 方法的提出 .....	106
7.2 目标相对重要性 .....	107
7.3 目标相对重要性的数学模型 .....	108
7.4 基于决策者偏好区域的进化个体排序 .....	110
7.5 算法描述 .....	112
7.6 在数值函数优化的应用 .....	114

---

7.7 本章小结 .....	121
参考文献 .....	121
<b>第8章 基于偏好多面体的区间多目标进化优化方法 .....</b>	<b>123</b>
8.1 方法的提出 .....	123
8.2 区间偏好多面体基本理论 .....	124
8.3 区间偏好多面体构建 .....	127
8.4 基于区间偏好多面体的进化个体排序 .....	128
8.5 算法描述 .....	129
8.6 在数值函数优化的应用 .....	131
8.7 本章小结 .....	143
参考文献 .....	143
<b>第9章 基于偏好方向的区间多目标进化优化方法 .....</b>	<b>145</b>
9.1 方法的提出 .....	145
9.2 决策者偏好方向提取 .....	146
9.3 基于区间成就标量化函数的进化个体排序 .....	147
9.4 算法描述 .....	148
9.5 在数值函数优化的应用 .....	150
9.6 本章小结 .....	154
参考文献 .....	155
<b>第10章 基于偏好的自适应区间多目标进化优化方法 .....</b>	<b>156</b>
10.1 方法的提出 .....	156
10.2 基于决策者偏好的变异算子 .....	157
10.3 自适应交叉和变异概率 .....	159
10.4 算法描述 .....	160
10.5 在数值函数优化的应用 .....	161
10.6 本章小结 .....	166
参考文献 .....	166
<b>第11章 高维多目标集合进化优化方法 .....</b>	<b>168</b>
11.1 方法的提出 .....	169
11.2 优化问题的降维转化 .....	171
11.3 集合比较 .....	172
11.4 集合进化策略 .....	173
11.5 算法描述 .....	174
11.6 在数值函数优化的应用 .....	176
11.7 本章小结 .....	184

---

参考文献	185
<b>第 12 章 区间高维多目标集合进化优化方法</b>	<b>188</b>
12.1 方法的提出	188
12.2 优化问题降维转化	189
12.3 集合进化策略	190
12.4 算法描述	194
12.5 在数值函数优化的应用	196
12.6 本章小结	205
参考文献	206
<b>附录 部分区间多目标进化优化方法源程序</b>	<b>207</b>
附录 1 基于偏好多面体的进化个体排序 Matlab 源程序	207
附录 2 第 11 章集合进化策略 Matlab 源程序	214

# 第1章 基本知识

很多实际问题能够归结为优化问题。如果一个优化问题的目标函数或(和)约束函数含有某种不确定性,称这类问题为不确定优化问题。在众多不确定优化问题中,区间优化问题是一类普遍存在且非常重要的不确定优化问题,这类问题的典型特点是:问题的目标函数或(和)约束函数含有的参数取值通常为区间,使得目标函数或(和)约束函数的取值也为区间。当区间优化问题包含的目标函数不止一个且相互冲突时,相应的优化问题称为区间(参数)多目标优化问题。

据作者所知,到目前为止,已有的有效解决区间多目标优化问题的方法非常少。鉴于此,本书主要阐述了近年来提出的解决该问题的进化优化方法,特别是作者在该方向取得的最新研究成果。为便于理解本书阐述的方法,需要首先介绍与区间多目标优化相关的知识。为此,本章将简要介绍区间多目标进化优化的基本知识,包括区间多目标优化问题、进化多目标优化方法、用于区间多目标优化问题的进化优化方法、基准优化问题,以及评价区间多目标进化优化方法性能的指标体系。此外,将在本章最后概述本书的主要内容,使读者对本书的内容有个整体的认识。

## 1.1 区间多目标优化问题

### 1.1.1 不确定多目标优化问题

很多实际问题能够归结为优化问题。为了采用数学方法求解一个优化问题,需要首先建立该问题的数学模型。建立某优化问题的数学模型时,需要优化的变量称为决策变量;需要优化的性能指标用目标函数表示;此外,决策变量通常不能任意取值,需要满足的约束用约束函数表示。对于复杂的优化问题,需要优化的目标函数通常不止一个,且这些目标函数之间相互冲突,称这类问题为多目标优化问题。

在众多多目标优化问题中,有的优化问题本身具有某种不确定性<sup>[1]</sup>,有的优化问题本身是确定的,但是,在建立数学模型时获取的数据少,或者测量仪器精度低使得测到的数据不准确,或者简化模型导致认知不确定性<sup>[2]</sup>……总之,多种主客观因素的影响,使得优化问题的目标函数或(和)约束函数往往含有不确定参数,从而导致它们的取值不再是精确值,这些不确定参数可能是随机变量,也可能是模糊数,还可能是区间<sup>[3]</sup>。这类目标函数或(和)约束函数含有不确定性的优化问题称



为不确定多目标优化问题。典型的不确定多目标优化问题有产品设计<sup>[4]</sup>、路径规划<sup>[5]</sup>及电力调度<sup>[6]</sup>。

到目前为止,已有多种求解不确定(多目标)优化问题的方法。根据问题包含参数的不确定特性,这些方法可以分为随机规划、模糊规划及区间规划等三类<sup>[3,7]</sup>。其中,采用随机规划<sup>[8~10]</sup>解决的优化问题包含的参数取值是随机变量,且需要事先知道该随机变量满足的分布;采用模糊规划<sup>[11~13]</sup>解决的优化问题包含的参数取值是模糊数,且需要事先知道描述该模糊数的隶属函数。但是,在实际问题中,获取随机变量满足的分布或描述模糊数的隶属函数通常是很困难的<sup>[3]</sup>,因此,上述两类方法的应用范围受到很大限制。

区间规划<sup>[7,14~21]</sup>解决的优化问题包含的参数取值为区间,且需要事先知道该区间的上下限或中点和半径。一方面,获取这些参数的取值通常比较容易;另一方面,随机变量通过置信水平<sup>[22]</sup>、模糊数通过截集水平<sup>[11]</sup>均能够转化为区间,从而随机和模糊优化问题能够转化为区间优化问题。因此,求解区间优化问题的方法广泛应用于实际优化问题中,如利润最大化<sup>[23]</sup>、机翼设计<sup>[24]</sup>、汽车设计<sup>[25]</sup>及汽油调和优化<sup>[26]</sup>。相应地,研究有效求解区间优化问题的方法具有重要的理论意义和实际应用价值。鉴于区间多目标优化问题的普遍性和复杂性,本书主要研究有效求解区间多目标优化问题的理论与方法。

区间多目标优化问题的目标函数或(和)约束函数的取值为区间,为便于理解该问题,首先介绍与区间相关的基础知识。

### 1.1.2 区间基础知识<sup>[27]</sup>

**定义 1.1**  $a=[\underline{a},\bar{a}]$ 称为一个区间,其中, $\underline{a},\bar{a}\in R$ ,且 $\underline{a}\leq\bar{a}$ 。 $\underline{a}$ 和 $\bar{a}$ 分别称为 $a$ 的下限和上限。当 $\underline{a}=\bar{a}$ 时, $a$ 退化为点,也称为点区间。用 $I(R)$ 表示 $R$ 上闭区间的集合。

**定义 1.2** 对于 $a=[\underline{a},\bar{a}],b=[\underline{b},\bar{b}]\in I(R),I(R)$ 上的加法、减法及乘法运算分别定义为

$$\begin{aligned} a+b &= [\underline{a}+\underline{b},\bar{a}+\bar{b}] \\ a-b &= [\underline{a}-\bar{b},\bar{a}-\underline{b}] \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$a \cdot b = [\min(\underline{a} \cdot \underline{b}, \underline{a} \cdot \bar{b}, \bar{a} \cdot \underline{b}, \bar{a} \cdot \bar{b}), \max(\underline{a} \cdot \bar{b}, \underline{a} \cdot \underline{b}, \bar{a} \cdot \bar{b}, \bar{a} \cdot \underline{b})]$$

特别地,当 $\lambda$ 是标量时<sup>[28]</sup>,

$$\lambda \cdot a = \begin{cases} [\lambda \cdot \underline{a}, \lambda \cdot \bar{a}], & \lambda \geq 0 \\ [\lambda \cdot \bar{a}, \lambda \cdot \underline{a}], & \lambda < 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

文献<sup>[28]</sup>综述了多种区间序关系。为方便起见,采用 Limbourg 和 Aponte 给

出的区间序关系定义<sup>[21]</sup>,该定义可以推广至如下形式。

**定义 1.3** 称  $a$  在区间意义下不小于  $b$ , 记为  $a \geq_{\text{IN}} b$ , 当且仅当  $a$  的下限和上限均分别不小于  $b$  的下限和上限, 即

$$a \geq_{\text{IN}} b \Leftrightarrow a \geq b \wedge \bar{a} \geq \bar{b} \quad (1.3)$$

**定义 1.4** 两个区间  $a$  和  $b$  的距离记为  $d(a, b)$ , 定义为这两个区间下限距离和上限距离的最大值, 即

$$d(a, b) = \max\{|\underline{a} - \underline{b}|, |\bar{a} - \bar{b}|\} \quad (1.4)$$

**定义 1.5** 分量为区间的向量称为区间向量。记  $I(R^m)$  为  $m$  维区间向量集合, 那么,  $I(R^m) = \{A | A = (a_1, a_2, \dots, a_m), a_i = [\underline{a}_i, \bar{a}_i] \in I(R), i = 1, 2, \dots, m\}$ 。记  $D = D_1 \times D_2 \times \dots \times D_m$  为  $R^m$  的子空间, 那么,  $D$  的  $m$  维区间向量集合可以表示为  $I(D) = \{A | A = (a_1, a_2, \dots, a_m), a_i = [\underline{a}_i, \bar{a}_i] \subseteq D_i, i = 1, 2, \dots, m\}$ 。

**定义 1.6** 自变量是区间向量的函数称为区间函数。

获得区间函数最简单的方法是: 把实值函数的自变量换成区间向量。例如, 对函数  $f(x) = 1 - x$ , 当把自变量  $x$  换成区间变量  $X$  时, 可得到一个区间函数  $F(X) = 1 - X$ 。当  $X = [2, 5]$  时, 由定义 1.2 可得,  $F(X) = [-4, -1]$ 。

**定义 1.7** 两个区间向量  $\mathbf{A} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$  和  $\mathbf{B} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$  的距离定义为对应分量距离的最大值, 即

$$d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \max_{i \in \{1, 2, \dots, m\}} d(a_i, b_i) \quad (1.5)$$

定义了距离的向量空间, 称为度量空间。因此,  $I(R^m)$  为度量空间, 也称为距离空间。

### 1.1.3 区间多目标优化问题的数学模型

不失一般性, 本书考虑如下区间多目标最大化问题:

$$\begin{aligned} \max f(\mathbf{x}, \mathbf{c}) &= (f_1(\mathbf{x}, \mathbf{c}_1), f_2(\mathbf{x}, \mathbf{c}_2), \dots, f_m(\mathbf{x}, \mathbf{c}_m)) \\ \text{s. t. } \mathbf{x} &\in S \subseteq R^n \\ \mathbf{c}_i &= (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{il})^T, c_{ik} = [\underline{c}_{ik}, \bar{c}_{ik}], k = 1, 2, \dots, l \end{aligned} \quad (1.6)$$

式中,  $\mathbf{x}$  为  $n$  维决策变量;  $S$  为  $\mathbf{x}$  的决策空间;  $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{c}_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) 为第  $i$  个含有区间参数的目标函数;  $\mathbf{c}_i$  为区间向量参数;  $c_{ik}$  为  $\mathbf{c}_i$  的第  $k$  个分量;  $\underline{c}_{ik}$  和  $\bar{c}_{ik}$  分别为  $c_{ik}$  的下限和上限。由于目标函数含有区间参数, 因此, 问题(1.6)的各目标函数值均为区间, 并记  $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{c}_i) \stackrel{\text{def}}{=} [\underline{f}_i(\mathbf{x}, \mathbf{c}_i), \bar{f}_i(\mathbf{x}, \mathbf{c}_i)]$ 。

特别地, 当所有参数均为确定数值时, 问题(1.6)退化为确定型多目标优化问题, 其数学模型为

$$\begin{aligned} \max f(\mathbf{x}) &= (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) \\ \text{s. t. } \mathbf{x} &\in S \subseteq R^n \end{aligned} \quad (1.7)$$

所谓多目标优化,是对问题包含的所有目标函数同时优化。由于这些目标函数之间往往相互冲突,因此,某一目标函数得到优化意味着其他至少一个目标函数的性能将会下降。由此不难想象,对于多目标优化问题,不存在一个使每个目标函数都达到最优的解,而只可能存在一个权衡所有目标函数的最优解集。下面针对式(1.7)描述的多目标优化问题,给出几个重要的概念<sup>[29,30]</sup>。

**定义 1.8** 设 $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$ 是问题(1.7)的两个解,即 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S$ ,且 $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ ,

(1) 如果对于所有目标函数, $\mathbf{x}_1$ 不比 $\mathbf{x}_2$ 差,即 $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, f_i(\mathbf{x}_1) \geq f_i(\mathbf{x}_2)$ ,且至少存在一个目标函数,使得 $\mathbf{x}_1$ 比 $\mathbf{x}_2$ 好,即 $\exists k \in \{1, 2, \dots, m\}, f_k(\mathbf{x}_1) > f_k(\mathbf{x}_2)$ ,那么,称 $\mathbf{x}_1$  Pareto 占优 $\mathbf{x}_2$ ,记为 $\mathbf{x}_1 > \mathbf{x}_2$ 。

(2) 如果 $\mathbf{x}_1$ 既不 Pareto 占优 $\mathbf{x}_2$ , $\mathbf{x}_2$ 也不 Pareto 占优 $\mathbf{x}_1$ ,那么,称 $\mathbf{x}_1$ 与 $\mathbf{x}_2$ 互不 Pareto 占优,记为 $\mathbf{x}_1 \parallel \mathbf{x}_2$ 。

**定义 1.9** 如果对 $\forall \mathbf{x}^* \in S$ ,不存在 $\mathbf{x}' \in S$ ,使得 $\mathbf{x}' > \mathbf{x}^*$ ,那么,称 $\mathbf{x}^*$ 为问题(1.7)的 Pareto 最优解(或优化解、非被占优解)。

**定义 1.10** 所有 Pareto 最优解构成的集合称为问题(1.7)的 Pareto 最优解集,记为 $X^*$ 。

**定义 1.11** 所有 Pareto 最优解对应的目标函数值在目标空间形成的曲面或超体称为 Pareto 前沿。

## 1.2 进化多目标优化方法

进化优化方法是一类模拟自然界生物进化和遗传变异机制而形成的全局概率搜索方法<sup>[31]</sup>,经过四十多年的理论与应用研究,进化优化方法显示出优越的解决复杂优化问题的能力。到目前为止,进化优化方法不但用于求解单模态优化问题<sup>[32]</sup>,而且用于求解多模态优化问题<sup>[33]</sup>;不但用于求解单目标优化问题<sup>[34]</sup>,而且用于求解多目标优化问题<sup>[35]</sup>;不但用于求解确定型优化问题<sup>[32~35]</sup>,而且用于求解不确定优化问题<sup>[21,22]</sup>。

对于多目标优化问题,由于不存在一个使每个目标函数都最优的解,因此,求解多目标优化问题的目的不是获取一个最优解,而是获取一个 Pareto 最优解集。很显然,这个最优解集包含多个 Pareto 最优解。如果某优化方法求解多目标优化问题时能够同时获取问题的多个 Pareto 最优解,那么,将会大大提高问题求解的效率。我们知道,进化优化方法通过在代与代之间维持由多个候选解构成的种群,实现全局搜索<sup>[29]</sup>,因此,如果该方法用于求解多目标优化问题,那么,经过若干代种群进化,将有可能同时获取问题的多个 Pareto 最优解,从而成为解决多目标优化问题的有效方法。